

## ECONOMETRIA

## SOBRE LAS TRANSFORMACIONES QUE CONSERVAN LA ELASTICIDAD

por J. Gallego Diaz (Universidad de Madrid)

Tiene importancia en Econometria determinar, si existen, aquellas transformaciones que conservan la elasticidad. La cuestion, que no hemos visto estudiada en sitio alguno, se resuelve fácilmente en esta breve nota.

Sea la transformacion buscada la:  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ .

Podemos suponer que  $Lu = \alpha(x, y)$   $Lv = \beta(x, y)$  y diferenciando:  $dLu = \alpha'_x dx + \alpha'_y dy$ ;  $dLv = \beta'_x dx + \beta'_y dy$ .

Pero, como se sabe,  $E_u(v) = \frac{d(Lv)}{d(Lu)} = \frac{\beta'_x dx + \beta'_y dy}{\alpha'_x dx + \alpha'_y dy}$ .

Y como, por hipótesis, se ha de verificar:  $E_u(v) = -E_v(y)$  se podra escribir:

$$\frac{\beta'_x dx + \beta'_y dy}{\alpha'_x dx + \alpha'_y dy} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

o sea:

$$x\alpha'_y (y')^2 + y'(x\alpha'_x - y\beta'_y) - y\beta'_x = 0$$

y como debe ser idénticamente nula esta ecuacion ello implica que:  $\alpha'_y = 0$ ;  $\beta'_x = 0$ ;  $x\alpha'_x = y\beta'_y$ . Las dos primeras ecuaciones nos dicen que:  $\alpha = \alpha(x)$   $\beta = \beta(y)$  y

la tercera nos indica que:  $x \frac{d\alpha}{dx} = y \frac{d\beta}{dy} = m$ ; es decir:

$\alpha = mLx + K_1$ ,  $\beta = mLy + K_2$  y por lo tanto:

$Lu = mLx + LC$ ,  $Lv = mLy + LC_1$  y, finalmente:

$$\begin{cases} u = Cx^m \\ v = C_1 y^m \end{cases}$$

En donde  $C$ ,  $C_1$  y  $m$  son parámetros cualesquiera. Nuestro resultado tiene doble interes ya que, de un lado permitirá simplificar el cálculo de la elasticidad de ciertas funciones reduciendolo al de otras mas sencillas, y de otro permitirá rebajar el grado a las ecuaciones diferenciales en donde intervengan elasticidades, de acuerdo con la teoria de Sophus Lie sobre los grupos continuos de transformaciones.

A dicho resultado, tambien se puede llegar, más elegantemente, recordando que las transformaciones pedidas seran las que conserven las direcciones de las tangentes en el plano  $u_1 - v_1$  definido por la anamorfosis  $u_1 = Lx$ ,  $v_1 = Ly$ ; ya que la elasticidad de la curva  $y = f(x)$  en un punto no es otra cosa que la inclinacion de la tangente en el punto correspondiente de la curva transformada  $v_1 = \varphi(u_1)$ .

Es decir, que tales transformaciones, en el plano  $u_1 - v_1$  seran el producto de homotecias por transla-

ciones; así:  $\begin{cases} v_2 = Kv_1 + a \\ u_2 = Ku_1 + b \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = KLy + LC \\ u_2 = KLx + LC_1 \end{cases}$ .

Pero  $\begin{cases} v_2 = LY \\ u_2 = LX \end{cases}$  luego resulta:  $\begin{cases} X = C_1 x^K \\ Y = C y^K \end{cases}$ .

## MOVIMENTO CIENTÍFICO

## O PROBLEMA DO ENSINO EM PORTUGAL \*

por Ruy Luís Gomes

Quando se compara uma Escola Superior como a Politécnica de Zürich, a que o nosso colega Hugo Ribeiro dedicou um artigo tão bem documentado no n.º 26 desta mesma Revista, com qualquer das nossas Universidades, em especial no aspecto que nos toca directamente — o do ensino da Matemática — ressaltam logo como principais diferenças a favor da primeira, as seguintes: 1) uma longa e notável tradição matemática; 2) um corpo docente constituído exclusivamente por investigadores, alguns dos quais de primeira plana; 3) uma boa organização do ensino.

Mas a própria organização do ensino, largamente

analizada no artigo acima referido, se aparece assim natural e eficiente é porque gira toda à volta de um núcleo de professores que são notáveis investigadores e vivem completamente absorvidos pelos problemas relacionados com os seus próprios trabalhos e a formação dos seus discípulos.

