As provas do assistente Rodrigo G. Boto, efectuaram-se nos dias 20 e 22 de Dezembro: no primeiro dia foram discutidos os pontos «Metamorfismo e Rochas metamórficas» e «Jazigos minerais do tipo sedimentar» pelos argüentes Prof. Doutor T. Custódio Morais e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção; no segundo dia foi discutida a tese intitulada «Contribuição para os estudos de Oceanografia ao longo da costa de Portugal — fosfatos e nitratos» pelos argüentes Prof. Doutor T. Carrington da Costa e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção.

As provas do assistente José Pinto Lopes, realizaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «fotosíntese» e «auxinas» respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor João de Vasconcelos, professor do I. S. A., e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese, intitulada: «Sôbre a cariologia da Secção *Coarctatae* Berger do género *Haworthia* Duval».

As provas do assistente Carlos Neves Tavares efectuaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «Fotoperiodicidade» e «circulação na planta» respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Rui Teles Palhinha e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese intitulada: «Contribuïção para o estudo das Parmeliaceas portuguesas».

# MATEMÁTICAS ELEMENTARES

## EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1945)

**I. S. C. E. F.** — Exame de Aptidão — **19 de Outubro de 1945**

**2137** — Determine $a$, real, de modo que a equação $x^2+a(x-1)=0$ tenha ambas as raízes maiores que um. R: *Tem-se* $\Delta=a^2+4a\geq 0$, $S=-a>2$ *e* $f(1)=1>0$, *inequações que se verificam simultâneamente para* $a\leq -4$.

**2138** — Demonstre que «a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior dum triângulo equilátero aos três lados, é igual à medida da altura». Diga qual a hipótese e tese do teorema e quais os métodos utilizados para demonstrá-lo. R: *Seja* $[ABC]$ *o triângulo e* P *um ponto interior cujos pés das perpendiculares sôbre* $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$ *são respectivamente* R, S e T. *Considerando* $\overline{B'P'C'}$ *paralelo a* $\overline{BC}$ *tem-se* $\overline{PR}=\overline{P'R'}$ *em que* P' *é a intersecção de* $\overline{B'C'}$ *com* $\overline{AR'}$, *altura do triângulo referente a* $\overline{BC}$. *Traçando* $\overline{PA'}$ *paralelo a* $\overline{AC}$ *tem-se* $\overline{P''S'}=\overline{PS}$ *sendo* P'' *a intersecção de* $\overline{B'S'}$, *altura do triângulo* $[B'C'A]$, *com* $\overline{PA'}$. *Finalmente* $\overline{PT}=\overline{B'P''}$, *alturas do triângulo equilátero* $[A'B'P]$, *logo* $\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT}=\overline{P'R'}+\overline{P''S'}+\overline{B'P''}=\overline{P'R'}+\overline{P'A}=\overline{AR'}$, c. q. d.

**2139** — Desenvolva o produto $(1+x)^n.(1+1/x)^{n+1}$ ($n$ inteiro e positivo) e calcule a soma dos coeficientes da parte fraccionária em $x$ no desenvolvimento obtido. R: *Tem-se sucesivamente* $(1+x)^n\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n+1}=\frac{(1+x)^{2n+1}}{x^{n+1}}=x^n+(2n+1)x^{n+1}+\cdots+\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{x}+\cdots+\binom{2n+1}{2n+1}\frac{1}{x^{n+1}}$. *A soma dos coeficientes binomiais é* $2^{2n+1}$ *e devido à sua simetria, a soma pedida é* $2^{2n}$.

**2140** — Diga que métodos de demonstração por transformações pontuais conhece, em que consistem e quais os conceitos e propriedades em que se baseiam.

*Nota* — É obrigatória a resposta a três pontos entre os quais o 4.º.

Enunciados e soluções dos n.os 2137 a 2140 de J. Remy T. Freire.

