todos os instrumentos, será útil ou nocivo, conforme o uso que dêle se fizer. Não se justifica portanto o horrôr que a certos espíritos infunde aquilo a que desdenhosamente chamam a *«mecanização do pensamento matemático»*. Se alguém se lembrar de dizer que os princípios de dualidade e de trasnporte constituem máquinas de fabricar teoremas — nem sequer estará longe da verdade. Mas não ousará, por êste facto, converter em desgraça o que é apenas uma felicidade, e propôr assim que tais princípios sejam pura e simplesmente excluídos do domínio da Matemática.

Nota — Êste esbôço, baseado sôbre um parágrafo dum trabalho meu recentemente escrito, tem por objectivo dar uma primeira idéia do método axiomático, procurando desfazer certas lendas que se criaram à volta dêste assunto.

É certo que o teorema γ, que nos serviu de exemplo, não passa de uma trivialidade; mas não devemos esquecer que a Matemática é feita assim — de excessivas trivialidades, tão hàbilmente e tão complexamente encadeadas que o resultado deixa de ser uma trivialidade.

Recordemos, por último, que, além dos *teoremas* (que se *deduzem* dos *axiomas*, por meio das *regras da Lógica*), há a considerar nas teorias dedutivas os *conceitos derivados*, que se *definem* a partir dos *conceitos primitivos*, por meio das *operações da Lógica*. Assim, por exemplo, a partir do conceito de *«descendente»* atrás considerado, podem definir-se os conceitos de *«filho (a)»*, de *«tio (a)»* de *«primo (a)*, de *«geração»*, de *«grau de parentesco»*, etc. etc. Estas noções de parentesco prestam-se, como se sabe, a curiosos problemas — *que são problemas de Matemática.*

Da importância da topologia na matemática moderna [1]

por **Achille Bassi**

As idéias e os problemas da topologia, como frequentemente acontece com as doutrinas que trazem em si uma profunda razão de ser, têm sua primeira origem em fatos comuns experimentais que se relacionam com a vida quotidiana. A topologia, bem como qualquer outro ramo de Matemática, pode, com efeito, dar origem a problemas que se prestam para ser enunciados e compreendidos por quem é leigo, ou quasi, a respeito de noções matemáticas. A matemática divertida lhe é portanto, devedora de um grande numero de pequenos passatempos ou jogos que se relacionam com problemas topologicos de enunciado elementar.

Mas, este aspeto que, muitas vezes, aproxima o leigo da topologia é, talvez, ainda o que concorreu para afastar da topologia alguns dos melhores intelectos, porventura não atraidos por questões que por demais se assemelhavam a pequenos jogos.

Com efeito, embora os primórdios dos conceitos topológicos se confundam com os da geometria e, apesar das questões e dos problemas de caráter topológico serem conhecidos ha bastante tempo, a topologia só se afirma como uma teoria séria e importante em época recente e, especialmente, com a obra de Riemann, por volta da metade do século passado. Êste matemático, como é sabido, foi o primeiro a revelar com clareza a importancia que os principios topológicos têm para estudo das funções de variável complexa.

Outros que contribuiram eficazmente para o progresso da topologia, quer com uma atividade ocasional e, por vezes, inconcientemente, quer com um trabalho sistemático, são, por exemplo, Betti, Poincaré, Cantor, Peano, Brouwer, Fréchet, etc. homens esses que pertenceram ou pertecem ao escol dos cientistas do fim do seculo passado e do começo do atual.

Betti e Poincaré desenvolveram as idéias originais de Riemann, sobretudo no sentido, até hoje reconhecivel na topologia moderna, denominado da topologia combinatória; os outros deram impulso, principalmente àquele ramo hoje denominado da topologia dos conjuntos ou topologia punctual.

A importância que, na atualidade, tem a topologia em matemática, já foi assinalada pela obra desses grandes vultos. Verifica-se, efetivamente, cousa muito significativa, que os progressos da topologia devidos a êstes cientistas estão todos, ou quasi todos, ligados a descobertas que tiveram grande valor para o progresso da matemática em geral.

Quem estuda a gênese dos conceitos e das teorias da topologia tem, para logo, sua atenção atraida pela enorme diversidade dos problemas e dos campos de pesquisa habituais, dos quais aqueles cultores da ciência partiram para chegar a considerar questões de topologia.

---

(1) Conferência feita na Faculdade de Filosofia da Universidade do Brasil como preleção do curso de Geometria Superior.

N. R. — Não se alterou a ortografia adoptada no artigo transcrito.

Poincaré partiu principalmente de questões de dinâmica celeste, Riemann, do estudo das funções de variavel complexa, Cantor, das suas considerações, de capital importância, visando dar uma sistematização satisfatoria aos problemas do infinito matemático Peano de estudos críticos geniais sôbre as funções de variaveis reais, Brouwer de problemas que se podem considerar como a extensão natural de outros problemas formulados pela álgebra clássica dos séculos XVI e XVII, Fréchet, de uma análise filosófica do que se deve entender por espaço matemático.