O professor é assim e antes de mais nada um profissional de elevada categoria, quer dizer, um verdadeiro e activo investigador, e como professor, isto é, como membro do corpo docente de uma Universidade, sente e coloca os problemas da sua Escola acima de tudo!

\* Para melhor compreensão dêste artigo leia-se *Sobre a índole do ensino da Matemática em Zürich* de Hugo B. Ribeiro em *Gazeta de Matemática* n.º 26.

Uma atitude frouxa, vacilante, de permanente desconfiança e sistemático cepticismo, é incompatível com quem se propõe educar a juventude, por sua natureza vibrante e decidida!

Mas se as coisas se apresentam assim com aquelas características num país e numa cidade que tem as suas tradições no campo da Matemática ligadas a sábios da categoria de Dedekind, Schröder, Zermelo, Hurwitz, Einstein, H. Weyl, von Neumann, W. Pauli, etc., e onde actualmente ensinam, entre tantos outros, Hopf, antigo discípulo de Hilbert, e Bernays, seu assistente durante cerca de vinte anos, na célebre Escola de Göttingen onde se formaram tantas gerações de grandes matemáticos da Europa e da América, se isso é assim, repetimos, num meio tão diferenciado como êsse, ainda com mais forte razão se compreende a importância decisiva de um corpo docente com a mais elevada preparação profissional, num país como o nosso que não se pode apoiar em tradições científicas de suficiente continuidade, como se vê claramente através dos casos *isolados* de um Pedro Nunes, um José Anastácio da Cunha, um Gomes Teixeira.

Infelizmente para nós, nunca por aqui passaram para nos ensinar a trabalhar em Matemática nomes que de longe se comparem àqueles que citámos para Zurich, e alguns investigadores que possuímos fracassaram quasi por completo como Mestres: não criaram discípulos nem viveram com os seus alunos, nos seus cursos, os grandes problemas do seu tempo!

Para quebrar esta tradição negativa e vencer com a maior brevidade possível o atraso em que nos encontramos, não me parece que se possa encontrar outro meio que não seja o de partir dos melhores valores da nossa juventude e dar-lhes tôdas as possibilidades de fazerem a sua preparação de base e especializada, por estágios demorados, em verdadeiros Centros de Trabalho da Europa e da América.

Trataríamos assim de formar em cada domínio fundamental da Ciência e da Técnica um núcleo de profissionais que começariam, ainda nos Centros de trabalho para onde tinham ido como bolseiros, e depois de uma aprendizagem suficiente, a pôr à prova as suas qualidades de investigador e seria êsse o primeiro elemento a considerar para a sua selecção e futura recuperação pelas Universidades.

Integrados posteriormente nas nossas Escolas, quando terminados os seus estágios no estrangeiro, e sempre a título provisório e com base no seu «curriculum» exclusivamente, seria a continuação da sua actividade de investigadores nessas mesmas Escolas, o seu interesse pelos problemas da Universidade e a capacidade de criar discípulos, que decidiriam, por escôlha de um júri de especialistas e num plano nacional, da

sua nomeação como professor desta ou daquela Faculdade, conforme o movimento de vagas.

No sentido de precisar melhor o meu ponto de vista, que pretende ser uma contribuição pessoal para a transformação das actuais condições de trabalho e de ambiente das nossas Universidades, nomeadamente no aspecto crucial da preparação dos seus quadros, vou reduzir as considerações anteriores, um tanto dispersas, aos seus pontos principais, que em si mesmos encerram uma análise do problema e a maneira de o enfrentar.

I. O nosso país não tem tradições matemáticas de suficiente continuidade;

II. O defeito mais saliente das nossas Universidades está em não disporem dum numeroso quadro de investigadores à volta dos quais se possam criar Centros de Estudo onde a juventude realize a sua preparação — de base e especializada — em condições de eficiência e continuidade;

III. O professor universitário tem de ser antes de mais nada um investigador, e a seguir, como condição complementar, há-de demonstrar que é capaz de criar discípulos. Por outras palavras: o recrutamento do pessoal docente de uma Universidade há-de fazer-se exclusivamente na massa dos investigadores; mas um investigador só se afirma como professor na medida em que forma discípulos;

IV. O professor do ensino secundário deve ter uma preparação científica tão elevada como o futuro elemento do corpo docente de uma Universidade.