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

## ÁLGEBRA SUPERIOR

**F. C. C.** — Algebra Superior — **2.º Exame de frequência — 1945.**

**2141** — Classificar a quádrica: $4x^2+y^2-2yz-4zx+4xy+2x-y+2z-1=0$. R: *Procuremos o cento da quádrica:*

$$\begin{cases} 8x+4y-4z+2=0 \\ 4x+2y-2z-1=0 \\ -4x-2y \qquad +2=0. \end{cases}$$

*Os dois primeiros planos são paralelos entre si mas não ao terceiro. O centro é portanto um ponto impróprio e* *a quádrica um paraboloide elíptico ou hiperbólico. Interceptando-a pelo plano* $x=0$ *vem a cónica* $y-2yz-y+$ $+2z-1=0$ *que uma hipérbole. Trata-se pois de um paraboloide hiperbólico.*

**2142** — Calcular $\mathrm{P}\dfrac{\frac{2x-1}{1-x}}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-1}$. R: *Deve fazer-se:*

$$\frac{x}{1-x}=t^2 \text{ donde } x=f(t)=\frac{t^2}{1+t^2} \text{ com } f'(t)=\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

*Feita a substituição:*

$$\mathrm{P}\frac{\frac{2x-1}{1-x}}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-1}=\mathrm{P}\frac{t^2-1}{t-1}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}=\mathrm{P}\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}.$$

*Decompunhamos esta fracção, por exemplo, pelo método dos coeficientes indeterminados:*

$$\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}=\frac{Mt+N}{(1+t^2)^2}+\frac{Qt+R}{1+t^2}$$

$$2t^2+2t=Mt+N+(Qt+R)(1+t^2)$$
$$=Qt^3+Rt^2+(M+Q)t+N+R.$$

*Donde* $Q=0$, $R=2$, $M=2$, $N=-2$. *Então:*

$$\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2t-2}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{1+t^2} \quad e$$

$$\mathrm{P}\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}=\mathrm{P}\frac{2t}{(1+t^2)^2}+\mathrm{P}\frac{-2}{(1+t^2)^2}+\mathrm{P}\frac{2}{1+t^2}.$$

*E, como sabemos:*

$$\mathrm{P}2t/(1+t^2)^2=-1/(1+t^2),\ \mathrm{P}2/(1+t^2)=2\,\mathrm{arctg}\,t$$
$$\mathrm{P}2/(1+t^2)^2=\mathrm{arctg}\,t+t/(1+t^2)$$

*e portanto:*

$$\mathrm{P}\frac{2x-1}{1-x}\Big/\left[\sqrt{\frac{x}{1-x}}-1\right]=$$
$$=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\sqrt{x(1-x)}+x+C.$$

**2143** — Traçar a curva representativa da função $y=\log x+1/x$. (Coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Esta função é definida no intervalo* $(0,+\infty)$. *Quando* $x=+\infty$ *o mesmo sucede a* $y$, *não existindo contudo a correspondente assíntota porque:*

$$\lim_{x=+\infty} y/x=\lim_{x=+\infty}(\log x/x+1/x^2)=0 \ e \ \lim_{x=+\infty} y=+\infty.$$

*Procuremos ainda* $\lim\limits_{x=+0} y$. *Como* $\lim\limits_{x=+0} x\log x=$ $=\lim\limits_{x=+0}\log x/(1/x)=\lim\limits_{x=+0}(1/x)/(-1/x^2)=\lim\limits_{x=+0}(-x)=-0$ *vem* $\lim\limits_{x=+0}(\log x+1/x)=\lim\limits_{x=+0}\dfrac{x\log x+1}{x}=+\infty$. *A recta* $x=0$ *é por isso a única assíntota da curva.*

$y'=1/x-1/x^2=(x-1)/x^2$, *expressão que só muda de sinal para* $x=1$, *passando aí de negativa a positiva. A função tem pois apenas um extremo local (um mínimo) no ponto* $(1,1)$. $y''=-1/x^2+2/x^3=(2-x)/x^2$, *expressão que só muda de sinal (no campo de existência de* $y$) *para* $x=2$, *passando de positiva a negativa. Há pois um único ponto de inflexão em que a concavidade da curva, crescendo* $x$, *se volta da parte positiva para a negativa do eixo das ordenadas. Nesse ponto* $x=2$, $y=\log 2+1/2=1{,}193\cdots$; $y'=1/4$, $\mathrm{arctg}\,y'=14°02',\cdots$ *Com êstes elementos podemos traçar a curva.*

