I. S. T. — Mecânica Racional — **Exame final, 1946.**

2179 — Achar as extremais do integral

$$I=\int_{x_0}^{x_1} x^n y'^2\,dx\,,$$

e mostrar que se fôr $n \geq 1$, não há nenhuma extremal que passe por dois pontos situados de lados opostos do eixo dos yy.

2180 — Achar o momento de inércia do sólido homogéneo limitado pelas duas superfícies cilíndricas

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{e} \quad x^2+y^2=b^2\ (a>b)$$

e pelos dois planos

$$z=h \quad \text{e} \quad z=-h\,,$$

1.°. Em relação ao eixo dos zz;

2.°. Em relação ao eixo dos xx.

2181 — Um cilindro de revolução homogéneo e simplesmente pesado oscila em torno duma tangente (suposta horizontal) a uma das suas bases. Achar o comprimento do pendulo simples síncrono.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2182 — Do estudo das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\theta$ deduzir o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ sôbre a circunferência de convergência.

2183 — Sabendo que $\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ (V., p. ex., o livro de exercícios de Cálculo Infinitesimal de Todhunter), calcule:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n}\right]^{\pi/2n},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x}$$ e verifique as igualdades:

$$\int_0^{\pi/2a} \log \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{\pi}{2a}\log\frac{1}{2}$$

e

$$\int_0^{\pi/2a} x \operatorname{cotg} ax\,dx = \frac{\pi}{2a^2}\log 2\,.$$

2184 — *a)* Determinar um pentágono $[A'B'C'D'E']$ semelhante a um pentágono convexo dado $[\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}]$ sabendo que é projecção ortogonal de um pentágono regular de 3 cm de lado. *b)* Analisar o caso particular de ser $\overline{A}\overline{B}=\overline{A}\overline{E}$ (por exemplo), distinguindo ainda duas hipóteses diferentes consoante o valor do ângulo $\overline{A}$. Estabelecer prèviamente as condições de possibilidade do problema.

2185 — Seja 1 o conjunto de todos os números inteiros. Definamos em 1 um espaço (V), associando a cada elemento (ponto) de 1 as duas vizinhanças seguintes: $V_n^1=\{n\,,n+1\}$, $V_n^2=\{n-1\,,n\}$.

a) Mostre que as vizinhanças adoptadas são conjuntos abertos.

b) Demonstre que é condição necessária e suficiente para que n seja um ponto de acumulação do conjunto $A\subset 1$ que $n-1$ e $n+1$ pertençam a A.

c) Verifique, através dum exemplo, que, neste espaço, o derivado dum conjunto pode não ser um conjunto fechado.

d) Demonstre que é condição necessária e suficiente para que o derivado de um conjunto $A\subset 1$ seja fechado que os elementos de A sejam inteiros consecutivos.

2186 — Seja 1 um conjunto fundamental e F um seu subconjunto. Definamos em 1 uma operação de fecho da seguinte maneira: $\overline{O}=O$; $\overline{X}=X+F$, se $X\neq O$.

a) Mostre que o espaço $[1, \overline{\ }]$ é um espaço de Kuratowski.

b) Determine a família dos conjuntos fechados e a família dos conjuntos abertos de $[1, \overline{\ }]$.

c) Mostre que a fronteira de qualquer subconjunto de 1 (exceptuando O e 1) é igual a F.

d) Determine a família dos conjuntos cujo interior é o conjunto vazio e mostre que essa família constitui um corpo de conjuntos.

Para esclarecimento das notações empregadas nos problemas n.os 2185 e 2186, ver por exemplo, «Funções Contínuas» de A. Monteiro e A. Pereira Gomes.

Problemas n.os 2183, 2185 e 2186 propostos por José Morgado, e n.os 2182 a 2184 por Laureano Barros.