Recrutado igualmente na massa dos investigadores tem de manter bem viva através da sua profissão a mesma atitude activa, o mesmo espirito de iniciativa, o mesmo sentido das responsabilidades que só nos é dado em todo o seu valor no trabalho de investigação. É por aí, pois, que todos os professores — quer do ensino superior quer do ensino secundário — devem começar; e se aos primeiros claramente se exige que permaneçam sempre investigadores por profissão, a todos cumpre serem investigadores por atitude perante a vida.

Estas conclusões que giram tôdas em tórno do mesmo ponto fundamental — um quadro numeroso de investigadores — mostram-nos igualmente que não há maneira de enfrentar o problema do ensino em Portugal em condições seguras que não seja a de dar aos melhores elementos da juventude das nossas Universidades a possibilidade de refazerem ou completarem a sua formação científica e técnica em centros de trabalho da Europa e da América. A seguir, a sua integração nas próprias Universidades, em subordinação ao interesse nacional, fará a própria transformação do meio em que vão trabalhar e, então, os estudiosos

educados nessas Universidades assim actualizadas permitir-nos-ão remodelar todo o nosso ensino superior, secundário e primário, nos seus fundamentos e na sua estrutura

Temos portanto diante de nós um problema da maior gravidade para o futuro do nosso povo e apontamos uma solução que infelizmente se apresenta demorada, embora nos apareça como a única eficaz.

Urge, pois, atacar o problema à escala nacional,

com aquêlo mesmo espírito de larga visão e agudo sentido das realidades do nosso tempo que, guardadas as devidas proporções, ditaram ao falecido Presidente dos Estados Unidos estas admiráveis palavras:

«New frontiers of the mind are before us, and if they are pioneered with the same vision, boldness, and drive with which we have waged this war we can create a fuller and more fruitful employment and a fuller and more fruitful life».

## MOVIMENTO MATEMÁTICO FRANCÊS

*A Gazeta de Matemática tem o prazer de anunciar aos seus leitores o início neste número duma secção de informação do movimento matemático em França, assegurado pelo novo periódico matemático francês Intermédiaire des Recherches Mathématiques com quem manteremos colaboração intensa para a extensão das relações culturais matemáticas entre os dois Países. Assim faremos sabedores os leitores das várias manifestações da actividade matemática francesa contemporânea cujo ressurgimento, após a occupação, se accentua constantemente duma forma irrefutável. As informações recebidas serão publicadas, quando não resumidas, em língua francesa.*

### ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Travaux de la section 1: *Mathématiques* — 70 congressistas ont participé à ces travaux qui ont eu lieu à l'Institut Henri Poincaré, Amphithéâtre Hermite, 11, rue Pierre Curie, Paris, V.

**Président:** Mr. Arnaud Denjoy — Membre de l'Institut;

**Présidents d'Honneur:** MM. Emile Borel, Elie Cartan, Jacques Hadamard, Paul Montel;

**Délégués:** MM. P. Dedron, T. Lemoine, G. Valiron;

**Secrétaire:** Mr. P. Belgodère.

Lundi, 22 Octobre (9h. à 12h.) Présidence de Mr. Arnaud Denjoy.

Conférence: (1) Arnaud Denjoy: «Aperçu général de l'activité mathématique française sous l'occupation allemande».

Conférence: (2) Georges Valiron: «Rapport sur les travaux d'analyse mathématique publiés en France pendant l'occupation».

Communications: (3) Jacques Hadamard: «Le problème de Dirichlet dans le cas hyperbolique des équations aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre».

(4) Arnaud Denjoy: «L'arithmétisation du transfini».

(5) Maurice Janet: «Équations aux dérivées partielles: liens nouveaux avec quelques autres questions.»

Lundi, 22 Octobre (14 h. à 17 h.) Présidence de Mr. Georges Bouligand.

Communications: (6) E. Doucet: «Sur une représentation de certaines fonctions par des intégrales définies».

(7) Mlle Jacqueline Ferrand: «La représentation conforme».

(8) Gustave Choquet: «La représentation conforme et la topologie».

(9) Hubert Delange: «Fonctions entières et théorèmes taubériens».

(10) Pierre Lelong: «Sur les fonctions entières de deux variables complexes».

(11) François Teissier du Cros: «Une classe de nombres transcendants signalée par Mr. G. Valiron, à propos d'une généralisation du théorème d'Abel».

Mardi, 23 Octobre (9 h. à 12 h.) Présidence de Mr. Arnaud Denjoy.

Conférence: (12) Albert Chatelet: «Arithmétique et Algèbre en France sous l'occupation».

Communications: (13) Jean Dieudonné: «Les déterminants sur un corps non commutatif».

(14) Gaston Benneton: «Arithmétique des quaternions».

