Finalmente, na lógica matemática, os atributos (bom, rico, fêmea, *etc.*) formam uma estrutura. Aqui $p \leqq q$ têm a interpretação «*p é implicado* por *q*», $p \cap q$ significa «*p* ou *q*», $p \cup q$ significa «*p* e *q*». Nesta estrutura (muitas vezes chamada uma *álgebra de Boole*), representa também um papel fundamental a operação p' (significando *não p*). Verifica-se

L7. $(p')'=p$, $p \cap p'=0$, $p \cup p'=I$

$(p \cap q)'=p' \cup q'$ e $(p \cup q)'=p' \cap q'$

É notável que as mesmas leis sejam verificadas pelos conjuntos se X' designar o *complementar* de X (conjunto dos pontos que não pertencem a X); mais, são verificadas em geometria projectiva se x' designa a *polar* de x. De facto, pode mostrar-se que a principal diferença entre a geometria projectiva e a álgebra de Boole (ou álgebra da lógica) é que as leis distributivas L6'-L6'' da álgebra de Boole devem substituir-se em geometria projectiva pela lei *modular* mais fraca:

L5. Se $x \leqq z$, então $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
Desde que $x \leqq z$, tem-se $x \cup z = z$ e então a conclusão de L5 toma a forma *auto-dual* $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$; assim ela é também equivalente a $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$.

A lei modular auto-dual L5 é importante por outra razão. Ela é verificada pelos sub-grupos normais de qualquer grupo, pelos ideais de qualquer anel, *etc.*, e pode ser considerada a base de muitos dos conhecidos teoremas de composição da álgebra moderna. Mas isto são contos largos!

Trad. de Manuel Zaluar

N. T. O leitor interessado por êste assunto, que desempenha hoje um papel tão importante nos mais diversos ramos da Matemática, pode completar a sua iniciação nêste estudo em «Aritmética Racional» de A. Monteiro e J. Paulo. Estudará, em seguida, «Théorie Générale des Structures» de Glivenko (Actualités Scientifiques et Industrielles n.º 652). Obra mais importante e menos acessível é a «Lattice Theory» de G. Birkhoff.

Que é um quadriculado?

por **Hugo Ribeiro** (bolseiro do I. A. C. em Zürich)

Tivemos ocasião de ler o explêndido artigo em que Garrett Birkhoff, (o jóvem matemático americano ao qual se deve a maioria dos resultados e aplicações já hoje englobados pela teoria das estruturas) dá aos estudantes uma primeira idéia de estrutura, e a tradução hoje na «Gazeta», com a qual o Prof. Manuel Zaluar Nunes atrai a atenção dos nossos jóvens estudiosos para esta bonita teoria, só recentemente retomada, depois dos trabalhos de Dedekind.
Como em anterior número da «Gazeta» anunciávamos, era a nossa intenção escrever um ou mais artigos que, grosso modo, teriam os mesmos objectivos. Depois desta tradução de Birkhoff podemos bem dispensar-nos de realizar uma bôa parte da nossa tarefa. Mas aproveitamos desde já esta oportunidade para indicarmos a demonstração dum teorema elementar, caso especial dum outro de que nos ocupámos recentemente. Apoiar-nos-emos no artigo de Birkhoff, e teremos ocasião de citar, outras noções fundamentais em teoria das estruturas. Antes, porém, incluimos as seguintes observações de carácter geral: Deve sublinhar-se o facto de que é, sôbretudo, por intermédio das estruturas especiais e suas aplicações em Matemática — mais precisamente: aplicações na análise dos fundamentos de diversos capítulos da Matemática — que o interêsse de uma teoria das estruturas se tem justificado e crescido. Se é possível que o *desenvolvimento formal da teoria* seja fàcilmente acessível a qualquer pessoa que possua um certo hábito de seguir desenvolvimentos formais, o que é certo — e isto não só para a teoria das estruturas! — é que, sem uma perfeita compreensão dos exemplos das aplicações (que residem fora dêsse desenvolvimento formal) não é possível alcançar o sentido dos resultados nem dos problemas. (Uma simples leitura nestas condições não poderá trazer grandes ensinamentos e arrisca-se a contribuir para viciar uma formação matemática). Na teoria das estruturas sucede freqüentemente que as concretizações, os exemplos, dum primeiro nível são ainda conceitos abstractos, e mais: conceitos que provêm dos mais variados ramos da Matemática, do que se pode talvez chamar (e chama decerto entre nós) «Matemática moderna». Como se vê no artigo de Birkhoff, é possível não fazer aparecer tais dificuldades limitando-nos a exemplos muito comuns [1]. Êstes mostram ainda que a teoria das estruturas não é assunto que interesse simplesmente estreitos especialistas mas entra, naturalmente, no âmbito da preparação dum matemático, em geral, dum profissional, sôbretudo quando êste é um professor. [1] [2]

