ALGUNS PONTOS DOS EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES ESTRANGEIRAS

Escuela Especial de Ingenieros de Montes — Madrid, Setembro de 1945.

2187 — Um cone de altura h está inscrito numa esfera de raio R. ¿A que distância x do vértice do cone se deve conduzir um plano paralelo à base para que a área da secção produzida no cone esteja para a área da secção produzida na esfera pelo mesmo plano na relação m/n? Discussão.

2188 — Determinar todos os valores de x que satisfaçam à equação $\operatorname{sen} 5x = 16 \operatorname{sen}^5 x$.

2189 — É $8m^3$ o volume do sólido limitado pelas três faces concorrentes de um cubo e pelo plano, que determinam os três vértices extremos das arestas, que concorrem no ponto de intersecção das três faces. Calcular o raio da esfera circunscrita a um tetraedro regular equivalente ao cubo.

2190 — Para observar a passagem de aviões, dispõe-se de 3 estações A, B, C, determinando um triângulo de lados a, b, c, sôbre um terreno horizontal. Medem-se, num dado instante, os ângulos α, β e γ que formam respectivamente as visuais dirigidas para um avião dos pontos A B C com o plano determinado por êstes 3 pontos. Determinar a altura a que no instante considerado passou o avião sôbre o plano horizontal ABC.

Escuel Especial de Ingenieros de Minas — Madrid, Setembro de 1945.

2191 — Determinar o lugar geométrico do vértice ds um triedro triortogonal cujas arestas são sempre tangentes a uma esfera de raio dado R.

2192 — Determinar a e b de modo que o polinómio $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ seja divisível pelo polinómio x^2-x+b.

2193 — Calcular os valores inteiros que satisfazem ao sistema:

$$5x-3y>2 \quad 2x+y<11 \quad y>3.$$

2194 — Resolva a inequação

$$x(x+1)/(x-1)>6.$$

2195 — Num exágono regular $[ABCDEF]$ circunscrito a uma circunferência de centro O e raio unidade traçam-se as diagonais AC e BF que se intersectam em I. Calcular a área gerada pelo lado $\overline{AF}$ e o volume gerado pelo triângulo $[AIF]$ quando o referido triângulo gira de 360° em tôrno do eixo OIH, sendo H o ponto de tangência do lado AB.

Estes problemas são transcritos da revista espanhola *Matematica Elemental* 4.ª série, Tomo V, suplemento n.º 2 — Madrid, 1945, onde o leitor interessado encontrará muito mais material de estudo.

Imperial College of Science and Technology — Universidade de Londres — Exame de entrada — Setembro de 1944.

2196 — Calcular com 3 decimais exactas

(1) $(x+x^{-3})^{1/2}$ para $x=0{,}7316$

(2) $\log_{10}^2 x$ para $x=0{,}0192$.

2197 — Em 8 fichas escrevem-se as letras A, B, C, D, a, b, c e d, uma letra em cada ficha. Quantos grupos de 4 fichas podem formar-se contendo *a)* 2 letras maiúsculas e 2 minúsculas; *b)* pelo menos duas letras maiúsculas; *c)* pelo menos uma letra maiúscula e pelo menos uma letra minúscula?

2198 — Resolva o sistema

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y-1}=1 \quad \frac{1}{y+1}+\frac{1}{x-1}=1.$$

2199 — $[ABCD]$ é um trapésio; AB e DC, lados paralelos, são perpendiculares a BC e é θ o ângulo $\widehat{ACB}$. Sendo $\overline{AB}=l$ e $\overline{CD}=m$, calcule $\overline{AD}$ e o ângulo $\widehat{ABD}$.

2200 — Um sistema de circunferências passa por 2 pontos fixos A e B. Mostrar que são iguais os comprimentos das tangentes às circunferências tirados de qualquer ponto de AB, exterior ao segmento $\overline{AB}$. Traçam-se tangentes PT e $P'T'$ a cada uma das circunferências de pontos fixos P e P' equidistantes de AB e do mesmo semi-plano que AB determina. Mostre que $\overline{PT}^2-\overline{P'T'}^2$ é constante para as circunferências do sistema.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **2.º exercício de revisão — 1 de Fevereiro de 1946.**

2201 — Resolva a equação $(z^2+i)^3=z^2+i$ e represente no plano de Argand os afixos das suas raízes.

R: *As raízes da equação proposta são as raízes das equações* $z^2+i=0$, $z^2+i=1$ *e* $z^2+i=-1$ *que se podem escrever respectivamente,* $\sqrt{\operatorname{cis}(3\pi/2)}$, $z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}(7\pi/4)}$ *e* $z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}(5\pi/4)}$. *Por aplicação da fórmula de Moi-*

vre generalizada obtém-se: $z_1=\text{cis}(3\pi/4)$, $z_2=\text{cis}(7\pi/4)$, $z_3=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(7\pi/8)$, $z_4=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(15\pi/8)$ $z_5=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(5\pi/8)$ *e* $z_6=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(13\pi/8)$ *onde por* $\text{cis}(\theta)$ *se designa* $\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$. *Os afixos das quatro últimas raízes encontram-se sôbre uma circunferência de centro na origem e de raio igual a* $\sqrt[4]{2}$, *que se pode obter da seguinte maneira: tomando um segmento* u *para a unidade de comprimento, determine-se o meio proporcional* m *entre* u *e* 2u, *e em seguida o meio proporcional* s *entre* m *e* u. *O comprimento de* s *é, na unidade adoptada, igual a* $\sqrt[4]{2}$.