(15) Claude Chabauty: «Points entiers des courbes algébriques».

(16) François Chatelet: «Une méthode galoisienne en théorie des nombres».

(17) André Gérardin: «Système multigrade en nombres entiers et problèmes connexes».

(18) M. Krasner: «Généralisations et analogues de la théorie de Galois».

(19) E. Doucet: «Sur une équation admettant pour racines les nombres premiers».

Mardi, 23 Octobre (15 h. à 17 h 30) Présidence de Mr. Ribaud.

Séance commune aux sections de Mathématiques, Mécanique et Physique.

Mercredi, 24 Octobre Présidence de Mr. Bohoslav Hostinsky.

Conférence: (20) Georges Bouligand: «*Géométrie et Topologie en France pendant l'occupation*».

Communications: (21) Jacques Hadamard: «*Sur un problème de géométrie élémentaire*».

(22) Paul Montel: «*Les coniques en géométrie finie et les équations aux différences finies*».

(23) Vaclav Hlavaty: «*La géométrie différentielle réglée*».

(24) Paul Libois: «*Axiomatique de la géométrie projective*».

(25) Robert Debever: «*Sur un problème d'équivalence et son application à la théorie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire*».

(26) Gustave Choquet: «*Surfaces et corps convexes*».

Mercredi, 24 Octobre (15 h. à 17 h. 30) Présidence de Mr. Paul Libois.

Communications: (27) Roger Apéry: *Etude topologique du voisinage d'une courbe  $C$  d'une surface algébrique  $S$* .

(28) T. Lemoyne: (1) «*Sur les classes de divers lieux et les ordres de diverses enveloppes de droites dans les systèmes de coniques*».

(2) «*Sur deux théorèmes de Halphen*».

(29) V. Thébault: «*Transmutations d'un tétraèdre*».

(30) Antoine Appert: «*Recherches sur une généralisation des groupes topologiques*».

(31) Jean Dieudonné: «*Les fonctions continues  $p$ -adiques*».

(32) Christian Pauc: «*Mesures abstraites*».

(33) Luc Gauthier: «*Contribution au problème de la trisection des fonctions abéliennes hyperelliptiques de genre 2*».

Mercredi, 24 Octobre (15 h. à 17 h. 30) Présidence de MM. Fessard et Fréchet.

Séance commune au Calcul des Probabilités et aux Sciences Humaines et Biologiques.

Jeudi, 25 Octobre (9 h. à 12 h.) Présidence de Mr. Arnaud Denjoy.

Conférence: (34) Maurice Fréchet: «*Probabilités et Statistique en France sous l'occupation*».

Communications: (35) Georges Darmon: «*Sur les régressions linéaires et paraboliques*».

(36) Paul Lévy: «*Trois théorèmes sur le mouvement brownien*».

(37) M. Dumas: «*Sur des lois de probabilité divergente et la fonction de Fischer*».

(38) Michel Loève: «*Sur les liaisons stochastiques*».

(39) M. Krasner: «*Certaines propriétés des ensembles ouverts non connexes*».

Jeudi, 25 Octobre (15 h. à 16 h.) Présidence de Mr. Paul Lévy.

(40) Jacques Hadamard: «*Les mots, la pensée scientifique et le postulat de la raison*».

Séance commune aux Mathématiques et aux Sciences Humaines.

*Prochain Congrès: Nice (du 9 au 14 Septembre 1946).*

## SIXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

### Première notice

À la suite d'une réunion provoquée par MM. de Kármán et Hunsaker, agissant en qualité de secrétaires du cinquième Congrès international de Mécanique appliquée, et compte tenu de la décision prise à Cambridge (Massachusetts) en 1938, un Comité a été formé pour organiser le sixième Congrès international de Mécanique appliquée qui aura lieu à Paris, du 22 au 29 septembre 1946.

Les invitations sont faites au nom de: l'Académie des Sciences de l'Institut de France, la Direction des Relations culturelles, le Centre national de la Recherche scientifique, l'Institut de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris, la Société française des Mécaniciens et l'Association technique Maritime et Aéronautique.

Le Congrès aura lieu à la Sorbonne.

Les sections du Congrès seront les suivantes:

I. Structures. Élasticité. Plasticité.

II. Hydro- et Aérodynamique. Hydraulique.

III. Dynamique des solides. Vibrations et son. Frottement et lubrification.

IV. Thermodynamique. Transfert de chaleur. Combustion. Questions théoriques sur l'Énergie nucléaire.

À côté des communications, il sera donné plusieurs conférences générales, sur des sujets à l'ordre du jour, qui seront précisés ultérieurement.