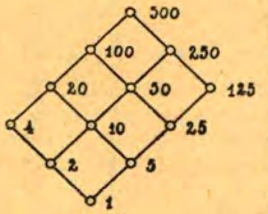
Quando procuramos a estrutura dos divisores naturais dum número natural $n = p^r \cdot q^s$ onde $r \geq 1$ e $s \geq 1$, e $p \neq q$ são primos, encontramos sempre uma com $(r+1) \cdot (s+1)$ elementos, cujo «mínimo» é a unidade e cujo «máximo» é n. Se se tem um grupo cíclico cuja ordem é um tal n a estrutura dos seus sub-grupos, estrutura relativamente às operações de intersecção e formação do grupo-reunião (isto é, menor sub-grupo contendo a reunião), que são, aqui, os nossos meet e join respectivamente, só difere da anterior porque os elementos são certos grupos, ao passo que na anterior eram números. Isto leva-nos a concluir que as duas estruturas são «*isomorfas*», isto é, que há uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos tal que tanto os meet com os join de quaisquer elementos assim correspondentes, são também correspondentes ou, mais simplesmente ainda, que há tal correspondência que se dois elementos estão na relação $\leqq$, numa das estruturas, os correspondentes (pela correspondência dada ou pela recíproca) estão na relação $\leqq$

(1) Isto já é aliás, decerto, convicção de quem lê o livro de extraordinário valor didactico que é a «Aritmética Racional» de A. Monteiro e J. da Silva Paulo, onde se inicia, também, o estudo de alguns exemplos que aqui retomamos.

(2) Note-se ainda que, de vários lados, tem surgido, através da chamada filosofia, a intervenção de não matemáticos nesta teoria. Nos dois casos de que tenho notícia deu-se isto com insucesso, que aliás era de prever. Entre nós, num livro sôbre questões de lógica onde a noção de estrutura é citada, há, se bem contámos, ao todo 6 afirmações relacionadas com o assunto. Ora a 1.ª não tem sentido, a 2.ª é falsa, a 3.ª é uma trivialidade, as 4.ª, 5.ª e 6.ª não têm sentido (as 5.ª e 6.ª porque retomam a 4.ª).

na outra. Vêmos mais (resguardados ainda pelo «isomorfismo») que é também indiferente supôr outro n dêsde que êle seja o produto de potências de *mesmos* expoentes r e s de *dois* primos distintos.

Ora as estruturas finitas representam-se, freqüentemente com comodidade, num diagrama do seguinte modo: A cada elemento da estrutura fazemos corresponder um «ponto» da fôlha do papel do diagrama, dois elementos distintos nunca correspondem ao mesmo «ponto», se um elemento y «*segue imediatamente*» outro x, isto é, se $x<y$ e não há u, na estrutura, com $x<u<y$, então o «ponto» correspondente a y está «acima» do «ponto» correspondente a x e são, nêste caso e só nêste caso, x e y ligados por um segmento. É claro que um diagrama duma estrutura é-o de tôdas as isomorfas e de nenhuma outra. Para aquelas estruturas (entre si isomorfas) que estamos considerando, e só para elas, obtem-se como diagrama, sempre uma figura à qual, por deformações que não perturbem nenhuma das relações de situação e incidência, acima citadas, se pode dar a forma dum quadriculado constituído por $r \cdot s$ pequenos quadrados. Indicamo-la para o caso de um dos expoentes ser 2 e o outro 3 (divisores de 500). A tais estruturas chamamos, aqui, «quadriculadas».



Nelas o join e o meet de dois elementos são os elementos cujas imagens, no diagrama, são os «pontos», respectivamente «mais alto» e «mais baixo», obtidos como intersecções das rectas que passam pelas imagens dos dados. Os próprios vértices duma tal figura constituem, é claro, por estas mesmas operações, também uma estrutura (isomorfa daquelas estruturas de que a figura pode constituir diagrama).