**2144** — Calcular $\mathrm{P}|x|$. R: *Para* $x\gtrless 0$, $|x|=x$, $\mathrm{P}x=x^2/2+C$. *Para* $x\lesseqgtr 0$, $|x|=-x$, $\mathrm{P}(-x)=$ $=-x^2/2+C'$. *Como* $|x|$ *é finita, a sua primitiva, por admitir derivada finita, será contínua. Temos pois de relacionar as constantes* $C$ *e* $C'$ *por forma que as funções* $F(x)$ *definidas por* $F(x)=x^2/2+C$ *para* $x\gtrless 0$ *e* $F(x)=-x^2/2+C'$ *para* $x\lesseqgtr 0$, *contínuas para* $x\neq 0$, *sejam também contínuas para* $x=0$. *Evidentemente que terá de ser, para isso* $C'=C$ *e* $F(x)=x^2/2+C$ *para* $x\gtrless 0$ $F(x)=-x^2/2+C$ *para* $x\lesseqgtr 0$ *o que ainda se pode escrever mais simplesmente* $F(x)=x\cdot|x|/2+C$ *que é a primitiva pedida.*

Soluções dos números 2141 a 2144 de Renato Pereira Coelho.

**F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência, 4-III-1944 — 2.º ponto da 2.ª chamada.**

I

**2145** — Achar o produto de todos os valores de $\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0)$. R: *Pondo* $z=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, *temos* $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(0\lesseqgtr k<n)$ *e*

$$z_0\cdot z_1\cdot z_2\cdots z_{n-1}=$$
$$=\rho\left[\cos\frac{\alpha+(\alpha+2\pi)+(\alpha+2\cdot2\pi)+\cdots+[\alpha+(n-1)2\pi]}{n}+\right.$$
$$\left.+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+(\alpha+2\pi)+(\alpha+2\cdot2\pi)+\cdots+[\alpha+(n-1)\pi]}{n}\right]=$$
$$=\rho\{\cos[\alpha+(n-1)\pi]+i\,\mathrm{sen}\,[\alpha+(n-1)\pi]\}^n=$$
$$=(-1)^{n-1}\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)=(-1)^{n-1}z.$$

**2146** — Conduzir pela origem uma recta que se apoie na recta $\begin{cases}x=z+1\\y=z-1\end{cases}$ e seja paralela ao plano $2x+3y+z=1$. R: *A recta pedida será a intersecção do plano* $\pi\equiv x+y-2z=0$ *definido pela origem e a recta dada com o plano* $\pi'\equiv 2x+3y+z=0$ *conduzido pela origem paralelamente ao plano* $2x+3y+z=1$. *Das equações de* $\pi$ *e* $\pi'$ *se deduzem as equações reduzidas da recta:* $x=7z$ *e* $y=-5z$.

**2147** — Pode reduzir-se

$$f(x,y,z,u)=2y^2+z^2-2xy+2ux-2yu$$

à expressão $\varphi(x',y',z')=x'^2-y'^2-z'$ por uma transformação real? ou por uma transformação geral? Justificar a resposta. R: *Por ser*

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \ \textit{e} \ \Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$f(x, y, z, u)$ *é uma quádrica degenerescente de característica* $3$. *Completando a cadeia de menores principais* $\Delta_3=-1$; $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$; $\Delta_1=1$ *com a unidade, reconhece-se que a quádrica se resolve numa soma de dois quadrados positivos e um negativo e portanto só pode reduzir-se a* $\varphi(x', y', z')$ *por uma transformação geral e não por uma transformação real.*

II

**2148** — Sejam $A$ e $B$ dois números reais, o primeiro dos quais irracional. Supondo que a partir de certa ordem os desenvolvimentos decimais dêstes números coïncidem, de que natureza são as expressões $A+B$ e $A-B$? R: $A+B$ *irracional*; $A-B$ *racional.*

**2149** — Quando $|z_1+z_2+\cdots|=|z_1|+|z_2|+\cdots$ como se dispõem no plano as imagens de $z_1, z_2, z_3, \cdots$? R: *Encontram-se sôbre uma mesma semi-recta de origem na intersecção dos eixos coordenados.*

**2150** — Donde se deduz o número de termos de um determinante? R: *Do número de permutações sôbre* n *objectos.*

**2151** — Como se determinam os coeficientes $\lambda$ da relação que liga os elementos de uma mesma linha em determinante nulo? R: *Pelo teorema de Laplace,* $\sum_{k=1}^{n} a_i^k A_j^k = \begin{cases} \Delta \ \textit{se} \ j=i \\ 0 \ \textit{se} \ j\neq i. \end{cases}$ *Mas como* $\Delta=0$, *será sempre* $\lambda_1 a_i^1+\lambda_2 a_i^2+\cdots+\lambda_n a_i^n=0$ *com* $\lambda_k=A_j^k$ (k *e* i *variáveis*; j *fixo*).