Les auteurs des communications éventuelles sont priés de faire connaître, dès que possible, le titre des

travaux qu'ils désirent présenter au Congrès. Comme d'habitude, seuls peuvent être admis des Mémoires d'une haute tenue scientifique, se rapportant au programme du Congrès.

Les auteurs sont priés de faire parvenir au Secrétariat du Congrès le texte de leurs communications (au plus 5000 mots) ou, à défaut, un résumé (moins de 300 mots) avant le 31 juillet 1946. Il serait souhaitable que les résumés puissent être distribués aux Congressistes, en vue de faciliter les discussions qui doivent suivre les exposés. Le Comité d'Organisation espère pouvoir le faire, mais il serait reconnaissant aux auteurs qui pourraient lui faciliter sa tâche en envoyant ou apportant eux-mêmes des tirages du résumé de leur communication.

Les *Comptes rendus* du Congrès, contenant les Procès-verbaux des délibérations, ainsi que les textes des Conférences générales et des Communications, seront publiés dans le plus court délai après le Congrès. La vente de ces volumes sera réservée, par priorité, aux membres du Congrès qui en auront fait la demande. Les exemplaires en surnombre seront ultérieurement mis dans le commerce, à un tarif majoré.

Des facilités pour le séjour des Congressistes à Paris sont prévues et seront portées en temps utile à la connaissance des intéressés. De même, des excursions et des visites à divers établissements, sites ou monuments, seront organisées comme il a été de coutume dans les Congrès antérieurs.

Les droits d'inscription pour participer aux travaux du Congrès sont fixés à 300 frs. (trois cents francs) payables dès maintenant, et, au plus tard, le jour de l'ouverture du Congrès. Les dames accompagnant les Congressistes sont dispensées des droits d'inscription

— sauf dans le cas où elles auraient l'intention de prendre la parole dans les séances, et d'y présenter des communications.

Le Comité français d'Organisation du Congrès est ainsi constitué :

*Président* : Henri Villat.

*Secrétaire général* : Maurice Roy.

*Membres* : Émile Barrillon ; Louis de Broglie ; Albert Caquot ; Paul Dumanois ; Jules Drach ; Frédéric Joliot ; Henri Laugier ; Joseph Pères ; Ernest Vessiot.

Les congressistes sont priés de bien vouloir faire connaître, dès que possible, leur intention de participer au Congrès, en avisant le Secrétaire général, et en même temps de fournir une indication sur la section dans laquelle ils désirent présenter une Communication. Ceci en vue de l'envoi des prochaines Notices.

Les correspondances sont à adresser à

*M. le Secrétaire général du sixième Congrès international de Mécanique appliquée, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris (V°).*

Les versements éventuels peuvent être adressés sous l'indicatif :

*Sixième Congrès international de Mécanique appliquée, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre Curie, Paris (V°).*

Un mode de versement recommandé est le virement au compte de chèques-postaux, Paris, n° 649 (adresse précédente).

## A VINDA A PORTUGAL DO PROF. RENÉ DE POSSEL

Por iniciativa do *Instituto Francês em Portugal* deve chegar a Portugal em Março de 1946 o Professor René de Posssel, titular da cadeira de Mecânica Racional na Universidade de Alger e um dos colaboradores do grupo Bourbaki, que tanto se esforçou, antes da guerra, por tornar conhecidos em França as mais modernas correntes do pensamento matemático.

O Prof. René de Posssel deve realizar conferências nas nossas três Universidades e entre os assuntos que se propõe tratar, em conferências isoladas ou ciclos de lições, podemos citar :

1. Os axiomas da geometria elementar baseados na teoria dos grupos ;

2. Os princípios matemáticos da Mecânica Clássica ;

3. Alguns problemas da Topologia ;

4. Uma demonstração rápida do teorema geral da representação conforme para os domínios múltiplemente conexos.

5. Teorias modernas da Integração.

Sabemos que deve demorar-se no nosso país cerca de dois meses e só lamentamos que não tenha possibilidade de prolongar mais a sua estadia de maneira que os nossos jovens estudiosos pudessem assim iniciar sob a sua superior orientação um verdadeiro trabalho de especialização.

A *Gazeta de Matemática* aproveita este ensejo para, em nome dos seus leitores, agradecer ao *Instituto Francês* a bela iniciativa que acaba de tomar, trazendo até nós aquele jovem investigador.