Partindo de tal grandissima diversidade de origens, êstes autores foram a pouco e pouco levados para uma única corrente de idéias: a atual topologia. Esta, pela sua vastidão, hoje, quasi dá vertigens às mentes mais propensas para a síntese e mais ávidas pela mesma. Ha trinta anos, era, por certo, menos fácil vislumbrar a unidade subtancial das novas idéias que se iam delineando na matemática e estava-se, ainda longe de poder compreender toda a nova e fecunda vitalidade que estas idéias teriam trazido à propria matemática. Todavia, mesmo então, os melhores intelectos não puderam deixar de sentir a sua fascinação e de presagiar, ao menos em parte, a importância de quanto se estava amadurecendo.

Poincaré, por exemplo, nos primeiros anos deste século, surpreendido pelo grande número de vezes em que foi levado ao estudo da topologia, apesar de ir trabalhando em teorias bem difreentes, saiu-se com estas simples e ponderadas palavras: «*Se a importância da Analysis Situs não é compreendida por todos, é porque nem todos têm refletido suficientemente sôbre isso*».

Para um topólogo moderno é motivo de curiosidade observar o modo com o qual Poincaré justifica, a seus olhos, a importância da nova teoria: «*A geometria corriqueira*» — êle declara como premissa — «*é a arte de raciocinar bem sôbre figuras mal feitas*». Assim, um triângulo sôbre o qual se raciocine, pode ser desenhado com mão incerta, de forma que, na realidade, os seus lados não sejam retos, mas um pouco arqueados ou sinuosos. Êle observa, doutra parte, que ha limites para a imprecisão do desenho. Por exemplo, as curvas que representam os lados não devem ter pontos comuns diferentes dos vértices; nêste caso, uma criança que se valesse do desenho de um triângulo para encontrar ajuda no raciocinar sobre o mesmo, não acharia mais o usual auxílio na figura considerada, porquanto esta lhe traria confusão. Poincaré diz, a êste respeito, que na figura «*mal feita*», afim de que ela possa ser verdadeiramente util, devem se conservar todas as propriedades qualitativas das figuras abstratas, propriedades que êle faz coincidir com as topológicas; ao passo que podem perder-se, sem dano algum, as propriedades quantitativas. E, então, conclue assim: «*A topologia nos fará conhecer no espaço pluridimensional as propriedades qualitativas e nos poderá, portanto, prestar bons serviços, análogos aos das figuras na geometria plana ou dos sólidos*».

Estas considerações são expostas por Poincaré duma fórma agradavel e são, de certo, interessantes e engenhosas; contudo, deve-se considerar que não satisfariam completamente a um topólogo moderno.

Desde os tempos de Poincaré esboçaram-se novas mudanças. A topologia rejuvenesceu um número tal de teorias matemáticas, realizou tais construções e, embora surgida de problemas de caráter antigo, está tão orientada para o futuro, que deixou quasi completamente esquecidas as próprias origens. A meta que, para Poincaré parecia tão atraente, depara-se-nos, hoje, tão restrita que dificilmente um topólogo moderno a declararia como própria.

O tempo foi, nestes últimos anos, um devorador de esquemas, de imagens e de teorias. Creio que o progresso da topologia deva ser aquilatado pelos esquemas que ela ultrapassou, isto é, pelos fins que, de ano para ano se propunha, com um ritmo que renovou a mentalidade do matemático moderno.

Eu mesmo tive oportunidade de experimentar a rapidez dêste progresso, quando, em 1935, fui aos Estados Unidos para conhecer os últimos passos da topologia. Efetivamente, verifiquei, com surpreza, que os topológos da América falavam uma linguagem matemática que me era difícil compreender (1). A razão disso era que os meus conhecimentos chegavam então ao que era aproximadamente a topologia em 1932. Mas, entrementes, uma quantidade de ideias novas tinham sido divulgadas ou apresentadas. Tinha-se caminhado com um passo tão acelerado que em poucos anos se transformara a atmosfera de muitos discursos cientificos.

*

A topologia moderna, alem de proporcionar conhecimentos e apontar teorias de grande beleza e de grande futuro, dá os elementos para uma compreensão mais simples e mais facil de um grande número de outras teorias matemáticas, ou, pelo menos, da natureza de fatos importantes e essenciais destas teorias.

Assim, eu creio que, para todo o jovem que queira

---

(1) Eram, então, assuntos ordinários na conversa ão, por exemplo: a álgebra topológica, os espaços bi-compatos, os grupos de co-homologia, etc. Este último conceito tinha sido trazido para a ciência precisamente em 1935, simultaneamente por Alexander, em Princeton, por Withney, em Harward, e por Kolmogoroff, em Moscou.

apoderar-se dos conhecimentos vivos da matemática moderna, seja de suma importância familiarizar-se, em primeiro logar, com a topologia.

