Sôbre o método axiomático

por **José Sebastião e Silva** (bolseiro do I. A. C. em Roma)

Representemos por U a classe dos seres humanos, e convencionemos escrever $x \prec y$, com o significado de x *é descendente de* y.

As letras x, y representam, naturalmente, elementos *indeterminados* da classe U (*variáveis sôbre* U), e desempenham portanto uma função equivalente à dos têrmos *Fulano, Beltrano, Cicrano.*

Podemos dizer então que «$x \prec y$» é uma *proposição, condicional em* x, y, *definida em* U. (Em particular, tal proposição será verificada, se x fôr filho de y, ou se x fôr neto de y, etc.).

Por outro lado, diremos que o símbolo $\prec$ representa uma *relação binária, definida em* U.

Posto isto, notemos que as proposições:

α) *Se* $x \prec y$, *então* $x \neq y$; [1]

β) *Se* $x \prec y$ *e* $y \prec z$, *então* $x \prec z$;

serão incondicionalmente verdadeiras, de acôrdo com as convenções anteriores. (Chamaremos à primeira «*propriedade antireflexiva*», e à segunda «*propriedade transitiva*», da relação $\prec$)

Mas é claro que, se as proposições α, β são verdadeiras, também a proposição

γ) *Se* $x \prec y$, *não pode ter-se* $y \prec x$;

não poderá deixar de ser verdadeira, pois que, se fôsse falsa, isto é, se, a respeito de dois indivíduos x, y, se tivesse ao mesmo tempo $x \prec y$, $y \prec x$, ter-se-ia (em virtude de β) $x \prec x$, o que, segundo α, é impossível. (Chamaremos a γ «*propriedade antisimétrica*» da relação $\prec$).

Vê-se pois que, uma vez admitida a veracidade das proposições α, β, a proposição γ não poderá deixar de ser admitida como verdadeira, *qualquer que seja o significado atribuído aos símbolos* U, $\prec$. Assim, onde dissémos «*classe dos seres humanos*», podiamos ter dito «*classe das aves*» atribuindo ao símbolo $\prec$ o significado «*ascendente de*»; podíamos ter dito «*classe dos números naturais*» interpretando «$x \prec y$» como a proposição «x *é um divisor próprio de* y»; podíamos ter dito «*classe das funções reais de variável real*», considerando a expressão $\varphi \prec \psi$ como uma abreviatura desta outra «$\varphi(x) < \psi(x)$, *qualquer que seja* x»; podíamos ter dito «*classe dos números complexos*», escrevendo $x \prec y$, se a parte real de x é menor do que a parte real de y, ou se, sendo iguais as partes reais, o coeficiente de i é maior em x, do que em y; etc, etc. Em qualquer dêstes casos, as proposições α, β são verdadeiras, e o mesmo sucederá, necessàriamente, a respeito da proposição γ.

E é claro que não só γ, mas infinitas outras proposições poderão ser *deduzidas,* sucessivamente, das proposições α, β, tomadas como *axiomas* (isto é, admitidas como verdadeiras, sem atender ao significado de $\prec$). Dêste modo, a partir de tais axiomas será desenvolvida uma *teoria dedutiva,* que podemos chamar *teoria das relações binárias antisimétricas transitivas,* ou ainda, como se diz de preferência, *teoria dos sistemas parcialmente ordenados* [1].

Ora é nisto, afinal, que consiste a moderna orientação *axiomática, formal* ou *abstracta* da Matemática: — em reduzir a uma teoria única, condensada numa axiomática, o estudo de uma série de propriedades que, mediante convenientes interpretações de linguagem, se revelam comuns a infinitos sistemas possíveis.

Vantagem imediata dêste método: economia extraordinária de pensamento, resultante da possibilidade de aplicar, a infinitos campos concretos, um mesmo aparelho lógico, constituído por uma rêde de raciocínios, *efectuados uma vez por tôdas.* Os princípios de dualidade e de transporte, tão fecundamente utilizados em Geometria, constituem já um exemplo de aplicação do método axiomático.

Todavia, contra êste método aponta-se, entre outros, o inconveniente de que, esvaziando os conceitos primitivos de todo o conteúdo intuïtivo, êle romperia aquêle contacto entre o investigador e a realidade, sem o qual tôda a actividade matemática se reduz a um jôgo inteiramente estéril de símbolos e de fórmulas. Ora a verdade é que nada impede o investigador, ao desenvolver uma teoria segundo o método axiomático, de apoiar a imaginação sôbre algum, ou melhor, sôbre vários dos modêlos que verificam a axiomática.

É claro que se trata de um *instrumento,* que, como

---

(1) Ao sinal $\neq$ atribui-se aqui, naturalmente, o significado de «distinto de», «não coïncidente com». Trata-se portanto de um conceito puramente lógico.