## NOTICIÁRIO SOBRE O MOVIMENTO CIENTÍFICO NOUTROS PAÍSES

## ARGENTINA

## Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas

Em Junho de 1945 um numeroso grupo de matemáticos de Buenos Aires e La Plata resolveu promover aquilo a que foi dado o nome de «Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas». O convite, dirigido aos matemáticos de todo o país, foi feito nos seguintes termos :

«Os Directores dos Institutos Matemáticos do país e os professores que subscrevem, tomando em consideração o sentimento ambiente para com a realidade científica argentina que, em virtude da grande perturbação causada pela guerra nas actividades mundiais, se vê perante a necessidade imperiosa de se vigorizar a si mesma e de encarar a sua organização com o fim de se pôr à altura do que as circunstâncias lhe exigem, acordaram na necessidade de realizar as «Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas».

«Durante muitos anos estudiosos distintos das ciências matemáticas actuaram isoladamente no nosso país, tendo esse isolamento impedido a obtenção do máximo rendimento na actividade em que todos estamos empenhados. Consideramos chegada a hora de superar tal estado de coisas. As novas gerações que se acercam dos nossos Institutos impõem-nos o dever de encarar com clareza estes problemas e fazer os máximos esforços para consolidar uma união efectiva dos matemáticos da Argentina e para estruturar uma organização que, de futuro, impulsione o progresso da Ciência Matemática.»

«As «Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas» terão lugar em Buenos Aires e La Plata nos dias 27 28 e 29 de Julho de 1945, de acôrdo com o seguinte programa :

- 1) Trabalhos científicos. Apresentação e discussão.
- 2) Agrupamento de todos os matemáticos da Argentina e iniciativas respeitantes à organização de grupos de estudo.
- 3) Preparação dum futuro congresso de Matemáticas, Física e Astronomia.

«Temos o prazer de o convidar a participar nestas Jornadas Matemáticas que, com o auxilio de todos, marcarão uma importante étape na evolução científica do país. Ficariamos muito agradecidos se V. nos fizesse ás sugestões que lhe sugira a formulação das nossas idéias.»

(Traduzido da Revista de la Union Matemática Argentina, Vol XI, N.º 1, 1945)

## BRASIL

Foi fundada no Rio de Janeiro uma organização para o desenvolvimento da investigação científica dispondo de um elevado capital, dado pelo Estado e por particulares. Vai publicar uma revista de matemática: *Summa Brasiliensis Mathematica*. Faz parte do comité de Redacção o nosso amigo e colaborador Prof. António Monteiro. Foram convidados para colaboradores permanentes os Profs. Mira Fernandes, Ruy Luís Gomes, Sixto Rios e Hugo B. Ribeiro.

Está em organização uma colecção de monografias matemáticas. Devem ser impressos nesta colecção os trabalhos seguintes: *Integral de Riemann*, por Lélío Gama; *Integral de Stieltjes*, por L. Nachbin; *Funções Analíticas*, por Oliveira Castro; *Séries*, por Lélío Gama; *Teoria dos Ideais*, por Zariský; *Topologia Geral*, por António Monteiro; e *Espaços de Hilbert*, por Weil.

Temos também o prazer de comunicar aos nossos leitores que a *Gazeta de Matemática* tem a honra de contar como seus colaboradores e correspondentes no Brasil os Profs. Achille Bassi, Leopoldo Nachbin e José Abdellay no Rio de Janeiro, e o Prof. Omar Canduza, em S. Paulo.

## ESPANHA

## Doutoramento em Ciências Matemáticas

Em 24 de Novembro de 1945 realizaram-se na Universidade de Madrid as provas de doutoramento em Ciências Matemáticas do nosso colaborador Eng. José Gallego Diaz.

Damos a seguir, pela actualidade do assunto e seu interesse, um resumo da tese intitulada «Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la Economía Matemática».

Um capítulo introdutório é dedicado à elasticidade fazendo-se um estudo sistemático e completo deste operador e seu inverso e das suas respectivas iterações.

O capítulo seguinte trata da função-índice ofelimidade e com a introdução da métrica da relatividade restrita e a utilização de um espaço de Riemann faz-se o estudo e descrição dos fenómenos económicos apresentando-se o princípio da *mínima acção económica*.

Seguem-se aplicações deste princípio ao estudo das principais curvas da estática e dinâmica económicas deduzindo o Autor as curvas canónicas (sua designação) de oferta e procura e as curvas históricas da diná-

mica económica. Os resultados obtidos permitem o estabelecimento da lei de distribuição das rendas de Pareto.

A difusão serve de modelo para o estabelecimento do processo de circulação económica.