**2152** — Seja $\chi$ o menor principal $A_n^n$ do determinante $\Delta$. Que valor tem $\Delta$ quando se anulam todos os menores de 1.ª classe de $\chi$? Porquê? R: *Pela fórmula de redução de Cauchy,* $\Delta=a_n^n\chi-\sum\chi_i^k a_i^n a_n^k$, *se conclui que* $\Delta$ *é nulo por ser* $\chi_i^k=0$ $(i, k=1, 2, \cdots, n-1)$ *e conseqüentemente* $\chi=0$.

**2153** — Em que consiste a inversão de uma matriz? Justifique a regra da inversão do produto. R: *Inverter uma matriz é obter uma outra que multiplicada pela primeira dê a matriz unidade, para o que basta dividir todos os elementos da matriz adjunta pelo determinante da matriz. A matriz inversa do produto é o produto das matrizes inversas dos factores mas com a ordem invertida, porque a mesma regra se verifica na determinação da matriz adjunta do produto.*

**2154** — Qual a característica de uma matriz adjunta? Justifique a resposta. R: *É a característica da primitiva matriz porque um determinante e o seu adjunto só simultâneamente se anulam.*

**2155** — Forme o produto das transformações $y_i=\beta_i^h x_h$ e $x_i=\alpha_i^h u_h$ e relacione a respectiva matriz com as matrizes dos factores. R: *Tomando (para evitar ambigüidade) o índice mudo* k *em vez de* h *na segunda transformação, temos* $y_i=\beta_i^h x_h=\beta_i^h\alpha_h^k u_k=\delta_i^k u_k$ *com* $\delta_i^k=\beta_i^k\alpha_n^k$ *(a matriz da transformação produto é igual ao produto das matrizes das trasformações factores).*

**2156** — Utilizando apenas planos e eixos coordenados (gerais) dê exemplo de uma recta e de um plano de equações $x/A=y/B=z/C$ e $Ax+By+Cz=0$ que não sejam necessàriamente ortogonais. R: *Considerando para triedro de referência um triedro qualquer, o plano* XOY *e o eixo dos* zz *(por exemplo) estão nas condições do problema* $(A=B=0)$.

**2157** — Conhecidas as fórmulas de passagem de um sistema cartesiano rectangular a outro sistema análogo, como pode saber-se se um dos triedros só difere do outro pela sua posição no espaço? R: *Os dois triedros têm a mesma disposição ou disposições opostas conforme fôr igual a* $+1$ *ou* $-1$ *o determinante da transformação ortogonal* $x'=ax+a'y+a''z$, $y'=bx+b'y+b''z$, $z'=cx+c'y+c''z$, *onde* $a, a', a''$; $b, b', b''$, $c, c', c''$, *são os cosenos directores de* $OX'$, $OY'$ *e* $OZ'$ *respectivamente.*

Soluções dos n.os 2145 a 2157 de F. Roldão Dias Agudo (aluno da F. C. L.).

## CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

**F. C. P.** — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de frequência, 1945.**

**2158** — Máximos e mínimos de $y=\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$.

R.: *Temos* $y'=\dfrac{-x(x+4)}{(x-2)^2(x+1)^2}=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ $\begin{cases} x=0 & y'=0 \\ x=4 & y'=0 \\ x=2 & y'=\infty \\ x=1 & y'=\infty \end{cases}$

$\varphi'(x)=-2x-4$

$\varphi'(0)<0$, $\psi(0)>0$ logo $y''<0$ *e temos um máximo*; $\varphi'(-4)>0$, $\psi(-4)>0$ logo $y'>0$ *e temos um mínimo.*

*Para* $x=2$ *vem* $y'(2-h)<0$, $y'(2+h)<0$ *e a função é decrescente. Para* $x=-1$ *vem* $y'(-1-h)>0$, $y'(-1+h)>0$ *e a função é crescente.*

**2159** — Mudança de variáveis independentes na equação $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ sendo $\begin{cases}u=e^x\\ v=e^{y-x}.\end{cases}$ R: $u\frac{\partial^2 z}{\partial^2 u}-2v\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}=0$.