Desinteressemo-nos, agora, daqueles r e s e pensemos, *em geral,* nestas estruturas «quadriculadas». Elas são distributivas, o que resulta já de propriedades simples relacionando os m. d. c. e m. m. c.; por outro lado, nunca a um elemento se seguem imediatamente mais do que dois elementos; e só 4 elementos, a saber, os vértices do grande rectângulo, têm complemento, isto é, há *para êles* uma operação verificando $L7$. Ora tem-se o

Teorema: Ser distributiva, nenhum elemento ser imediatamente seguido por mais do que dois e ter precisamente 4 elementos com complemento, constitue uma condição necessária e suficiente para que uma estrutura finita seja quadriculada.

Podemos limitar-nos a indicar a demonstração de que a condição é suficiente: Com efeito, por ser finita, a estrutura dada L tem um elemento «*mínimo*» O (o meet de todos) e um «*máximo*» I (o join de todos), as fronteiras universais cada uma das quais é, evidentemente, complemento da outra (e de mais nenhum elemento). Tomemos os dois únicos restantes elementos a e b com complemento, os quais são, necessàriamente, complementares um do outro. O conjunto dos elementos «incluídos em» a, isto é, na relação $\leqq$ com a constitue uma «*subestrutura*» L_a da estrutura dada L, isto é, L_a, é uma nova estrutura (cujos elementos pertencem todos a L) relativamente às mesmas operações definidas, para êsses elementos em L. Anàlogamente para o conjunto dos elementos incluídos em b. Ora estas duas estruturas L_a e L_b só têm de comum o elemento mínimo, visto que $a \cap b = 0$ e se $u \leqq a$ e $u \leqq b$ então $u \leqq a \cap b$. Procuremos conhecer as estruturas L_a e L_b partindo do seu elemento mínimo O: há em L_a (como é necessário para atingir a a partir de O) pelo menos um elemento seguindo imediatamente O e da mesma maneira em L_b pelo menos um elemento seguindo imediatamente O; e como êstes dois elementos são distintos, como vimos, e, por hipótese não há em L mais elementos que sigam imediatamente O, há precisamente *um* elemento em L_a seguindo imediatamente O e há, em L_b, precisamente *um* elemento e seguindo imediatamente O. Mas se v é um elemento qualquer de L_a, em L_a não pode seguir-se-lhe imediatamente mais do que um elemento: De contrário, como o join de v com e não está em L_a (porque $(v \cup e) \cup a = (v \cup a) \cup e = a \cup e \neq a$) mas é um elemento que segue imediatamente v (porque se se supõe $v < x < v \cup e$ vem $x = x \cap (v \cup e) = (x \cap v) \cup (x \cap e) = v \cup w$ com $w = x \cap e = O$ ou $w = e$, o que é impossível) haveria na estrutura dada mais do que 2 elementos seguindo imediatamente v o que contradiz uma das nossas hipóteses sôbre L. Vê-se, por êste modo, que L_a é tal que, *nela*, a *cada* elemento se segue um e um só, excepto se êsse elemento é o último ao qual nenhum se segue. L_a é pois o que se chama uma estrutura «*linear*», finita, ou «*ordenada*» por $<$. O mesmo se diz de L_b.

Ora cada elemento x de L é, em virtude ainda da distributividade, o join dum elemento $x \cap a$ de L_a e e outro $x \cap b$ de L_b: $x = x \cap I = x \cap (a \cup b) = (x \cap a) \cup (x \cap b)$; donde, representadas as duas estruturas lineares L_a e L_b nos dois lados inferiores dum rectângulo com o vértice comum O, como ponto mais baixo, vê-se que a cada elemento x de L corresponde um ponto bem determinado pela intersecção das paralelas aos lados tiradas por $x \cap a$ e $x \cap b$, que se $x \neq y$ (donde ou $x \cap a \neq y \cap a$ ou $x \cap b \neq y \cap b$) os pontos correspondentes são distintos e que se y segue imediatamente x, é ou $x \cap a = y \cap a$ e $y \cap b$ segue imediatamente $x \cap b$, ou $x \cap b = y \cap b$ e $y \cap a$ segue imediatamente $x \cap a$; enfim que, com êstes vértices e os segmentos daquelas paralelas se obtém de facto um diagrama de L por êste método e que L é quadriculada. (Se L_a e L_b têm respectivamente $r+1$ e $s+1$ elementos há $r \cdot s$ pequenos quadrados)·