Finalmente apresenta-se a aplicação da elasticidade ao estudo das variações cíclicas dos preços.

A tese pode desenvolver-se sob o ponto de vista axiomático partindo dos seguintes axiomas:

I — O espaço económico é um espaço de Riemann cuja forma quadrática fundamental é

$$ds^2 = \sum \frac{dx_i}{x_i} \cdot \frac{dy_i}{y_i} + \frac{dt^2}{t^2}, \text{ designando } x_i$$

as diversas mercadorias ou bens,  $y_i$  os seus respectivos preços e  $t$  o tempo.

II — As trajectórias do «homo oeconomicus» no referido espaço são as extremas do integral  $\int \Omega ds$ , representando  $\Omega$  a ofelividade, função das variáveis:  $n$  mercadorias, seus preços e o tempo.

Julgamos tratar-se da primeira tese de doutoramento sobre Econometria apresentada na Península Ibérica, pelo que aguardamos com vivo interesse a sua publicação e felicitamos sinceramente o seu Autor.

#### Alguns cursos de Matemática em Madrid

Real Academia de Ciências Exactas, Físicas y Naturales. Cátedra de Física de la Fundación Conde de Cartagena (1945-46).

Las funciones cuasianalíticas y sus aplicaciones físicas (2.º Curso) por R. San Juan

Las series divergentes de la Mecánica celeste: investigaciones de Poincaré; su inclusión en la teoría actual de las funciones cuasianalíticas.

Las series de Cauchy y las integrales de Fresnel de la Teoría de la difracción como aplicación de las funciones cuasianalíticas.

La transformación de Laplace y sus aplicaciones. Teoremas fundamentales de Carleman.

La teoría de los momentos de Stieltjes.

Investigaciones de Riesz sobre el problema de los momentos. Aplicaciones aerodinámicas de los momentos a la ecuación integro-diferencial de Prandl del ala de envergadura finita.

Análisis Funcional — Cátedra de la Fundación Conde de Cartagena, de la Real Academia de Ciencias (1945-46) por Sixto Ríos

Introducción histórica. Teoría de Volterra: Propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue-Stieltjes. Espacios topológicos y espacios métricos. Operaciones en los espacios métricos. Espacios vectoriales. Espacios de Banach. Funcionales lineales

en los espacios (B). Extensión de las funcionales lineales: el problema de la medida. Forma general de las funcionales lineales en diversos tipos de espacios. El problema de los momentos: Operaciones lineales. Métodos de sumación de series divergentes. Operaciones totalmente continuas y asociadas. Teoría de Riesz de las ecuaciones funcionales lineales. Ecuaciones integrales de Fredholm y Volterra. Operaciones no lineales. Polinomios. Operaciones analíticas. — Diferenciación e integración.

El Prof. T. R. Bachillar explica en el Instituto Jorge Juan un curso sobre «Grupos Topológicos».

El Prof. Sixto Cámara explica en la Universidad Central un curso sobre «Matrices».

El Prof. T. R. Bachiller explicará a partir de marzo en la Universidad Central un curso sobre «La superficie de Riemann».

#### PORTUGAL

Doutoramentos na Faculdade de Ciências de Lisboa

Na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, realizaram-se em Dezembro de 1945 e em Janeiro e Fevereiro de 1946, doutoramentos em Ciências Físico-Químicas, em Ciências Geológicas e em Ciências Biológicas.

Prestaram provas para a obtenção do grau de doutor em Ciências Físico-Químicas, os assistentes de Física e Química, respectivamente, Lídia Salgueiro e Marieta da Silveira; em Ciências Geológicas o assistente de Mineralogia Rodrigo G. Boto e em Ciências Biológicas os assistentes de Botânica José Pinto Lopes e Carlos Tavares.

As provas da assistente Lídia Salgueiro realizaram-se nos dias 19 e 21 de Dezembro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «medidas de potências eléctricas, sistemas monofásicos e trifásicos» e «propagação do som nos meios limitados: ondas estacionárias e tubos sonoros», respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Mário Silva e Prof. Doutor Cyrillo Soares; no segundo dia foi discutida a tese intitulada «estudo dos derivados de vida longa do radão», pelos argüentes Prof. Doutor Cyrillo Soares e Prof. Doutor Carlos Torre de Assumpção.

As provas da assistente Marieta da Silveira realizaram-se nos dias 29 de Janeiro e 1 de Fevereiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «polarimetria» e «radicais: seu estudo e aproveitamento», respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Cyrillo Soares e Prof. Doutor Pereira Forjaz; no segundo dia foi discutida pelos mesmos argüentes, a tese intitulada: «Contribuição para o estudo das radiações do U. X. complexo».