**2160** — Calcule $\int \text{arc sen}\sqrt{2x}\,dx$.

Vem: $I=x\,\text{arc sen}\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int x^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}dx=$
$=x\,\text{arc sen}\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int(x^{-1}-2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

Fazendo $x^{-1}-2=t^2$ temos $\int(x^{-1}-2)^{-\frac{1}{2}}dx=$
$$=-\int\frac{2dt}{(t^2+2)^2}=-\frac{t}{2(t^2+2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Logo $I=x\,\text{arc sen}\sqrt{2x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x-2x^2}+$
$$+\frac{1}{4}\text{arc tg}\sqrt{\frac{1-2x}{2x}}.$$

**2161** — $\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. R: $I=\int_0^\infty\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}=$
$$=[\text{arc tg}\,e^x]_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

**2162** — Verdadeiro valor de $y=\sqrt{x^2-3x+1}-x$ para $x=\infty$.

R: $y=\frac{(\sqrt{x^2-3x+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}=\frac{-3+1/x}{\sqrt{1-3/x+1/x^2}+1}\to-\frac{3}{2}$.

**2163** — Dado $x^{2y}+y=2$, calcule $y''$ em $(1,1)$. R: $y''=6$.

Soluções dos n.os 2158 a 2163 de Jayme Rios de Souza.

**I. S. T.** — Cálculo Infinitesimal — **1.º exame de frequência de 1944-45.**

**2164** — Calcular $I=\int_{-3}^{+2}\frac{x^2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3+2x^2-5x-6}}dx$.

R: $I=\int_{-3}^{+2}\frac{x^2\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x+3)}}=\int_{-3}^{+2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$.

*O integral proposto é convergente. Efectuando a mudança de variável* $\sqrt{(x-2)(x+1)}=(x+1)\,t$ *vem*
$$\int_{-3}^{2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}=\int_{\sqrt{\;/2}}^{0}\frac{(2+t^2)^2}{(1-t^2)^3}dt=$$
$$=2\left[\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(1-t^2)^2}+E\log(1-t)+\right.$$
$$\left.+F\log(1+t)\right|_{\sqrt{5/2}}^{0}$$ *sendo* A, B, $\cdots$ F *constantes a determinar pelo método dos coeficientes indeterminados.*

**2165** — Fazer no integral $I=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *a mudança de variável* $x=y/\sqrt{2-y^2}$. R: $dx=2(2-y^2)^{-3/2}dy$
$$I=2\int_0^y\frac{dy}{(2-y^2)^{3/2}\left[1-\frac{y^4}{(2-y^2)^2}\right]^{1/2}}=$$
$$=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(2-y^2)(1-y^2)}}.$$

**2166** — $f(x)=\text{sen}(1-x)-\log(2-x)$ é infinitésimo com $1-x$. De que ordem? R: *Façamos* $1-x=y$, *e procuremos* n *tal que* $\lim_{y=0}\frac{\text{sen}\,y-\log(1+y)}{y^n}$ *seja finito e não nulo. Para* $n=2$, *vem, aplicando a regra L'Hôpital duas vezes:*
$$\lim_{y=0}\frac{\text{sen}\,y-\log(1+y)}{y^2}=\lim_{y=0}\frac{\cos y-(1+y)^{-1}}{2y}=$$
$$=\lim_{y=0}\frac{-\text{sen}\,y+(1+y)^{-2}}{2}=\frac{1}{2}.$$ *Logo* f(x) *é infinitésimo de 2.ª ordem com* (1−x).

**2167** — Estudar a convergência do integral:
$$\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\left[\frac{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}\right]^{\cos 2\alpha}d\theta.$$ R: *A função integranda torna-se infinita em* $\pi/4$. *Ora:* $\frac{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}=$
$$=-\text{cotg}(\theta-\pi/4)=-\frac{1}{\text{tg}(\theta-\pi/4)}.$$ *Aplicando o critério de Bertrand, vem para* $n=\cos 2\alpha$:
$$\lim_{\theta=\pi/4}\frac{(\theta-\pi/4)^n}{[-\text{tg}(\theta-\pi/4)]^{\cos 2\alpha}}=\lim_{\theta=\pi/4}\left[-\frac{(\theta-\pi/4)}{\text{tg}(\theta-\pi/4)}\right]^{\cos 2\alpha}=$$
$$=(-1)^{\cos 2\alpha}\neq 0,\infty.$$

*O integral é convergente para* $\cos 2\alpha<1$ *e divergente para* $\cos 2\alpha=1$.

Soluções dos n.os 2164 a 2167 de Olívio de Sousa Bento.

**F. C. L.** — Analise Superior — **Exame final — Outubro de 1945.**

**2168** — *a)* Estabeleça a equação às derivadas parciais da qual é um integral completo a dupla infinidade de esferas de centros em $XOY$ e tangentes a $OY$.

