

As provas do assistente Rodrigo G. Boto, efectuaram-se nos dias 20 e 22 de Dezembro: no primeiro dia foram discutidos os pontos «Metamorfismo e Rochas metamórficas» e «Jazigos minerais do tipo sedimentar» pelos argüentes Prof. Doutor T. Custódio Moraes e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção; no segundo dia foi discutida a tese intitulada «Contribuição para os estudos de Oceanografia ao longo da costa de Portugal — fosfatos e nitratos» pelos argüentes Prof. Doutor T. Carrington da Costa e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção.

As provas do assistente José Pinto Lopes, realizaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «fotosíntese» e «auxinas»

respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor João de Vasconcelos, professor do I. S. A., e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese, intitulada: «Sobre a cariologia da Secção *Coarctatae* Berger do género *Haworthia* Duval».

As provas do assistente Carlos Neves Tavares efectuaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «Fotoperiodicidade» e «circulação na planta» respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Rui Teles Palhinha e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese intitulada: «Contribuição para o estudo das Parmeliáceas portuguesas».

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1945)

I. S. G. E. F. — EXAME DE APTIDÃO — 19 de Outubro de 1945

2137 — Determine a , real, de modo que a equação $x^2 + a(x-1) = 0$ tenha ambas as raízes maiores que um. R: Tem-se $\Delta = a^2 + 4a \geq 0$, $S = -a > 2$ e $f(1) = 1 > 0$, inequações que se verificam simultaneamente para $a \leq -4$.

2138 — Demonstre que «a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior dum triângulo equilátero aos três lados, é igual à medida da altura». Diga qual a hipótese e tese do teorema e quais os métodos utilizados para demonstrá-lo. R: Seja $[ABC]$ o triângulo e P um ponto interior cujos pés das perpendiculares sobre \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} são respectivamente R , S e T . Considerando $\overline{B'P'C'}$ paralelo a \overline{BC} tem-se $\overline{PR} = \overline{P'R'}$ em que P' é a intersecção de $\overline{B'C'}$ com $\overline{AR'}$, altura do triângulo referente a \overline{BC} . Traçando $\overline{PA'}$ paralelo a \overline{AC} tem-se $\overline{P'S'} = \overline{PS}$ sendo P'' a intersecção de $\overline{B'S'}$, altura do triângulo $[B'C'A]$, com $\overline{PA'}$. Finalmente $\overline{P'T} = \overline{B'P''}$, alturas do triângulo equilá-

tero $[A'B'P]$, logo $\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT} = \overline{P'R'} + \overline{P'S'} + \overline{B'P''} = \overline{P'R'} + \overline{P'A} = \overline{AR'}$, c. q. d.

2139 — Desenvolva o produto $(1+x)^n \cdot (1+1/x)^{n+1}$ (n inteiro e positivo) e calcule a soma dos coeficientes da parte fraccionária em x no desenvolvimento obtido. R: Tem-se sucessivamente $(1+x)^n \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n+1} = \frac{(1+x)^{2n+1}}{x^{n+1}} = x^n + (2n+1)x^{n-1} + \dots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{x} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \frac{1}{x^{n+1}}$. A soma dos coeficientes binomiais é 2^{2n+1} e devido à sua simetria, a soma pedida é 2^{2n} .

2140 — Diga que métodos de demonstração por transformações pontuais conhece, em que consistem e quais os conceitos e propriedades em que se baseiam.

Nota — É obrigatória a resposta a três pontos entre os quais o 4.º.

Enunciados e soluções dos n.ºs 2137 a 2140 de J. Remy T. Frolro.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. G. — ALGEBRA SUPERIOR — 2.º Exame de frequência — 1945.