2202 — Calcule z, sabendo que duas das suas raízes cúbicas diferem de uma unidade. R: *Sejam* α *e* $\alpha+1$ *as raízes cúbicas em questão. Então* $\alpha^3=(\alpha+1)^3$, *equação que dá para* α *os valores* $\alpha_1=(-3+\sqrt{3}\,i)/6$ *e* $\alpha_2=(-3-\sqrt{3}\,i)/6$. *Os valores de* z *que satisfazem ao problema são, pois,* $z_1=\alpha_1^3=\sqrt{3}\,i/9$ *e* $z_2=\alpha_2^3=-\sqrt{3}\,i/9$.

2203 — Sabendo que a imagem M do complexo $z=x+iy$ descreve a circunferência $x^2+y^2-3x-2y-1=0$, determine a equação cartesiana da curva descrita pela imagem M' do complexo $z'=z-1+2i$. R: *Designando por* X *e* Y *as coordenadas cartesianas do ponto* M', *vem* $X+iY=(x-1)+i(y+2)$; *por definição de igualdade de complexos,* $x=X+1$, $y=Y-2$ *e a equação pedida é* $X^2+Y^2-X-6Y+5=0$, *que representa uma circunferência de centro no ponto* $(1/2, 3)$ *e de raio igual a* $\sqrt{17}/2$.

2204 — Dado, no plano de Argand, o ponto M imagem do complexo z, construa o ponto M' imagem de z', tal que $|z+z'|=2|z|$ e o produto zz' seja um imaginário puro. Suponha que a condição $|z+z'|=2|z|$ é substituída por $|z+z'|=a|z|$ $(a>0)$; determine os valores de a para os quais o problema não tem solução. R: *Como* $|z+z'|=|z'-(-z)|=2|z|$, *o ponto* M' *deve estar sôbre uma circunferência de raio igual ao dôbro da distância de* M *à origem e de centro no simétrico de* M *em relação à origem; como* zz' *é um imaginário puro,* M' *deve estar sôbre a recta* r *que faz com o eixo das abscissas o ângulo* $\pi/2-\alpha$, *sendo* α *um argumento de* z. *Como a recta* r *encontra a circunferência em dois pontos, o problema tem duas soluções, que são precisamente êsses pontos. No caso da condição* $|z+z'|=a|z|$, *o problema não tem solução quando* $a|z|$ *é menor que a distância do simétrico de* M *em relação à origem à recta* r, *isto é, quando* $a<\cos 2\alpha$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 3.º exercício de revisão.

2205 — Uma urna U_1 contém 3 esferas brancas e 2 pretas, e uma urna U_2 contém 2 esferas brancas e 3 pretas. Tira-se uma esfera de U_1: se fôr branca, introduz-se em U_2; se fôr preta, introduz-se novamente em U_1. Faz-se esta operação três vezes. Tira-se depois uma esfera de U_2. Calcular a probabilidade de ser branca. R: $P=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}+$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}+$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{31477}{70000}.$$

2206 — Lançam-se 12 dados. Calcular a probabilidade de obter 2 quadras, 3 quinas, 4 senas e de ser 51 a soma dos pontos obtidos.

$$R: P=\frac{12!}{2!\,3!\,4!\,2!\,1!}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}=\frac{275}{5038848}.$$

2207 — Tomam-se ao acaso um inteiro positivo n não superior a 20 e um inteiro positivo m não superior a 30. Probabilidade de m ser divisível por n.

$$R: P=\frac{101}{600}.$$

2208 — Baseando-se nos desenvolvimentos dos binómios $(2+1)^m$ e $(2-1)^m$ prove que, se m é ímpar

$$3^m=1+\binom{m}{1}2^m+\binom{m}{3}2^{m-2}+\binom{m}{5}2^{m-4}+\cdots+2\binom{m}{m}.$$

R: *Basta subtrair membro a membro as igualdades que se obtem escrevendo os desenvolvimentos dos referidos binómios e passar* $-(2-1)^m=-1$ *para o segundo membro da igualdade resultante.*

Enunciados e soluções dos n.os 2201 a 2208 de José Morgado.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência.

2209 — Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes à bissectriz dos quadrantes ímpares e que intersectam no eixo dos yy um segmento de comprimento igual a 2. R: $[(x-y)/\sqrt{2}]^2=x^2+1$ *ou* $x^2-y^2+2xy+2=0$, *que é a equação de uma hipérbole.*

2210 — Dadas as rectas não complanas $a\equiv(a', a'')$, $b\equiv(b', b'')$ e o ponto $P\equiv(P', P'')$ não pertencente a nenhuma delas, determine a intersecção $i\equiv(i', i'')$ dos planos $\alpha\equiv(a, P)$ e $\beta\equiv(b, P)$.