*b)* Verifique que a equação obtida exprime certa relação entre os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NQ}$, onde por $M$ se designa um ponto genérico de uma superfície integral qualquer, $N$ o traço da respectiva normal em

*XOY* e *Q* a projecção ortogonal de *N* sôbre *OY* (eixos rectangulares). Indique tal relação.

*c)* Superfícies integrais contendo o círculo $x^2+y^2=2x$ do plano *XOY*.

*d)* Verifique que as características de qualquer superfície integral constituem um sistema de linhas de curvatura. R: a) *Equação finita da família de esferas:* $z^2+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2 \to x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y+\beta^2=0$. *Donde, por derivação parcial:* $x-\alpha+pz=y-\beta+qz=0$. *Eliminando* $\alpha$ *e* $\beta$ *entre as 3 equações, acha-se* $p^2z^2+q^2z^2+z^2=(x+pz)^2$.

b) *Equações da normal em* $M(x,y,z)$:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$$

*coordenadas de* N: $(x+pz,y+qz,0)$; *segmento* $\overline{MN}$: $\sqrt{p^2z^2+q^2z^2+z^2}$; *coordenadas de* Q: $(0,y+qz,0)$; *segmento* $\overline{NQ}$: $\sqrt{(x+pz)^2}$. *A equação obtida traduz, pois, que:* $\overline{MN}=\overline{NQ}$.

c) *Com* $z=x^2+y^2-2x=0$ *é* $2x-2\alpha x-2\beta\sqrt{2x-x^2}+\beta^2=0$ *que se pode pôr na forma*

$$4x^2(1-\alpha)^2+4x\beta^2(1-\alpha)+\beta^4=4\beta^2(2x-x^2)$$

*e que, obrigada a ter raízes iguais em* x, *dá:* $\beta(4\alpha-\beta^2)=0$ *donde se deduz:* $\beta=0$ *ou* $\alpha=\beta^2/4$. *Se* $\beta=0 \to x^2+y^2+z^2-2\alpha x=0$, *infinidade simples de integrais particulares, da qual faz parte* $x^2+y^2+z^2-2x=0$ $(\alpha=1)$ *que passa pelo círculo dado. Se* $\alpha=\beta^2/4 \to x^2+y^2+z^2-(x/2-1)\beta^2-2\beta y=0$, *infinidade simples de integrais particulares cujas secções, pelo plano* $z=0$, *são curvas tangentes ao círculo dado. A envolvente de tal família com um parâmetro representa uma outra superfície que também satisfaz ao problema de Cauchy proposto; derivando em ordem a* $\beta$ *e eliminando* $\beta$ *acha-se* $x(x^2+y^2+z^2)=2(x^2+z^2)$.

d) *O sistema de Charpit-Lagrange para a equação às derivadas parciais obtidas em a) admite os integrais* $x+pz=c_1$ $y+qz=c_2$ *(de facto,* $dx+pdz+zdp=0$ *e* $dy+qdz+zdq=0$ *são combinações que dêle se deduzem).*

*As características das sup. integrais verificam, assim, a equação* $dp\,d(y+qz)=dq\,d(x+pz)$ *das* linhas de curvatura.

**2169** — Calcule $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$, transformando-o, prèviamente em $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ mediante uma relação $x=F(\theta)$ convenientemente escolhida e recorrendo, seguidamente, à teoria dos resíduos. R: *Com* $x=\operatorname{tg}\theta \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ *e pelo teorema dos resíduos, usando o contôrno* $x^2+y^2=\infty$, $y\geq 0$, *acha-se logo*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}.$$

**Enunciados e soluções dos n.os 2168 e 2169 de Humberto S. Menezes.**

**F. C. P.** — Análise Superior — **2.º exercício de repetição — 1 de Março de 1945.**

**2170** — Determinar uma função analítica da variável $z$: $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ para a qual são satisfeitas as condições:

*a)* $f(1)=1$; *b)* $\varphi+\psi=x+y+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Determinar, em seguida, o valor da sua derivada no ponto $1+i$. R: *Atendendo às condições de Cauchy-Riemann obtem-se por derivação de* b):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1+\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

*Então, a integração de*

$$d\varphi=\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx+\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$

*dá* $\varphi=x+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c_1$. *Logo* $\psi=y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-c_1$.

*Portanto* $f(z)=[x+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c_1]+i\,[y+\operatorname{artg}\frac{y}{x}-c_1]$.

