ANO VII-N.º 27 GAZETA DE MATEMATICA FEVEREIRO-1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática Lda.* ■ ADMINISTRADOR: *J. O. Campos*

Composto na Tipografia Matemática Limitada — Impresso na Sociedade Industrial de Tipografia Limitada

Que é uma estrutura?*

por **Garrett Birkhoff** (Harvard University)

1. Relações de ordem. Muitos sistemas matemáticos são estruturas relativamente a uma ou mais relações. Assim o conjunto dos números reais é uma estrutura relativamente à relação de *ordem* $x \leqq y$ (x é menor ou igual a y); o conjunto dos inteiros não negativos é uma estrutura relativamente à relação $x|y$ (x é um *divisor* de y); os sub-conjuntos de um conjunto formam uma estrutura se os relacionarmos pela relação de *inclusão* $X \subset Y$ (X é um sub-conjunto de Y).

A afirmação de que os 3 sistemas acima citados são *estruturas* significa realmente que as relações indicadas têm um certo número de propriedades formais comuns. Assim a relação de ordem entre os números reais possue evidentemente as seguintes propriedades:

P1. Para qualquer x é $x \leqq x$ (reflexividade)

P2. Se $x \leqq y$ e $y \leqq x$ então $x = y$ (anti-simetria)

P3. Se $x \leqq y$ e $y \leqq z$ então $x \leqq z$ (transitividade)

Mais: as proposições P1-P3 verificam-se ainda se a relação $\leqq$ de desigualdade entre números reais é substituída pela relação $|$ de divisibilidade entre inteiros não negativos ou pela relação $\subset$ de inclusão entre sub-conjuntos.

Resumindo: as 3 relações $\leqq$, $|$ e $\subset$ tais como foram definidas, verificam as propriedades P1—P3 e tôdas as conseqüências lógicas destas propriedades, mesmo as indirectas.

2. Uma questão de economia. Parece-me um desperdício de papel desenvolver tôdas as propriedades da relação de desigualdade usando uma notação e terminologia, discutir a divisibilidade utilizando um segundo conjunto de símbolos e termos técnicos, e repetir êste procedimento ao tratar da álgebra de classes. Em lugar disto aproveitar-me-ei das analogias básicas e crearei uma *teoria geral de estruturas* das relações satisfazendo a P1—P3. Esta teoria poderá conter como casos especiais muitas das propriedades de desigualdade, divisibilidade e inclusão; assim terei, ao mesmo tempo, vantagens tanto de *unidade* como de *economia*.*

Um exemplo vulgar desta economia apresenta-se na dedução das propriepades da relação $x < y$ e suas análogas. Por $x < v$, entende-se que $x \leqq y$ mas $x \neq y$. É um exercício simples mas enfadonho provar, partindo de P1—P3, por exemplo, que $x < y$ e $y \leqq z$ implica $x < z$ que $x_1 < x_2 < x_3 < x_1$ é impossível, etc. Se a teoria dos estruturas não pode inteiramente libertar-nos de executar estas deduções fastidiosas, pode, pelo menos, livrar-nos de as repetir três ou mais vezes com linguagem diferente. Se definirmos *divisor próprio* de y como um inteiro tal que $x \mid y$ sendo $x \neq y$, podemos aplicar *gratis* a esta relação cada uma das propriedades de $x < y$ deduzida de P1—P3. A mesma observação se aplica ao conceito de *sub-conjunto* próprio.

3. O princípio de dualidade. Uma economia notável mas mais escondida, que é realizada pela teoria das estruturas, consiste no seu geral Princípio de Dualidade, que engloba como casos particulares os princípios de dualidade em lógica, geometria projectiva, teoria dos números, *etc.* Por *dual* duma relação verificando P1—P3, entende-se simplesmente a sua conversa no sentido vulgar. Assim a dual de $\leqq$ é $\geqq$, a dual de $x \mid y$ é «x é um múltiplo de y», e a dual de $X \subset Y$ é $X \supset Y$.

Na sua forma mais simples, o Princípio de Dualidade estabelece que a relação dual de qualquer relação verificando P1—P3 satisfaz também a P1—P3. Daqui

* Unificações análogas, realizadas pela teoria dos grupos abstractos, teoria dos corpos e teoria dos ideais constituem a feição característica da álgebra moderna. A importância da economia na organização do conhecimento científico é descrita pelo físico e filósofo Ernst Mach no seu «Science of Mechanics», Chicago 1893, p. 6

* Publicado em «American Mnthematical Monthly», Vol. L, n.º 8, 1943.

segue-se que tôdas as definições e teoremas são ou duais aos pares ou duais de si mesmos.