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1087 — Demonstrar que o plano $x+y+z=0$ corta o cone $\frac{yz}{b-c}+\frac{zx}{c-a}+\frac{xy}{a-b}=0$ segundo 2 geratrizes que fazem o ângulo $\pi/3$. Mostrar que os parâmetros directores dessas geratrizes são $a-b$, $b-c$, $c-a$, e $c-a$, $a-b$, $b-c$. R: *Elimino* z *entre as equações da secção do plano secante no cone,*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \dfrac{yz}{b-c}+\dfrac{zx}{c-a}+\dfrac{xy}{a-b}=0 \end{cases}$$

obtenho:

$$\begin{cases} z=-(x+y) \\ (c-a)(a-b)yz+(b-c)(a-b)zx+(b-c)(c-a)xy=0 \end{cases}$$

e

$$(c-a)(a-b)y^2+(b-c)(a-b)x^2+[(c-a)(a-b)+ \\ +(b-c)(a-b)-(b-c)(c-a)]\,xy=0,$$

$$(c-a)(a-b)y^2+(b-c)(a-b)x^2-[(a-b)^2+ \\ +(b-c)(c-a)]\,xy=0$$

equação da projecção da secção no plano XY. *Esta projecção é uma hiperbole degenerada em duas rectas concorrentes, que tem por equações*

$$r_1'\equiv(c-a)y-(a-b)x=0,\quad r_2'\equiv(a-b)y-(b-c)x=0.$$

Como a secção é plana e a sua projecção no plano XY *é constituída por duas rectas, concluo que a própria secção é formada por duas rectas de equações:*

$$r_1\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ (c-a)y-(a-b)x=0 \end{cases} \text{ ou } \frac{x}{c-a}=\frac{y}{a-b}=\frac{z}{b-c}$$

e

$$r_2\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ (a-b)y-(b-c)x=0 \end{cases} \text{ ou } \frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$$

É $\cos(\widehat{r_1,r_2})=\dfrac{(a-b)(c-a)+(b-c)(a-b)+(c-a)(b-c)}{\sqrt{(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2}}=$

$=-1/2$ *e* $\widehat{r_1r_2}=\pi/3$.

Solução de José Machado Gil (da Barquinha).

1433 — Estabelecer a fórmula

$$\int \text{sen}^{n-1}x\cos(n+1)x\cdot dx=\frac{\text{sen}^n x\cdot\cos nx}{n}+C$$

(Euler). Achar as fórmulas correspondentes para $\int \text{sen}^{n-1}x\,\text{sen}\,(n+1)\,x\,dx$, $\int \cos^{n-1}x\cos(n+1)\,x\,dx$, $\int \cos^{n-1}x\,\text{sen}(n+1)\,x.dx$.

R: $\int \text{sen}^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\int \text{sen}^{n-1}x\cos(nx+x)\,dx=$

$=\int \text{sen}^{n-1}x\cos nx\cos x\,dx-\int \text{sen}^n x\,\text{sen}\,nx\,dx=$

$=\frac{1}{n}\text{sen}^n x\cos nx+\int \text{sen}^n x\,\text{sen}\,nx-\int \text{sen}^n x\,\text{sen}\,nx\,dx=$

$=\frac{1}{n}\text{sen}^n x\cos nx+C$. *Anàlogamente se obtém*

$$\int \text{sen}^{n-1}x\,\text{sen}\,(n+1)\,x\,dx=\frac{1}{n}\text{sen}^n x\,\text{sen}\,nx+C;$$

$$\int \cos^{n-1}x\cos(n+1)\,x\,dx=\int \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,(n+1)\,x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos^n x\cos nx+C.$$

Solução de José Machado Gil (da Barquinha).

1899 — Numa urna há n bolas brancas e pretas. Qual a composição da urna, sabendo-se que o número de bolas brancas é igual ao valor médio do número de extracções necessárias para se obter uma bola branca, supondo que se vai extraindo, sucessivamente, ao acaso uma bola da urna, com reposição ao fim de cada extracção. Discutir. R: *Sendo* b *o número de bolas brancas e* p *o número de bolas pretas,*

$$\text{tem-se}\begin{cases} n=b+p \\ b=\dfrac{b}{n}+2\dfrac{bp}{nn}+3\dfrac{b}{n}\left(\dfrac{p}{n}\right)^2+\cdots+n\dfrac{b}{n}\left(\dfrac{p}{n}\right)^{n-1}+\cdots \end{cases}$$

$$\text{ou}\quad\begin{cases} n=b+p \\ 1=\dfrac{1}{n}\cdot\left(1-\dfrac{p}{n}\right)^{-2}. \end{cases}$$

A 2.ª equação dá para p *os dois valores* $n\pm\sqrt{n}$, *mas apenas* $n-\sqrt{n}$ *pode satisfazer ao problema. O número* b *será então* $\sqrt{n}$.

O problema apenas terá sentido quando n *fôr um quadrado perfeito.*

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).