*A condição* a) *determina* $c_1=0$. *Pode então escrever-se*: $f(z)=z+\log z$. *O valor da derivada no ponto* $1+i$ *é* $3/2-i/2$.

**2171** — Desenvolver em série segundo as potências de $z$ (desenvolvimentos de Taylor ou Laurent) a função $\frac{z+1}{z^2-4z+3}$. R: *Ponhamos* $F=\frac{z+1}{z^2-4z+3}=$ $=\frac{2}{z-3}+\frac{-1}{z-1}=2A-B$. *No interior de um círculo de centro na origem e de raio* $3$ $(C_3)$ *pode escrever-se:*

$$(1)\qquad 2A=\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-z/3}=$$
$$=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\cdots+\frac{z^n}{3^n}+\cdots\right).$$

*No exterior de* $C_3$, *será:*

$$(2)\qquad 2A=\frac{2}{z-3}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-3/z}=\frac{2}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{2}{z}+\frac{2\cdot 3}{z^2}+\cdots+\frac{2\cdot 3^n}{z^{n+1}}+\cdots$$

*No interior de um círculo centrado na origem e de raio* $1$ $(C_1)$, *será*:

$$(1')\quad -B=-\frac{1}{z-1}=+\frac{1}{1-z}=+(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots).$$

*No exterior de* $C_1$,

$$(2')\qquad -B=\frac{-1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=$$
$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots\right).$$

*Poderemos, portanto, escrever simbòlicamente:*

*No interior de* $C_1$ $F=(1)+(1')$

*Na coroa circular* $F=(2')+(1)$

*No exterior de* $C_3$ $F=(1')+(2')$.

**2172** — Calcular, por meio da teoria dos resíduos, o integral definido: $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$.

*Indicação:* Integrar $e^{-z^2}$ ao longo do contôrno fechado definido pelo eixo $ox$, a bissectriz do 1.º quadrante e um arco $\widehat{AB}$ de circunferência de centro $O$ e raio $R$. R: *Seja* $\Gamma$ *o contôrno fechado* OAB, *a que se refere o enunciado:*

$\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz=0$, *pelo teorema de Cauchy. Mas:*

$$\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz=\int_0^R e^{-x^2}\,dx+\int_{AB} e^{-z^2}\,dz+\int_{BO} e^{-x^2(1+i)^2}(1+i)\,dx\,.$$

*Quando* $R\to\infty$, *é fácil ver-se que:* $\int_{AB} e^{-z^2}\to 0$.

*Ficará então:* $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx-(1+i)\int_0^\infty e^{-2ix^2}\,dx=0$

*ou:* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}=(1+i)\int_0^\infty[\cos(2x^2)-i\,\mathrm{sen}\,(2x^2)]\,dx$;

*donde:* 
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\left[\int_0^\infty\cos(2x^2)\,dx+\int_0^\infty\mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx\right]+$$
$$+i\left[\int_0^\infty\cos(2x^2)\,dx-\int_0^\infty\mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx\right].$$

*Logo:* $\int_0^\infty\cos(2x^2)\,dx+\int_0^\infty\mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_0^\infty\cos(2x^2)\,dx-\int_0^\infty\mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx=0\,.$$

*Portanto:* $\int_0^\infty\cos(2x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$;

*donde resulta:* $\int_0^\infty\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Soluções dos n.os 2170 a 2172 de Laureano Barros.

# GEOMETRIA PROJECTIVA

**F. C. L. — Geometria Projectiva — Exame Final, Julho de 1945** — Ponto n.º 2.

**2173** — Estabeleça uma projectividade entre 2 feixes não sobrepostos, geradora duma parábola com uma dada direcção assintótica, e construa um par de raios, homólogos nessa projectividade, cortando-se sôbre uma recta dada $r$ que não tenha direcção do ponto impróprio da cónica. Número de soluções do problema (para a cónica individualizada). Se se impuzesse a $r$ a condição oposta da acima referida, que teria, de particular, a conclusão a que chegou na análise do número de soluções? Determine, para o caso considerado, o diâmetro conjugado com a direcção de $r$. Pode esta questão pôr-se na hipótese oposta relativa à direcção de $r$?

**2174** — Construa (por aplicação do teorema de Pascal a uma circunfrência), 2 triângulos homológicos $[A\ B\ C]$ e $[A'\ B'\ C']$, e determine o género da cónica que, na homologia definida, corresponde à circunfecircunscrita a $[A\ B\ C]$. Caso se trate duma parábola, determine a direcção do seu eixo e, caso se trate duma hipérbole, determine as suas assíntotas.