Por exemplo, *minorante* de um conjunto X de elementos x_i relativamente à relação $\leqq$ satisfazendo a P1—P3 é um elemento u tal que $u \leqq x_i$ qualquer que seja x_i em X. O conceito dual é o de *majorante*, ou seja o de elemento v tal que $x_i \leqq v$ para qualquer x_i em X. Anàlogamente para a divisibilidade são duais os conceitos de divisor comum e múltiplo comum; ¿quais são os análogos para a relação de inclusão entre conjuntos?

Semelhantemente, pelo *maior dos minorantes* ou *meet* de x, y em relação a $\leqq$, designa-se um elemento u (representado por $x \cap y$) que é: 1) um minorante de x e y e 2) satisfaz a $u \geqq v$ dêsde que v seja um qualquer minorante de x e y. Assim no caso de desigualdade, $x \cap y$ é simplesmente o *menor* entre x e y; no caso de divisibilidade, é o *m. d. c.* de x e y; no caso de inclusão, $X \cap Y$ é a *intersecção* de X e Y, ou seja o conjunto de todos os pontos que pertençam tanto a X como a Y.

O leitor não terá grande dificuldade em definir o conceito dual dêste: *menor dos majorantes* ou *join* de x e y, representado por $x \cup y$. Êste, evidentemente, especialisa-se no *maior* entre x e y, m. m. c. de x e y e *reunião* ou soma dos conjuntos X e Y nos três exemplos que considerámos.

4. Estruturas. Estamos aptos agora a definir precisamente o que se entende quando falamos de uma estrutura.

DEFINIÇÃO. *Uma estrutura é um sistema* L *de elementos* $x, y, z, \cdots$ *considerado juntamente com uma relação que verifica P1—P3 e também o postulado:*
L. *Quaisquer dois elementos* x *e* y *têm um meet* $x \cap y$ *e um join* $x \cup y$ *em* L.

TEOREMA. *Em qualquer estrutura são verdadeiras as seguintes identidades algébricas:*

L1. *Para qualquer* x, $x \cap x = x \cup x = x$,

L2. $x \cap y = y \cap x$ e $x \cup y = y \cup x$,

L3. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ e $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.

L4. $x \cap (x \cup y) = x \cup (x \cap y) = x$.

Omitimos a demonstração. Inversamente, qualquer sistema verificando L1-L4 torna-se uma estrutura se se define $x \leqq y$ como significando $x \cup y = y$ (ou duma forma equivalente, significando $x = x \cap y$). É principalmente por esta interpretação de estruturas em têrmos de operações binárias que a teoria das estruturas pode considerar-se como um ramo da álgebra.

De facto, há uma analogia entre as operações $\cap$, $\cup$ numa estrutura e as operações $\times$, $+$ da aritmética ordinária. Como a multiplicação, a operação $\cap$ é comutativa e associativa; anàlogamente para $\cup$ e para a adição (cf. L2-L3). Além disto, nos três exemplos citados, é válida a lei:

L6′. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

análoga da lei *distributiva* $x(y+z) = xy + xz$ da aritmética.

No entanto, a lei distributiva não se verifica em tôdas as estruturas. Por exemplo, tomemos os pontos, rectas e planos do espaço projectivo juntamente com o conjunto vazio O e o espaço inteiro I. Formamos uma estrutura relativamente à inclusão; $X \cap Y$ é a intersecção de X e Y, enquanto que $X \cup Y$ é a soma linear de X e Y — isto é, o conjunto de todos os pontos de rectas ligando X e Y. Verifica-se fàcilmente que se x, y, z são três pontos distintos de uma recta L, então $y \cup z = L$, donde $x \cap (y \cup z) = x \cap L = x$, ao passo que $x \cap y = x \cap z = O$ e também $(x \cap y) \cup (x \cap z) = O$.

É na verdade um facto curioso, mas não demonstràvel fàcilmente, que se três elementos numa estrutura verificam L6′ então verificam a sua dual:

L6″. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

cuja análoga em aritmética $x + yz = (x+y) \cdot (x+z)$ não é verdadeira.