(1) Interessa notar que, adoptando a escrita simbólica da Lógica matemática, as proposições α, β, γ assumem a forma:

α) $(x \prec y) \xrightarrow[x,y]{} (x \neq y)$;

β) $[(x \prec y) \cap (y \prec z)] \xrightarrow[x,y,z]{} (x \prec z)$;

γ) $(x \prec y) \xrightarrow[x,y]{} \sim (y \prec x)$;

em que os símbolos $\xrightarrow[x,y]{}$, $\cap$, $\sim$, $\neq$ representam «conceitos lógicos, isto é, conceitos comuns às diferentes teorias dedutivas.

todos os instrumentos, será útil ou nocivo, conforme o uso que dêle se fizer. Não se justifica portanto o horrôr que a certos espíritos infunde aquilo a que desdenhosamente chamam a «*mecanização do pensamento matemático*». Se alguém se lembrar de dizer que os princípios de dualidade e de trasnporte constituem máquinas de fabricar teoremas — nem sequer estará longe da verdade. Mas não ousará, por êste facto, converter em desgraça o que é apenas uma felicidade, e propôr assim que tais princípios sejam pura e simplesmente excluídos do domínio da Matemática.

Nota — Êste esbôço, baseado sôbre um parágrafo dum trabalho meu recentemente escrito, tem por objectivo dar uma primeira idéia do método axiomático, procurando desfazer certas lendas que se criaram à volta dêste assunto.

É certo que o teorema γ, que nos serviu de exemplo, não passa de uma trivialidade; mas não devemos esquecer que a Matemática é feita assim — de excessivas trivialidades, tão hàbilmente e tão complexamente encadeadas que o resultado deixa de ser uma trivialidade.

Recordemos, por último, que, além dos *teoremas* (que se *deduzem* dos *axiomas*, por meio das *regras da Lógica*), há a considerar nas teorias dedutivas os *conceitos derivados*, que se *definem* a partir dos *conceitos primitivos*, por meio das *operações da Lógica*. Assim, por exemplo, a partir do conceito de «*descendente*» atrás considerado, podem definir-se os conceitos de «*filho (a)*», de «*tio (a)*» de «*primo (a)*, de «*geração*», de «*grau de parentesco*», etc. etc. Estas noções de parentesco prestam-se, como se sabe, a curiosos problemas — *que são problemas de Matemática.*

Da importância da topologia na matemática moderna [1]

por **Achille Bassi**

As idéias e os problemas da topologia, como frequentemente acontece com as doutrinas que trazem em si uma profunda razão de ser, têm sua primeira origem em fatos comuns experimentais que se relacionam com a vida quotidiana. A topologia, bem como qualquer outro ramo de Matemática, pode, com efeito, dar origem a problemas que se prestam para ser enunciados e compreendidos por quem é leigo, ou quasi, a respeito de noções matemáticas. A matemática divertida lhe é portanto, devedora de um grande numero de pequenos passatempos ou jogos que se relacionam com problemas topologicos de enunciado elementar.

Mas, este aspeto que, muitas vezes, aproxima o leigo da topologia é, talvez, ainda o que concorreu para afastar da topologia alguns dos melhores intelectos, porventura não atraidos por questões que por demais se assemelhavam a pequenos jogos.

Com efeito, embora os primórdios dos conceitos topológicos se confundam com os da geometria e, apesar das questões e dos problemas de caráter topológico serem conhecidos ha bastante tempo, a topologia só se afirma como uma teoria séria e importante em época recente e, especialmente, com a obra de Riemann, por volta da metade do século passado. Êste matemático, como é sabido, foi o primeiro a revelar com clareza a importancia que os principios topológicos têm para estudo das funções de variável complexa.

Outros que contribuiram eficazmente para o progresso da topologia, quer com uma atividade ocasional e, por vezes, inconcientemente, quer com um trabalho sistemático, são, por exemplo, Betti, Poincaré, Cantor, Peano, Brouwer, Fréchet, etc. homens esses que pertenceram ou pertecem ao escol dos cientistas do fim do seculo passado e do começo do atual.

Betti e Poincaré desenvolveram as idéias originais de Riemann, sobretudo no sentido, até hoje reconhecivel na topologia moderna, denominado da topologia combinatória; os outros deram impulso, principalmente áquele ramo hoje denominado da topologia dos conjuntos ou topologia punctual.

A importância que, na atualidade, tem a topologia em matemática, já foi assinalada pela obra desses grandes vultos. Verifica-se, efetivamente, cousa muito significativa, que os progressos da topologia devidos a êstes cientistas estão todos, ou quasi todos, ligados a descobertas que tiveram grande valor para o progresso da matemática em geral.

Quem estuda a gênese dos conceitos e das teorias da topologia tem, para logo, sua atenção atraida pela enorme diversidade dos problemas e dos campos de pesquisa habituais, dos quais aqueles cultores da ciência partiram para chegar a considerar questões de topologia.

---

(1) Conferência feita na Faculdade de Filosofia da Universidade do Brasil como preleção do curso de Geometria Superior.

N. R. — Não se alterou a ortografia adoptada no artigo transcrito.