2141 — Classificar a quádrlica:
 $4x^2 + y^2 - 2yz - 4zx + 4xy + 2x - y + 2z - 1 = 0$. R: Procuremos o centro da quádrlica:

$$\begin{cases} 8x + 4y - 4z + 2 = 0 \\ 4x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ -4x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Os dois primeiros planos são paralelos entre si mas não ao terceiro. O centro é portanto um ponto impróprio e

a quádriga um parabolóide elíptico ou hiperbólico. Interceptando-a pelo plano $x=0$ vem a cónica $y-2yz-y+2z-1=0$ que é uma hipérbole. Trata-se pois de um parabolóide hiperbólico.

$$2142 - \text{Calcular } P \frac{2x-1}{1-x} \cdot R: \text{ Deve fazer-se:}$$

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 1$$

$$\frac{x}{1-x} = t^2 \text{ donde } x=f(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ com } f'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

Feita a substituição:

$$P \frac{2x-1}{1-x} = P \frac{t^2-1}{t-1} \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2} = P \frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}$$

Decompunhamos esta fracção, por exemplo, pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2} = \frac{Mt+N}{1+t^2} + \frac{Qt+R}{(1+t^2)^2}$$

$$2t^2+2t = Mt+N + (Qt+R)(1+t^2) \\ = Qt^2 + Rt^2 + (M+Q)t + N + R$$

Donde $Q=0$, $R=2$, $M=2$, $N=-2$. Então:

$$\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t-2}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{1+t^2}$$

$$P \frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2} = P \frac{2t}{(1+t^2)^2} + P \frac{-2}{(1+t^2)^2} + P \frac{2}{1+t^2}$$

E, como sabemos:

$$P \frac{2t}{(1+t^2)^2} = -1/(1+t^2), \quad P \frac{-2}{(1+t^2)^2} = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$P \frac{2}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + t/(1+t^2)$$

e portanto:

$$P \frac{2x-1}{1-x} / \left[\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 1 \right] = \\ = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} - \sqrt{x(1-x)} + x + C$$

2143 — Traçar a curva representativa da função $y = \log x + 1/x$. (Coordenadas cartesianas rectangulares). R: Esta função é definida no intervalo $(0, +\infty)$. Quando $x \rightarrow +\infty$ o mesmo sucede a y , não existindo contudo a correspondente assintota por que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x/x + 1/x^2) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

Procuremos ainda $\lim_{x \rightarrow 0} y$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = -\lim_{x \rightarrow 0} \log x/(1/x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1/x)/(-1/x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = -0$

vem $\lim_{x \rightarrow 0} (\log x + 1/x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log x + 1}{x} = +\infty$. A recta $x=0$ é por isso a única assintota da curva.

$y' = 1/x - 1/x^2 = (x-1)/x^2$, expressão que só muda de sinal para $x=1$, passando aí de negativa a positiva.

A função tem pois apenas um extremo local (um mínimo) no ponto $(1, 1)$. $y'' = -1/x^2 + 2/x^3 = (2-x)/x^2$, expressão que só muda de sinal (no campo de existência de y) para $x=2$, passando de positiva a negativa. Há pois um único ponto de inflexão em que a concavidade da curva, crescendo x , se volta da parte positiva para a negativa do eixo das ordenadas. Nesse ponto $x=2$, $y = \log 2 + 1/2 = 1,193 \dots$; $y' = 1/4$, $\operatorname{arctg} y' = 14^\circ 02'$, ... Com estes elementos podemos traçar a curva.

2144 — Calcular $P|x|$. R: Para $x \geq 0$, $|x| = x$, $P x = x^2/2 + C$. Para $x < 0$, $|x| = -x$, $P(-x) = -x/2 + C'$. Como $|x|$ é finita, a sua primitiva, por admitir derivada finita, será contínua. Temos pois de relacionar as constantes C e C' por forma que as funções $F(x)$ definidas por $F(x) = x^2/2 + C$ para $x \geq 0$ e $F(x) = -x/2 + C'$ para $x < 0$, continuas para $x \neq 0$, sejam também continuas para $x=0$. Evidentemente que terá de ser, para isso $C' = C$ e $F(x) = x^2/2 + C$ para $x \geq 0$ e $F(x) = -x/2 + C$ para $x < 0$ o que ainda se pode escrever mais simplesmente $F(x) = x \cdot |x|/2 + C$ que é a primitiva pedida.

Soluções dos números 2141 a 2144 de Renato Pereira Coelho.

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — 1.º exame de frequência, 4-III-1944 — 2.º ponto da 2.ª chamada.

