ANO VI-N.º 26 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO-1945

REDAC. PRINC.: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática Lda.* ■ ADMINIST.: *O. M. Rodrigues*

Composto na Tipografia Matemática Limitada — Impresso na Sociedade Industrial de Tipografia Limitada

Sobre la permutación de los operadores: d/dx y E_x

por **J. Gallego Diaz** (Universidad de Madrid)

Es sabido que cada día adquiere mayor importancia en Economía Matemática el estudio de la elasticidad de una función.

Se define así el produto $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$ y se representa por el símbolo $E_x(y)$; de modo que:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d(Ly)}{d(Lx)}$$

El objeto de esta breve nota es determinar aquellas funciones para las cuales pueden permutarse los operadores $E_x()$ y $\frac{d}{dx}()$; es decir, para los cuales se pueda escribir:

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}[E_x(y)] = E_x\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot$$

Al tener presente que:

$$E_x(y') = y'' \frac{x}{y'}$$

en virtud de la propia definición de la elasticidad y, que:

$$\frac{d}{dx}\left(y' \cdot \frac{x}{y}\right) = y'' \frac{x}{y} + y' \frac{y - xy'}{y^2}$$

la ecuación (1) se convierte en la:

$$\frac{xy''}{y} + \frac{yy' - x(y')^2}{y^2} = y'' \frac{x}{y}$$

y operando resulta:

$$(2) \qquad xy(y - y')y'' - (y')^2(y + xy') = 0$$

siendo la ecuación (2) equivalente a la (1). Para resolver la ecuación (2) efectuemos el cambio de variable: $y = e^t$. Se verificará: $y' = e^t \cdot t'$ $y'' = e^t[(t')^2 + t'']$ y sustituyendo y simplificando queda:

$$(3) \qquad x(1 - t')t'' + (t')^2(x - 1) = 0$$

ecuación de Bernoulli en la que es plausible el cambio: $t' = \frac{1}{u}$, $t'' = -\frac{u'}{u^2}$ con lo cual (3) se convierte en

$$(4) \qquad xu'(1 - u) + u(x - 1) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{du}{dx} \frac{1-u}{u} = \frac{1-x}{x}$$

$$du\left(\frac{1}{u} - 1\right) = dx\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

ecuación diferencial de variables separadas que por integración immediata dá:

$$(5) \qquad Lu - u = Lx - x + k$$

que también puede escribirse:

$$(6) \qquad \frac{u}{e^u} = k_1 \frac{x}{e^x}$$

Como de (6) no puede despejarse explicitamente u en función de x, podemos suponer, teóricamente al menos que $u = \varphi\left(\frac{e^x}{x}\right)$

Por tanto: $t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} = \psi\left(\frac{e^x}{x}\right)$

y $t = \int \psi\left(\frac{e^x}{x}\right) dx$

y finalmente: $y = e^{\int \psi\left(\frac{e^x}{x}\right) dx}$

lo cual nos indica que la función buscada es una función de la función trascendente conocida con el nombre de *integral-logaritmo* o integral de Soldner.