Sôbre o método axiomático

por ***José Sebastião e Silva*** (bolseiro do I. A. C. em Roma)

Representemos por U a classe dos seres humanos, e convencionemos escrever $x \prec y$, com o significado de x *é descendente de* y.

As letras x, y representam, naturalmente, elementos *indeterminados* da classe U (*variáveis sôbre* U), e desempenham portanto uma função equivalente à dos têrmos *Fulano, Beltrano, Cicrano.*

Podemos dizer então que «$x \prec y$» é uma *proposição, condicional em* x, y, *definida em* U. (Em particular, tal proposição será verificada, se x fôr filho de y, ou se x fôr neto de y, etc.).

Por outro lado, diremos que o símbolo $\prec$ representa uma *relação binária, definida em* U.

Posto isto, notemos que as proposições:

α) *Se* $x \prec y$, *então* $x \neq y$; [1]

β) *Se* $x \prec y$ *e* $y \prec z$, *então* $x \prec z$;

serão incondicionalmente verdadeiras, de acôrdo com as convenções anteriores. (Chamaremos à primeira «*propriedade antireflexiva*», e à segunda «*propriedade transitiva*», da relação $\prec$)

Mas é claro que, se as proposições α, β são verdadeiras, também a proposição

γ) *Se* $x \prec y$, *não pode ter-se* $y \prec x$;

não poderá deixar de ser verdadeira, pois que, se fôsse falsa, isto é, se, a respeito de dois indivíduos x, y, se tivesse ao mesmo tempo $x \prec y$, $y \prec x$, ter-se-ia (em virtude de β) $x \prec x$, o que, segundo α, é impossível. (Chamaremos a γ «*propriedade antisimétrica*» da relação $\prec$).

Vê-se pois que, uma vez admitida a veracidade das proposições α, β, a proposição γ não poderá deixar de ser admitida como verdadeira, *qualquer que seja o significado atribuído aos símbolos* U, $\prec$. Assim, onde dissémos «*classe dos seres humanos*», podiamos ter dito «*classe das aves*» atribuindo ao símbolo $\prec$ o significado «*ascendente de*»; podíamos ter dito «*classe dos números naturais*» interpretando «$x \prec y$» como a proposição «x *é um divisor próprio de* y»; podíamos ter dito «*classe das funções reais de variável real*», considerando a expressão $\varphi \prec \psi$ como uma abreviatura desta outra «$\varphi(x) < \psi(x)$, *qualquer que seja* x»; podíamos ter dito «*classe dos números complexos*», escrevendo $x \prec y$, se a parte real de x é menor do que a parte real de y, ou se, sendo iguais as partes reais, o coeficiente de i é maior em x, do que em y; etc, etc. Em qualquer dêstes casos, as proposições α, β são verdadeiras, e o mesmo sucederá, necessàriamente, a respeito da proposição γ.

E é claro que não só γ, mas infinitas outras proposições poderão ser *deduzidas,* sucessivamente, das proposições α, β, tomadas como *axiomas* (isto é, admitidas como verdadeiras, sem atender ao significado de $\prec$). Dêste modo, a partir de tais axiomas será desenvolvida uma *teoria dedutiva,* que podemos chamar *teoria das relações binárias antisimétricas transitivas,* ou ainda, como se diz de preferência, *teoria dos sistemas parcialmente ordenados* [1].

Ora é nisto, afinal, que consiste a moderna orientação *axiomática, formal* ou *abstracta* da Matemática: — em reduzir a uma teoria única, condensada numa axiomática, o estudo de uma série de propriedades que, mediante convenientes interpretações de linguagem, se revelam comuns a infinitos sistemas possíveis.

Vantagem imediata dêste método: economia extraordinária de pensamento, resultante da possibilidade de aplicar, a infinitos campos concretos, um mesmo aparelho lógico, constituído por uma rêde de raciocínios, *efectuados uma vez por tôdas.* Os princípios de dualidade e de transporte, tão fecundamente utilizados em Geometria, constituem já um exemplo de aplicação do método axiomático.

Todavia, contra êste método aponta-se, entre outros, o inconveniente de que, esvaziando os conceitos primitivos de todo o conteúdo intuïtivo, êle romperia aquêle contacto entre o investigador e a realidade, sem o qual tôda a actividade matemática se reduz a um jôgo inteiramente estéril de símbolos e de fórmulas. Ora a verdade é que nada impede o investigador, ao desenvolver uma teoria segundo o método axiomático, de apoiar a imaginação sôbre algum, ou melhor, sôbre vários dos modêlos que verificam a axiomática.

É claro que se trata de um *instrumento,* que, como

---

(1) Ao sinal $\neq$ atribui-se aqui, naturalmente, o significado de «distinto de», «não coïncidente com». Trata-se portanto de um conceito puramente lógico.

(1) Interessa notar que, adoptando a escrita simbólica da Lógica matemática, as proposições α, β, γ assumem a forma:

α) $(x \prec y) \underset{x,y}{\longrightarrow} (x \neq y)$;

β) $[(x \prec y) \frown (y \prec z)] \underset{x,y,z}{\longrightarrow} (x \prec z)$;

γ) $(x \prec y) \underset{x,y}{\longrightarrow} \sim (y \prec x)$;

em que os símbolos $\underset{x,y}{\longrightarrow}$, $\frown$, $\sim$, $\neq$ representam «conceitos lógicos, isto é, conceitos comuns às diferentes teorias dedutivas.