I

2145 — Achar o produto de todos os valores de $\sqrt[n]{z}$ ($z \neq 0$). R: Pondo $z = \rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, temos $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$ ($0 \leq k < n$) e $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdots z_{n-1} =$

$$= \rho \left[\cos \frac{\alpha + (\alpha + 2\pi) + (\alpha + 2 \cdot 2\pi) + \cdots + [\alpha + (n-1) 2\pi]}{n} + \right. \\ \left. + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + (\alpha + 2\pi) + (\alpha + 2 \cdot 2\pi) + \cdots + [\alpha + (n-1) \pi]}{n} \right] = \\ = \rho \left| \cos \frac{\alpha + (n-1) \pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + (n-1) \pi}{n} \right|^n = \\ = (-1)^{n-1} \rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = (-1)^{n-1} z$$

2146 — Conduzir pela origem uma recta que se apoie na recta $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e seja paralela ao plano

$2x + 3y + z = 1$. R: A recta pedida será a intersecção do plano $\pi \equiv x + y - 2z = 0$ definido pela origem e a recta dada com o plano $\pi' \equiv 2x + 3y + z = 0$ conduzido pela origem paralelamente ao plano $2x + 3y + z = 1$. Das equações de π e π' se deduzem as equações reduzidas da recta: $x = 7z$ e $y = -5z$.

2147 — Pode reduzir-se

$f(x, y, z, u) = 2y^2 + z^2 - 2xy + 2ux - 2yu$ à expressão $\varphi(x', y', z') = x'^2 - y'^2 - z'^2$ por uma trans-

formação real? ou por uma transformação geral? Justificar a resposta. R: *Por ser*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$f(x, y, z, u)$ é uma quádrlica degenerescente de característica 3. Completando a cadeia de menores principais $\Delta_3 = -1$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\Delta_1 = 1$ com a unidade, reconhece-se que a quádrlica se resolve numa soma de dois quadrados positivos e um negativo e portanto só pode reduzir-se a $\varphi(x', y', z')$ por uma transformação geral e não por uma transformação real.

II

2148 — Sejam A e B dois números reais, o primeiro dos quais irracional. Supondo que a partir de certa ordem os desenvolvimentos decimais destes números coincidem, de que natureza são as expressões $A+B$ e $A-B$? R: $A+B$ irracional; $A-B$ racional.

2149 — Quando $|z_1 + z_2 + \dots| = |z_1| + |z_2| + \dots$ como se dispõem no plano as imagens de z_1, z_2, z_3, \dots ? R: *Encontram-se sobre uma mesma semi-recta de origem na intersecção dos eixos coordenados.*

2150 — Onde se deduz o número de termos de um determinante? R: *Do número de permutações sobre n objectos.*

2151 — Como se determinam os coeficientes λ da relação que liga os elementos de uma mesma linha em determinante nulo? R: *Pelo teorema de Laplace,*

$$\sum_{k=1}^n a_k^i A_k^j = \begin{cases} \Delta & \text{se } j=i \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases} \text{ Mas como } \Delta=0, \text{ será sempre } \lambda_1 a_1^i + \lambda_2 a_2^i + \dots + \lambda_n a_n^i = 0 \text{ com } \lambda_k = A_k^j \text{ (} k \text{ e } i \text{ variáveis; } j \text{ fixo).}$$

2152 — Seja χ o menor principal A_n^n do determinante Δ . Que valor tem Δ quando se anulam todos os menores de 1.ª classe de χ ? Porquê? R: *Pela fórmula de redução de Cauchy, $\Delta = a_n^n \chi - \sum \chi_k^k a_n^k a_n^k$, se conclui que Δ é nulo por ser $\chi_k^k = 0$ ($i, k=1, 2, \dots, n-1$) e conseqüentemente $\chi = 0$.*

2153 — Em que consiste a inversão de uma matriz? Justifique a regra da inversão do produto. R: *Inverter uma matriz é obter uma outra que multiplicada pela primeira dê a matriz unidade, para o que basta dividir todos os elementos da matriz adjunta pelo determinante da matriz. A matriz inversa do produto é o produto das matrizes inversas dos factores mas com a ordem invertida, porque a mesma regra se verifica na determinação da matriz adjunta do produto.*