2211 — Seja $a\odot b=a+b-1$, onde a e b são inteiros positivos. Mostre que a operação $\odot$ verifica as leis de um semi-grupo.

2212 — Descrevendo a imagem de $z=x+iy$ a recta $y-4x=0$, determine a equação cartesiana da curva descrita pela imagem de $\frac{2}{z-1}$. R: $2X^2+2Y^2+$ $+4X+Y=0$, *equação da circunferência de centro no ponto* $(-1,-1/4)$ *e de raio* $\sqrt{17}/4$.

Soluções dos n.os 2209 a 2212 de José Morgado.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º Exame de freqüência — 23-II-1945.

2213 — Calcular o produto de tôdas as determinações de $(1+i+i^2+\cdots+i^{n-1})^{1/n}$. Discussão. R: *A expressão dada reduz-se a* $E=\left(\frac{1-i^n}{1-i}\right)^{1/n}$. *Ora* $i^n=1, i, -1, -i$ *consoante* $n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ (k inteiro e positivo). *Em cada um dêstes casos teremos que calcular os produtos das* n *determinações de, respectivamente,* $E_0=0^{1/n}$, $E_1=1^{1/n}$, $E_2=[2/(1-i)]^{1/n}$ e $E_3=[(1+i)/(1-i)]^{1/n}$; *representemo-los por* P_0, P_1, P_2 *e* P_3. *Mostra-se que, sendo* $z=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, *o produto das* n *determinações de* $z^{1/n}$ *é* $P=(-1)^{n-1}\cdot z$. *Assim, ter-se-à* $P_0=0$, $P_1=1$, $P_2=-(1+i)$ *e* $P_3=i$, *em cada uma das hipóteses formuladas sôbre* n.

2214 — Dados os complexos z_1, z_2 e z_3, provar que se $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ é real, os afixos dêles estão em linha recta. R: *Seja* $z_k=x_k+y_k\cdot i$ $(k=1,2,3)$. *Calcule-se* $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. *Para que êste complexo se reduza à parte real, terá que anular-se o coeficiente da parte imaginária, ou seja* $(x_2-x_3)\cdot(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_2-y_3)=0$ *ou* $\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}$, *condição de colinearidade de* 3 *pontos de coordenadas* $P_k(x_k, y_k)$, $(k=1,2,3)$, *que são os afixos de* z_k.

2215 — Duma táboa de anuidades tiraram-se os seguintes valores

$x=20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$

$a_x=17{,}6281, 16{,}8157, 15{,}7599, 14{,}4738, 12{,}9711, 11{,}2596, 9{,}3777$.

¿ Até que ordem de diferenças se deve ir para obter uma boa interpolação? Calcular a_{32}. R: *Construindo uma tabela de diferenças ordinárias e utilizando a interpoladora de Gregory-Newton, obtém-se* $a_{32}=15{,}2721$.

Soluções dos n.os 2213 a 2215 de Orlando Morbey Rodrigues

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2216 — Seja S um semi-grupo, comutativo ou não. Construa um grupo G que contenha um subconjunto S' isomorfo de S. [*Sugestão:* Recorde a construção da teoria dos números racionais a partir da dos números inteiros].

2217 — Seja G um grupo, a e b dois quaisquer dos seus elementos e $\cdot$ a operação nele definida. Definamos em G a operação $\odot$ da seguinte maneira: $x\odot y=(x\cdot a)\cdot(y\cdot b)$ para quaisquer x, y e G. Mostre que é condição necessária e suficiente para que: *a)* G constitua um grupo relativamente à operação $\odot$, que b seja um elemento do centro de G; *b)* G constitua um grupo abeliano relativamente à operação $\odot$, que a e b sejam elementos do centro de G; *c)* a operação $\odot$ coïncida com a operação $\cdot$ que $a\cdot b$ seja o elemento unidade.

Problemas n.º 2216 e 2217 propostos por José Morgado.

Para compreensão da terminologia empregada consultem-se *Aritmética Racional* de A. Monteiro e J. da Silva Paulo e *Elementos da Teoria dos Grupos* de Almeida Costa (C. E. M. P. — n.º 1).

CORRECÇAO

No problema n.º 2183, (*Gazeta de Matemática* n.º 27), figura por lapso $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ em vez de $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

AOS LEITORES

Para não atrazar mais ainda a publicação dêste número, que deveria, normalmente, ser distribuido em Abril de 1946, reduzimos as secções «Matemáticas Superiores» e «Problemas» e suprimimos a secção «Boletim Bibliográfico — Publicações Recebidas». Êste atrazo é devido a causas estranhas à nossa vontade e esperamos poder no próximo n.º 29 compensar as reduções que fomos forçados a levar a efeito nêste número.

A Redacção