No exemplo precedente, os elementos O e I são respectivamente minorante e majorante universais, isto é, para qualquer x, $O \leqq x \leqq I$. Tais elementos não existem necessàriamente em tôdas as estruturas (embora sim em tôdas as estruturas finitas). Assim com os números reais temos de imaginar e juntar os números $-\infty$ e $+\infty$ para obter fronteiras universais; por outro lado, 1 é um divisor comum e 0 um múltiplo comum de todos os inteiros não negativos.

Se existem fronteiras universais, prova-se fàcilmente que são de qualquer modo análogas a 0 e a 1 na aritmética. Assim podemos mostrar partindo de P1-P3 e das nossas definições, que para qualquer x,

$$O \cap x = O, \quad O \cup x = x, \quad \text{e} \quad I \cap x = x.$$

Isto é análogo a $0 \cdot x = 0$, $0 + x = x$, e $1 \cdot x = x$

5. Aplicações na teoria das funções e na lógica. Seria possível continuar a indicar muitíssimos exemplos e propriedades das estruturas. Espero porém que os exemplos anteriores darão alguma idéia da generalidade e simplicidade da noção de estrutura. Para emoldurar o quadro, concluirei mencionando outras duas estruturas que representam papéis fundamentais na teoria das funções e na lógica.

As funções $f(x)$ reais contínuas de uma variável real formam uma estrutura se se define $f \leqq g$ como $f(x) \leqq g(x)$ para qualquer x. Aqui $f \cap g$ é a função $h(x)$ que, para cada x toma o menor entre os valores de $f(x)$ e $g(x)$; define-se $f \cup g$ por dualidade. Assim $f \cup -f$ é o *módulo* $|f(x)|$ de $f(x)$.

Finalmente, na lógica matemática, os atributos (bom, rico, fêmea, *etc.*) formam uma estrutura. Aqui $p \leqq q$ têm a interpretação «*p é implicado* por *q*», $p \cap q$ significa «*p* ou *q*», $p \cup q$ significa «*p* e *q*». Nesta estrutura (muitas vezes chamada uma *álgebra de Boole*), representa também um papel fundamental a operação p' (significando *não p*). Verifica-se

L7. $(p')' = p$, $p \cap p' = 0$, $p \cup p' = I$

$(p \cap q)' = p' \cup q'$ e $(p \cup q)' = p' \cap q'$

É notável que as mesmas leis sejam verificadas pelos conjuntos se X' designar o *complementar* de X (conjunto dos pontos que não pertencem a X); mais, são verificadas em geometria projectiva se x' designa a *polar* de x. De facto, pode mostrar-se que a principal diferença entre a geometria projectiva e a álgebra de Boole (ou álgebra da lógica) é que as leis distributivas L6'-L6'' da álgebra de Boole devem substituir-se em geometria projectiva pela lei *modular* mais fraca:

L5. Se $x \leqq z$, então $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

Desde que $x \leqq z$, tem-se $x \cup z = z$ e então a conclusão de L5 toma a forma *auto-dual* $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$; assim ela é também equivalente a $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$.

A lei modular auto-dual L5 é importante por outra razão. Ela é verificada pelos sub-grupos normais de qualquer grupo, pelos ideais de qualquer anel, *etc.*, e pode ser considerada a base de muitos dos conhecidos teoremas de composição da álgebra moderna. Mas isto são contos largos!

Trad. de Manuel Zaluar

N. T. O leitor interessado por êste assunto, que desempenha hoje um papel tão importante nos mais diversos ramos da Matemática, pode completar a sua iniciação nêste estudo em «Aritmética Racional» de A. Monteiro e J. Paulo. Estudará, em seguida, «Théorie Générale des Structures» de Glivenko (Actualités Scientifiques et Industrielles n.º 652). Obra mais importante e menos acessível é a «Lattice Theory» de G. Birkhoff.

Que é um quadriculado?

por **Hugo Ribeiro** (bolseiro do I. A. C. em Zürich)

Tivemos ocasião de ler o explêndido artigo em que Garrett Birkhoff, (o jóvem matemático americano ao qual se deve a maioria dos resultados e aplicações já hoje englobados pela teoria das estruturas) dá aos estudantes uma primeira idéia de estrutura, e a tradução hoje na «Gazeta», com a qual o Prof. Manuel Zaluar Nunes atrai a atenção dos nossos jóvens estudiosos para esta bonita teoria, só recentemente retomada, depois dos trabalhos de Dedekind.