2154 — Qual a característica de uma matriz adjunta? Justifique a resposta. R: *É a característica da primitiva matriz porque um determinante e o seu adjunto só simultaneamente se anulam.*

2155 — Forme o produto das transformações $y_i = -\beta_k^i x_k$ e $x_i = \alpha_k^i u_k$ e relacione a respectiva matriz com as matrizes dos factores. R: *Tomando (para evitar ambigüidade) o índice mudo k em vez de h na segunda transformação, temos $y_i = -\beta_k^i x_k = -\beta_k^i \alpha_k^h u_k = \delta_k^h u_k$ com $\delta_k^h = -\beta_k^i \alpha_k^i$ (a matriz da transformação produto é igual ao produto das matrizes das transformações factores).*

2156 — Utilizando apenas planos e eixos coordenados (gerais) dê exemplo de uma recta e de um plano de equações $x/A = y/B = z/C$ e $Ax + By + Cz = 0$ que não sejam necessariamente ortogonais. R: *Considerando para triedro de referência um triedro qualquer, o plano XOY e o eixo dos zz (por exemplo) estão nas condições do problema ($A=B=0$).*

2157 — Conhecidas as fórmulas de passagem de um sistema cartesiano rectangular a outro sistema análogo, como pode saber-se se um dos triedros só difere do outro pela sua posição no espaço? R: *Os dois triedros têm a mesma disposição ou disposições opostas conforme fôr igual a +1 ou -1 o determinante da transformação ortogonal $x' = ax + a'y + a''z, y' = bx + b'y + b''z, z' = cx + c'y + c''z$, onde $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$ são os cosenos directores de OX', OY' e OZ' respectivamente.*

Soluções dos n.ºs 2145 a 2157 do F. Roldão Dias Agudo (aluno da F. C. L.).

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO INFINITESIMAL — 1.º Exame de frequência, 1945.

2158 — Máximos e mínimos de $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$.

R: *Temos $y' = \frac{-x(x+4)}{(x-2)^2(x+1)^2} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$*

$$\left. \begin{cases} x=0 & y'=0 \\ x=4 & y'=0 \\ x=2 & y'=\infty \\ x=1 & y'=\infty \end{cases} \right\}$$

$\varphi'(x) = -2x - 4$
 $\varphi'(0) < 0, \psi'(0) > 0$ logo $y'' < 0$ e temos um máximo;
 $\varphi'(-4) > 0, \psi'(-4) > 0$ logo $y' > 0$ e temos um mínimo.
 Para $x=2$ vem $y'(2-h) < 0, y'(2+h) < 0$ e a função é decrescente. Para $x=-1$ vem $y'(-1-h) > 0, y'(-1+h) > 0$ e a função é crescente.

2159 — Mudança de variáveis independentes na

equação $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ sendo $\begin{cases} u = e^x \\ v = e^{y-x} \end{cases}$. R: $u \frac{\partial^2 z}{\partial^2 u} - 2v \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

2160 — Calcule $\int \arcsen \sqrt{2x} dx$.

Vem: $I = x \arcsen \sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int x^{\frac{1}{2}} (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx =$
 $= x \arcsen \sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int (x^{-1}-2)^{-\frac{1}{2}} dx$.

Fazendo $x^{-1}-2 = t^2$ temos $\int (x^{-1}-2)^{-\frac{1}{2}} dx =$
 $= - \int \frac{2dt}{(t^2+2)^2} = - \frac{t}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}}$.

Logo $I = x \arcsen \sqrt{2x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{x-2x^2} +$
 $+ \frac{1}{4} \arctg \sqrt{\frac{1-2x}{2x}}$.

2161 — $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. R: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} =$
 $= [\arctg e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

2162 — Verdadeiro valor de $y = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x$ para $x = \infty$.

R: $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x} = \frac{-3 + 1/x}{\sqrt{1 - 3/x + 1/x^2} + 1} \rightarrow \frac{3}{2}$.

2163 — Dado $x^{2y} + y = 2$, calcule y'' em $(1, 1)$.
 R: $y'' = 6$.

Soluções dos n.ºs 2158 a 2163 de Jayme Rios de Souza.