**2175** — Duma hipérbole, conhece-se: o eixo focal (real) — 6 cm — e a direcção dum dos pontos impróprios. Determine: *a*) as assíntotas; *b*) o diâmetro conjugado com uma dada direcção $r$ (escolhida esta por forma tal que o diâmetro da sua direcção intersecte a cónica em pontos reais); *c*) uma tangente paralela a uma recta dada $d$ (escolhida esta por forma que o problema tenha 2 soluções (reais, distintas).

# MECÂNICA RACIONAL

**I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame, 1944.**

**2176** — Os extremos $A$ e $B$ duma haste pesada homogénea escorregam sem atrito, sôbre dois eixos rectangulares $Ox$ e $Oy$.

$Ox$ é vertical e fixo.

$Oy$ está animado duma rotação de velocidade angular constante $w$, em tôrno de $Ox$.

Estudar o equilíbrio relativo da haste $AB$.

**2177** — Determinar o centro de gravidade do volume limitado pelos três planos coordenados, supostos rectangulares, e pelas superfícies dos cilindros

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\qquad\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

no oitante positivo dos eixos.

**2178** — Um ponto material cai para um centro fixo que o atrai na razão inversa do cubo da distância. Conhecida a distância inicial, qual é a duração da queda?

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **Exame final, 1946.**

**2179** — Achar as extremais do integral

$$I=\int_{x_0}^{x_1} x^n y'^2\,dx\,,$$

e mostrar que se fôr $n \geq 1$, não há nenhuma extremal que passe por dois pontos situados de lados opostos do eixo dos $yy$.

**2180** — Achar o momento de inércia do sólido homogéneo limitado pelas duas superfícies cilíndricas

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{e} \quad x^2+y^2=b^2 \; (a>b)$$

e pelos dois planos

$$z=h \quad \text{e} \quad z=-h\,,$$

1.º. Em relação ao eixo dos $zz$;

2.º. Em relação ao eixo dos $xx$.

**2181** — Um cilindro de revolução homogéneo e simplesmente pesado oscila em torno duma tangente (suposta horizontal) a uma das suas bases. Achar o comprimento do pendulo simples síncrono.

# PROBLEMAS

*As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.*

*Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.*

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**2182** — Do estudo das séries $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen} n\theta$ deduzir o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}z^n$ sôbre a circunferência de convergência.

**2183** — Sabendo que $\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{sen} x\,dx=\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ (V., p. ex., o livro de exercícios de Cálculo Infinitesimal de Todhunter), calcule:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n}\right]^{\pi/2n},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x}$$ e verifique as igualdades:

$$\int_0^{\pi/2a}\log\operatorname{sen} ax\,dx=\frac{\pi}{2a}\log\frac{1}{2}$$

e

$$\int_0^{\pi/2a} x\operatorname{cotg} ax\,dx=\frac{\pi}{2a^2}\log 2\,.$$

---

**2184** — *a)* Determinar um pentágono $[A'B'C'D'E']$ semelhante a um pentágono convexo dado $[\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}]$ sabendo que é projecção ortogonal de um pentágono regular de 3 cm de lado. *b)* Analisar o caso particular de ser $\overline{AB}=\overline{AE}$ (por exemplo), distinguindo ainda duas hipóteses diferentes consoante o valor do ângulo $\overline{A}$. Estabelecer prèviamente as condições de possibilidade do problema.

---

**2185** — Seja $1$ o conjunto de todos os números inteiros. Definamos em $1$ um espaço $(V)$, associando a cada elemento (ponto) de $1$ as duas vizinhanças seguintes: $V_n^1=\{n\,,n+1\}$, $V_n^2=\{n-1\,,n\}$.

*a)* Mostre que as vizinhanças adoptadas são conjuntos abertos.

*b)* Demonstre que é condição necessária e suficiente para que $n$ seja um ponto de acumulação do conjunto $A\subset 1$ que $n-1$ e $n+1$ pertençam a $A$.

*c)* Verifique, através dum exemplo, que, neste espaço, o derivado dum conjunto pode não ser um conjunto fechado.

*d)* Demonstre que é condição necessária e suficiente para que o derivado de um conjunto $A\subset 1$ seja fechado que os elementos de $A$ sejam inteiros consecutivos.

**2186** — Seja $1$ um conjunto fundamental e $F$ um seu subconjunto. Definamos em $1$ uma operação de