I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final, 1946.

2179 — Achar as extremais do integral

$$I=\int_{x_0}^{x_1} x^n y'^2\,dx\,,$$

e mostrar que se fôr $n\geq 1$, não há nenhuma extremal que passe por dois pontos situados de lados opostos do eixo dos yy.

2180 — Achar o momento de inércia do sólido homogéneo limitado pelas duas superfícies cilíndricas

$$x^2+y^2=a^2 \quad e \quad x^2+y^2=b^2\ (a>b)$$

e pelos dois planos

$$z=h \quad e \quad z=-h\,,$$

1.º. Em relação ao eixo dos zz;

2.º. Em relação ao eixo dos xx.

2181 — Um cilindro de revolução homogéneo e simplesmente pesado oscila em torno duma tangente (suposta horizontal) a uma das suas bases. Achar o comprimento do pendulo simples síncrono.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2182 — Do estudo das séries $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen} n\theta$ deduzir o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}z^n$ sôbre a circunferência de convergência.

2183 — Sabendo que $\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{sen} x\,dx=\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ (V., p. ex., o livro de exercícios de Cálculo Infinitesimal de Todhunter), calcule:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n}\right]^{\pi/2n},$$

$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ e $\int_0^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x}$ e verifique as igualdades:

$$\int_0^{\pi/2a}\log\operatorname{sen} ax\,dx=\frac{\pi}{2a}\log\frac{1}{2}$$

e

$$\int_0^{\pi/2a} x\operatorname{cotg} ax\,dx=\frac{\pi}{2a^2}\log 2\,.$$

2184 — *a)* Determinar um pentágono $[A'B'C'D'E']$ semelhante a um pentágono convexo dado $[\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}]$ sabendo que é projecção ortogonal de um pentágono regular de 3 cm de lado. *b)* Analisar o caso particular de ser $\overline{A}\overline{B}=\overline{A}\overline{E}$ (por exemplo), distinguindo ainda duas hipóteses diferentes consoante o valor do ângulo $\overline{A}$. Estabelecer prèviamente as condições de possibilidade do problema.

2185 — Seja 1 o conjunto de todos os números inteiros. Definamos em 1 um espaço (V), associando a cada elemento (ponto) de 1 as duas vizinhanças seguintes: $V_n^1=\{n\,,n+1\}$, $V_n^2=\{n-1\,,n\}$.

a) Mostre que as vizinhanças adoptadas são conjuntos abertos.

b) Demonstre que é condição necessária e suficiente para que n seja um ponto de acumulação do conjunto $A\subset 1$ que $n-1$ e $n+1$ pertençam a A.

c) Verifique, através dum exemplo, que, neste espaço, o derivado dum conjunto pode não ser um conjunto fechado.

d) Demonstre que é condição necessária e suficiente para que o derivado de um conjunto $A\subset 1$ seja fechado que os elementos de A sejam inteiros consecutivos.

2186 — Seja 1 um conjunto fundamental e F um seu subconjunto. Definamos em 1 uma operação de