I. S. T. — CÁLCULO INFINITESIMAL — 1.º exame de frequência de 1944-45.

2164 — Calcular $I = \int_{-3}^{+2} \frac{x^2 \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}} dx$.

R: $I = \int_{-3}^{+2} \frac{x^2 \sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x+3)}} dx = \int_{-3}^{+2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$.

O integral proposto é convergente. Efectuando a mudança de variável $\sqrt{(x-2)(x+1)} = (x+1)t$ vem

$$\int_{-3}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}} = \int_{\sqrt{2}}^0 \frac{(2+t^2)^2}{(1-t^2)^3} dt =$$

$$= 2 \left[\frac{At^3 + Bt^2 + Ct + D}{(1-t^2)^2} + E \log(1-t) + \right.$$

$$\left. + F \log(1+t) \right]_{\sqrt{5/2}}^0 \text{ sendo } A, B, \dots, F \text{ constantes}$$

a determinar pelo método dos coeficientes indeterminados.

2165 — Fazer no integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ a mudança de variável $x = y/\sqrt{2-y^2}$. R: $dx = 2(2-y^2)^{-3/2} dy$
 $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{(2-y^2)^{3/2} \left[1 - \frac{y^4}{(2-y^2)^2} \right]^{1/2}} =$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(2-y^2)(1-y^2)}}$.

2166 — $f(x) = \sen(1-x) - \log(2-x)$ é infinitésimo com $1-x$. De que ordem? R: Façamos $1-x=y$, e procuremos n tal que $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sen y - \log(1+y)}{y^n}$ seja finito e não nulo. Para $n=2$, vem, aplicando a regra L'Hôpital duas vezes:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sen y - \log(1+y)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - (1+y)^{-1}}{2y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sen y + (1+y)^{-2}}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Logo } f(x) \text{ é infinitésimo de } 2.ª \text{ ordem com } (1-x).$$

2167 — Estudar a convergência do integral:

$$\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \left[\frac{\cos \theta + \sen \theta}{\cos \theta - \sen \theta} \right]^{\cos 2\theta} d\theta. \text{ R: A função integranda}$$

torna-se infinita em $\pi/4$. Ora: $\frac{\cos \theta + \sen \theta}{\cos \theta - \sen \theta} =$

$$= -\cotg(\theta - \pi/4) = -\frac{1}{\tg(\theta - \pi/4)}.$$

Aplicando o critério de Bertrand, vem para $n = \cos 2\theta$:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{(\theta - \pi/4)^n}{[-\tg(\theta - \pi/4)]^{\cos 2\theta}} = \lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \left[-\frac{(\theta - \pi/4)^{\cos 2\theta}}{\tg(\theta - \pi/4)} \right] =$$

$$= (-1)^{\cos 2\theta} \neq 0, \infty.$$

O integral é convergente para $\cos 2\theta < 1$ e divergente para $\cos 2\theta = 1$.

Soluções dos n.ºs 2164 a 2167 de Olívio de Sousa Bento.

F. C. L. — ANÁLISE SUPERIOR — Exame final — Outubro de 1945.

2168 — a) Estabeleça a equação às derivadas parciais da qual é um integral completo a dupla infinidade de esferas de centros em XOY e tangentes a OY .

b) Verifique que a equação obtida exprime certa relação entre os segmentos MN e NQ , onde por M se designa um ponto genérico de uma superfície integral qualquer, N o traço da respectiva normal em

XOY e Q a projecção ortogonal de N sobre OY (eixos rectangulares). Indique tal relação.

c) Superfícies integrais contendo o círculo $x^2 + y^2 = 2x$ do plano XOY.

d) Verifique que as características de qualquer superfície integral constituem um sistema de linhas de curvatura. R: a) Equação finita da família de esferas: $z^2 + (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \beta^2 = 0$. Donde, por derivação parcial: $x - \alpha + pz = y - \beta + qz = 0$. Eliminando α e β entre as 3 equações, acha-se $p^2 z^2 + q^2 z^2 + z^2 = (x + pz)^2$.

b) Equações da normal em M(x, y, z):

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

coordenadas de N: $(x + pz, y + qz, 0)$; segmento \overline{MN} : $\sqrt{p^2 z^2 + q^2 z^2 + z^2}$; coordenadas de Q: $(0, y + qz, 0)$; segmento \overline{NQ} : $\sqrt{(x + pz)^2}$. A equação obtida traduz, pois, que: $\overline{MN} = \overline{NQ}$.