Êste teorema pode fàcilmente ser generalizado de várias maneiras e obtêr outras formas. Estas tarefas são recomendadas ao leitor. A consideração da noção de diagrama, e portanto tôdas as considerações de carácter geométrico, pode considerar-se como constituindo simplesmente um meio auxiliar que evita uma noção, a de «*produto de estruturas*» (aqui estruturas lineares), muito simples também mas menos aconselhável nesta introdução. O teorema pode evidentemente interpretar-se como fornecendo uma definição algébrica, em têrmos da teoria das estruturas, do quadriculado.

Zürich, Dezembro de 1945.

TEMAS DE ESTUDO

SUR UNE MANIÈRE DE PRÉSENTER LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

por **G. Dedebant**

1. Préliminaire. Il va de soi que la théorie des équations algébriques a dèja été si complétement et si parfaitement étudiée que nul ne saurait prétendre à une nouveauté quelconque sur ce sujet.

Aussi bien n'avons-nous en vue que d'exposer une certaine maniére de présenter la résolution de ces équations — rencontrée au hasard d'une méditation — et dont nous ignorons d'ailleurs si elle est nouvelle, mais qui nous a paru posséder une certaine valeur pédagogique.

Nous n'y attachons guère plus que l'importance d'une «Récréation mathématique».

Soit:

$$f_n(x)=0 \quad (E_n),$$

l'équation générale du n^{eme} degré.

Résoudre cette équation, au sens des algébristes, c'est exprimer ses solutions dans l'extension obtenue en adjoignant au corps des nombres rationnels des deux signes, d'autres nombres qui sont les racines de l'équation binôme:

$$t^n-1=0 \quad (B_n).$$

Le but à atteindre (s'il est accessible ?) est d'exprimer les racines de (E_n) par une fraction rationnelle ayant ces nouveaux nombres pour arguments.

L'équation (B_n) admet toujours la racine banale $t=+1$ et, si n est pair, la racine $t=-1$. Ces deux racines font partie du corps des nombres rationnels de l'un ou l'autre signe; les autres racines sont étrangères à ce corps. Il nous semble qu'il y ait intérêt à se placer seulement dans le corps des nombres rationnels positifs et à considérer -1 comme une entité extérieure. Nous allons voir tout de suite l'avantage de cette conception pour la resolution de l'équation da 2^{eme} degré.

2. L'équation du second degré. Soit l'équation générale du 2^{eme} degré:

$$x^2+px+q=0 \quad (E_2).$$

L'équation binôme correspondante est:

$$t^2-1=0 \quad (B_2).$$

Elle admet les racines $+1$ et -1. Désignons la seconde par α que nous ne considérons plus comme appartenant au corps des coefficients de (E_2). α sera donc une variable «indépendante» sur laquelle nous calculerons en remplaçant son carré par $+1$. Grace à cette régle, la solution de (E_2), si elle existe au sens des algébristes, se présentera sous la forme *d'un binôme*: $x=y+\alpha z$. Substituons cette expression dans (E_2); il vient: $(z^2+y^2+py+q)+z(2y+p)\alpha=0$. Ce doit être une *identité en* α, ce qui donne le système d'équations: $\begin{cases} z^2+y^2+py+q=0 \\ z(2y+p)=0. \end{cases}$ Ecartant la solution $z=0$, de la $2.^e$ équation, qui n'avancerait pas la résolution de l'équation (E_2), il reste: $y=-p/2$. Portant alors cette valeur dans la 1^{ere}, on obtient: $z^2=p^2/4-q$. Les racines de (E_2) sont donc, en écrivant maintenant $\alpha=-1$: $x=-p/2 \pm \sqrt{p^2/4-q}$.

3. L'équation du 3^{eme} degré. Le même procedé est applicable à l'équation générale du 3^{eme} degré:

$$x^3+px+q=0 \quad (B_3).$$

L'équation binôme du 3^e degré:

$$t^3-1=0 \quad (E_3)$$

admet les racinos: 1, α, α^2, liées entre elles par la relation: $1+\alpha+\alpha^2=0$.

Nous pouvons donc calculer sur α comme sur un nombre «irrationnel» dont le cube est égal à 1 et le carré à $-(1+\alpha)$.