As provas do assistente Rodrigo G. Boto, efectuaram-se nos dias 20 e 22 de Dezembro: no primeiro dia foram discutidos os pontos «Metamorfismo e Rochas metamórficas» e «Jazigos minerais do tipo sedimentar» pelos argüentes Prof. Doutor T. Custódio Moraes e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção; no segundo dia foi discutida a tese intitulada «Contribuição para os estudos de Oceanografia ao longo da costa de Portugal — fosfatos e nitratos» pelos argüentes Prof. Doutor T. Carrington da Costa e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção.

As provas do assistente José Pinto Lopes, realizaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «fotosíntese» e «auxinas»

respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor João de Vasconcelos, professor do I. S. A., e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese, intitulada: «Sobre a cariologia da Secção *Coarctatae* Berger do género *Haworthia* Duval».

As provas do assistente Carlos Neves Tavares efectuaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «Fotoperiodicidade» e «circulação na planta» respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Rui Teles Palhinha e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese intitulada: «Contribuição para o estudo das Parmeliáceas portuguesas».

## MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1945)

I. S. G. E. F. — EXAME DE APTIDÃO — 19 de Outubro de 1945

**2137** — Determine  $a$ , real, de modo que a equação  $x^2 + a(x-1) = 0$  tenha ambas as raízes maiores que um. R: Tem-se  $\Delta = a^2 + 4a \geq 0$ ,  $S = -a > 2$  e  $f(1) = 1 > 0$ , inequações que se verificam simultaneamente para  $a \leq -4$ .

**2138** — Demonstre que «a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior dum triângulo equilátero aos três lados, é igual à medida da altura». Diga qual a hipótese e tese do teorema e quais os métodos utilizados para demonstrá-lo. R: Seja  $[ABC]$  o triângulo e  $P$  um ponto interior cujos pés das perpendiculares sobre  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  são respectivamente  $R$ ,  $S$  e  $T$ . Considerando  $\overline{B'P'C'}$  paralelo a  $\overline{BC}$  tem-se  $\overline{PR} = \overline{P'R'}$  em que  $P'$  é a intersecção de  $\overline{B'C'}$  com  $\overline{AR'}$ , altura do triângulo referente a  $\overline{BC}$ . Traçando  $\overline{PA'}$  paralelo a  $\overline{AC}$  tem-se  $\overline{P'S'} = \overline{PS}$  sendo  $P''$  a intersecção de  $\overline{B'S'}$ , altura do triângulo  $[B'C'A]$ , com  $\overline{PA'}$ . Finalmente  $\overline{P'T'} = \overline{B'P''}$ , alturas do triângulo equilá-

tero  $[A'B'P]$ , logo  $\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT} = \overline{P'R'} + \overline{P'S'} + \overline{B'P''} = \overline{P'R'} + \overline{P'A} = \overline{AR'}$ , c. q. d.

**2139** — Desenvolva o produto  $(1+x)^n \cdot (1+1/x)^{n+1}$  ( $n$  inteiro e positivo) e calcule a soma dos coeficientes da parte fraccionária em  $x$  no desenvolvimento obtido. R: Tem-se sucessivamente  $(1+x)^n \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n+1} = \frac{(1+x)^{2n+1}}{x^{n+1}} = x^n + (2n+1)x^{n-1} + \dots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{x} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \frac{1}{x^{n+1}}$ . A soma dos coeficientes binomiais é  $2^{2n+1}$  e devido à sua simetria, a soma pedida é  $2^{2n}$ .

**2140** — Diga que métodos de demonstração por transformações pontuais conhece, em que consistem e quais os conceitos e propriedades em que se baseiam.

Nota — É obrigatória a resposta a três pontos entre os quais o 4.º.

Enunciados e soluções dos n.ºs 2137 a 2140 de J. Remy T. Frolro.

## MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

### ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. G. — ALGEBRA SUPERIOR — 2.º Exame de frequência — 1945.

**2141** — Classificar a quádrlica:  
 $4x^2 + y^2 - 2yz - 4zx + 4xy + 2x - y + 2z - 1 = 0$ . R: Procuremos o centro da quádrlica:

$$\begin{cases} 8x + 4y - 4z + 2 = 0 \\ 4x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ -4x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Os dois primeiros planos são paralelos entre si mas não ao terceiro. O centro é portanto um ponto impróprio e