c) Com $z = x^2 + y^2 - 2x = 0$ é $2x - 2\alpha x - 2\beta \sqrt{2x - x^2} + \beta^2 = 0$ que se pode pôr na forma

$$4x^2(1 - \alpha)^2 + 4x\beta^2(1 - \alpha) + \beta^4 = 4\beta^2(2x - x^2)$$

e que, obrigada a ter raízes iguais em x, dá: $\beta(4x - \beta^2) = 0$ donde se deduz: $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta^2/4$. Se $\beta = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x = 0$, infinidade simples de integrais particulares, da qual faz parte $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ ($\alpha = 1$) que passa pelo círculo dado. Se $\alpha = \beta^2/4 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (x/2 - 1)\beta^2 - 2\beta y = 0$, infinidade simples de integrais particulares cujas secções, pelo plano $z = 0$, são curvas tangentes ao círculo dado. A envolvente de tal família com um parâmetro representa uma outra superfície que também satisfaz ao problema de Cauchy proposto; derivando em ordem a β e eliminando β acha-se $x(x^2 + y^2 + z^2) = 2(x^2 + z^2)$.

d) O sistema de Charpit-Lagrange para a equação às derivadas parciais obtidas em a) admite os integrais $x + pz = c_1$ $y + qz = c_2$ (de facto, $dx + pdz + zdp = 0$ e $dy + qdz + zdq = 0$ são combinações que dêle se deduzem).

As características das sup. integrais verificam, assim, a equação $dp d(y + qz) = dq d(x + pz)$ das linhas de curvatura.

2169 — Calcule $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$, transformando-o, previamente em $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ mediante uma relação $x = F(\theta)$ convenientemente escolhida e recorrendo, seguidamente, à teoria dos resíduos. R: Com

$x = \operatorname{tg} \theta \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ e pelo teorema dos resíduos, usando o contôrno $x^2 + y^2 = \infty$, $y \geq 0$, acha-se logo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Enunciados e soluções dos n.ºs 2168 e 2169 de Humberto S. Menezes.

F. C. P. — ANÁLISE SUPERIOR — 2.º exercício de repetição — 1 de Março de 1945.

2170 — Determinar uma função analítica da variável z : $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ para a qual são satisfeitas as condições:

a) $f(1) = 1$; b) $\varphi + \psi = x + y + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \arctg \frac{y}{x}$.

Determinar, em seguida, o valor da sua derivada no ponto $1+i$. R: Atendendo às condições de Cauchy-Riemann obtém-se por derivação de b):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Então, a integração de

$$d\varphi = \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

dá $\varphi = x + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c_1$. Logo $\psi = y + \arctg \frac{y}{x} - c_1$.

Portanto $f(z) = [x + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c_1] + i[y + \arctg \frac{y}{x} - c_1]$.

A condição a) determina $c_1 = 0$. Pode então escrever-se: $f(z) = z + \log z$. O valor da derivada no ponto $1+i$ é $3/2 - i/2$.

2171 — Desenvolver em série segundo as potências de z (desenvolvimentos de Taylor ou Laurent) a função

$$\frac{z+1}{z^2-4z+3} \quad \text{R: Ponhamos } F = \frac{z+1}{z^2-4z+3}$$

$$= \frac{2}{z-3} + \frac{-1}{z-1} = 2A - B. \text{ No interior de um círculo de}$$

centro na origem e de raio 3 (C_3) pode escrever-se:

$$(1) \quad 2A = \frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{3^n} + \dots\right)$$

No exterior de C_3 , será:

$$(2) \quad 2A = \frac{2}{z-3} = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-3/z} = \frac{2}{z} \left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \dots\right) = \frac{2}{z} + \frac{2 \cdot 3}{z^2} + \dots + \frac{2 \cdot 3^n}{z^{n+1}} + \dots$$

No interior de um círculo centrado na origem e de raio 1 (C_1), será:

$$(1') \quad -B = -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

No exterior de C_1 ,

$$(2') \quad -B = \frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots\right)$$

Podemos, portanto, escrever simbolicamente:

$$\text{No interior de } C_1 \quad F = (1) + (1')$$

$$\text{Na coroa circular} \quad F = (2') + (1)$$

$$\text{No exterior de } C_2 \quad F = (1') + (2')$$

2172 — Calcular, por meio da teoria dos resíduos, o integral definido: $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$.