Como em anterior número da «Gazeta» anunciávamos, era a nossa intenção escrever um ou mais artigos que, grosso modo, teriam os mesmos objectivos. Depois desta tradução de Birkhoff podemos bem dispensar-nos de realizar uma bôa parte da nossa tarefa. Mas aproveitamos desde já esta oportunidade para indicarmos a demonstração dum teorema elementar, caso especial dum outro de que nos ocupámos recentemente. Apoiar-nos-emos no artigo de Birkhoff, e teremos ocasião de citar, outras noções fundamentais em teoria das estruturas. Antes, porém, incluimos as seguintes observações de carácter geral: Deve sublinhar-se o facto de que é, sôbretudo, por intermédio das estruturas especiais e suas aplicações em Matemática — mais precisamente: aplicações na análise dos fundamentos de diversos capítulos da Matemática — que o interêsse de uma teoria das estruturas se tem justificado e crescido. Se é possível que o *desenvolvimento formal da teoria* seja fàcilmente acessível a qualquer pessoa que possua um certo hábito de seguir desenvolvimentos formais, o que é certo — e isto não só para a teoria das estruturas! — é que, sem uma perfeita compreensão dos exemplos das aplicações (que residem fora dêsse desenvolvimento formal) não é possível alcançar o sentido dos resultados nem dos problemas. (Uma simples leitura nestas condições não poderá trazer grandes ensinamentos e arrisca-se a contribuir para viciar uma formação matemática). Na teoria das estruturas sucede freqüentemente que as concretizações, os exemplos, dum primeiro nível são ainda conceitos abstractos, e mais: conceitos que provêm dos mais variados ramos da Matemática, do que se pode talvez chamar (e chama decerto entre nós) «Matemática moderna». Como se vê no artigo de Birkhoff, é possível não fazer aparecer tais dificuldades limitando-nos a exemplos muito comuns [1]. Êstes mostram ainda que a teoria das estruturas não é assunto que interesse simplesmente estreitos especialistas mas entra, naturalmente, no âmbito da preparação dum matemático, em geral, dum profissional, sôbretudo quando êste é um professor. [1] [2]

Quando procuramos a estrutura dos divisores naturais dum número natural $n = p^r \cdot q^s$ onde $r \geq 1$ e $s \geq 1$, e $p \neq q$ são primos, encontramos sempre uma com $(r+1) \cdot (s+1)$ elementos, cujo «mínimo» é a unidade e cujo «máximo» é n. Se se tem um grupo cíclico cuja ordem é um tal n a estrutura dos seus sub-grupos, estrutura relativamente às operações de intersecção e formação do grupo-reunião (isto é, menor sub-grupo contendo a reunião), que são, aqui, os nossos meet e join respectivamente, só difere da anterior porque os elementos são certos grupos, ao passo que na anterior eram números. Isto leva-nos a concluir que as duas estruturas são «*isomorfas*», isto é, que há uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos tal que tanto os meet com os join de quaisquer elementos assim correspondentes, são também correspondentes ou, mais simplesmente ainda, que há tal correspondência que se dois elementos estão na relação $\leqq$, numa das estruturas, os correspondentes (pela correspondência dada ou pela recíproca) estão na relação $\leqq$

(1) Isto já é aliás, decerto, convicção de quem lê o livro de extraordinário valor didactico que é a «Aritmética Racional» de A. Monteiro e J. da Silva Paulo, onde se inicia, também, o estudo de alguns exemplos que aqui retomamos.

(2) Note-se ainda que, de vários lados, tem surgido, através da chamada filosofia, a intervenção de não matemáticos nesta teoria. Nos dois casos de que tenho notícia deu-se isto com insucesso, que aliás era de prever. Entre nós, num livro sôbre questões de lógica onde a noção de estrutura é citada, há, se bem contámos, ao tôdo 6 afirmações relacionadas com o assunto. Ora a 1.ª não tem sentido, a 2.ª é falsa, a 3.ª é uma trivialidade, as 4.ª, 5.ª e 6.ª não têm sentido (as 5.ª e 6.ª porque retomam a 4.ª).