Indicação: Integrar e^{-z^2} ao longo do contorno fechado definido pelo eixo ox , a bissectriz do 1.º quadrante e um arco \widehat{AB} de circunferência de centro O e raio R . R : Seja Γ o contorno fechado OAB , a que se refere o enunciado:

$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0$, pelo teorema de Cauchy. Mas:

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{AB} e^{-z^2} dz + \int_{BO} e^{-z^2(1+i)^2} (1+i) dx.$$

Quando $R \rightarrow \infty$, é fácil ver-se que: $\int_{AB} e^{-z^2} \rightarrow 0$.

$$\text{Ficará então: } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - (1+i) \int_0^{\infty} e^{-2ix^2} dx = 0$$

$$\text{ou: } \frac{\sqrt{\pi}}{2} = (1+i) \int_0^{\infty} [\cos(2x^2) - i \sin(2x^2)] dx;$$

$$\text{donde: } \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left[\int_0^{\infty} \cos(2x^2) dx + \int_0^{\infty} \sin(2x^2) dx \right] + i \left[\int_0^{\infty} \cos(2x^2) dx - \int_0^{\infty} \sin(2x^2) dx \right].$$

$$\text{Logo: } \int_0^{\infty} \cos(2x^2) dx + \int_0^{\infty} \sin(2x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \cos(2x^2) dx - \int_0^{\infty} \sin(2x^2) dx = 0.$$

$$\text{Portanto: } \int_0^{\infty} \cos(2x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$$

$$\text{donde resulta: } \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soluções dos n.ºs 2170 a 2172 de Laureano Barros.

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. L. — GEOMETRIA PROJECTIVA — Exame Final, Julho de 1945 — Ponto n.º 2.

2173 — Estabeleça uma projectividade entre 2 feixes não sobrepostos, geradora duma parábola com uma dada direcção assintótica, e construa um par de raios, homólogos nessa projectividade, cortando-se só uma recta dada r que não tenha direcção do ponto impróprio da cónica. Número de soluções do problema (para a cónica individualizada). Se se impuzesse a r a condição oposta da acima referida, que teria, de particular, a conclusão a que chegou na análise do número de soluções? Determine, para o caso considerado, o diâmetro conjugado com a direcção de r . Pode esta questão pôr-se na hipótese oposta relativa à direcção de r ?

2174 — Construa (por aplicação do teorema de Pascal a uma circunferência), 2 triângulos homológicos $[A B C]$ e $[A' B' C']$, e determine o género da cónica que, na homologia definida, corresponde à circunferência inscrita a $[A B C]$. Caso se trate duma parábola, determine a direcção do seu eixo e, caso se trate duma hipérbole, determine as suas assintotas.

2175 — Duma hipérbole, conhece-se: o eixo focal (real) — 6 cm — e a direcção dum dos pontos impróprios. Determine: a) as assintotas; b) o diâmetro conjugado com uma dada direcção r (escolhida esta por forma tal que o diâmetro da sua direcção intersecte a cónica em pontos reais); c) uma tangente paralela a uma recta dada d (escolhida esta por forma que o problema tenha 2 soluções (reais, distintas).

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — 2.º exame, 1944.

2176 — Os extremos A e B duma haste pesada homogénea escorregam sem atrito, sobre dois eixos rectangulares Ox e Oy .

Ox é vertical e fixo.

Oy está animado duma rotação de velocidade angular constante w , em torno de Ox .

Estudar o equilíbrio relativo da haste AB .

2177 — Determinar o centro de gravidade do vo-

lume limitado pelos três planos coordenados, supostos rectangulares, e pelas superfícies dos cilindros

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

no oitante positivo dos eixos.

2178 — Um ponto material cai para um centro fixo que o atrai na razão inversa do cubo da distância. Conhecida a distância inicial, qual é a duração da queda?