Conhecida esta, então, muitas teorias parecerão quasi familiares, mesmo antes de iniciar o seu estudo, porque se apresentarão numa transparente perspectiva que deixará compreender os seus segredos e, portanto, nas condições mais favoraveis para serem possuidas com facilidade. Penso que não exagero dizendo que a aquisição de muitas outras teorias modernas fará, então, o efèito de uma fácil descida e não o de uma penosa ascensão.

Reflita-se na verdadeira natureza das propriedades estudadas pela *geometria algébrica!* Aludo ao fato conhecídissimo de que a maior parte de tais propriedades são topológicas. Repito uma incisiva frase que ouvi de S. Ex. Severi: «Oitenta por cento das propriedades da geometria algébrica é de natureza topológica».

De fato estas propriedades topológicas constituem pode-se dizer, o núcleo fundamental da geometria algébrica.

Bem cohecemos a importância que a topologia tem para o *Cálculo funcional* e, portanto, de modo particular, para o Cálculo das Variações. Fizeram-se, a esse respeito cousas muito interessantes: lembremos a obra de Morse, de Lusternick e de Schnerelmann, exposta já, em parte, em volumes e monografias, e de outros ainda. É certo que o Cálculo Funcional vai assumindo rapidamente caracteres topológicos em todas aquelas nações em que não foram descurados nem o cálculo funcional nem a topologia: esta cousa é, com efeito, patente nos dias que correm.

Outra teoria que, mercê da topologia, encontrou uma vitalidade nova é a velha e gloriosa *teoria de transformações*. A topologia vivificou velhos conceitos, introduziu outros novos, fecundos, permitindo a construção de uma nova teoria que tem como arcabouço a antiga.

Teve-se, assim, a teoria dos grupos topológicos, das variedades grupo, etc..., obra tão cheia de fascinação e de futuro graças a Cartan e Schreier e aos jovens valorosos topologos da escola holandêsa, Van Danzig e outros.

Teorias profundas das quais muitas cousas para a matemática ha ainda que esperar.

Nêste ponto não posso furtar-me de lembrar um interessantissimo gênero de pesquisas recentemente iniciadas: o estudo das propriedades topológicas, em grande, das variedades diferenciais, de Riemann, que demonstra como as propriedades topológicas, «em grande» destas variedades sejam consequências das propriedades diferenciais, «em pequeno», da própria variedade. Fato eminentemente sugestivo!

Fundem-se, nêste estudo, duas célebres diretrizes distintas dadas à geometria moderna por parte de uma mesma pessoa, Riemann, isto é, a diretriz topológica e a diretriz diferencial inaugurada com a famosa monografia: «*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*». E' um admiravel estudo de puro caráter clássico que encara fatos que talvez o mesmo Riemann já tivesse pensado que teriam podido existir. Certo, se êle tivesse conhecido os conceitos e os instrumentos da topologia moderna e da geometria diferencial, teria tido a alegria de a êles se poder dedicar!

De resto, ainda que se prescinda desta pesquisa que, como cada um vê, tem para a matemática um profundo interesse, as relações que intercorrem entre a geometria diferencial e a topologia tornaram-se bastante estreitas: tanto que o Seminário Matemático de Hamburgo sentiu a necessidade de dedicar ao assunto uma série especial de artigos: «*Topologische Fragen der Differentialgeometrie*», a qual, apesar de ter sido iniciada ha poucos anos, já conta mais de uma centena de trabalhos sobre o assunto!

Estas são algumas entre as mais significativas aplicações da topologia. Mas ha ainda muitas outras, tambem importantes, pois que se encontram em quasi todos os ramos da matemática. Todavia, por amor de brevidade não me detenho em considerá-las.

*

Vamos, agora, procurar de dar algumas idéias do interesse e da importância de, ao menos, algumas das teorias da topologia pròpriamente dita.

Comecei com o referir algumas aplicações, pensando que isto fosse mais aceito por pessoas de varia e dispar cultura, a ponto de induzí-las a seguir-me mais facilmente ainda no resto da minha exposição.

Mas, na realidade, a importância da topologia, não reside somente nas aplicações, porquanto elas sejam vastas e fecundas de progresso para muitos outros ramos da matemática, mas reside no valor excepcionalmente elevado das suas teorias, para o conhecimento da matemática.

O interesse da topologia é dado pela importância, às vezes, tambem filosófica dos conceitos que ela introduz e pela extraordinária capacidade de síntese que revela quando é aplicada a problemas concretos; tudo quanto já se fez sôbre o assunto justifica os mais favoraveis prognósticos para o futuro.

Seria muito interessante fazer uma resenha das teorias mais admiraveis que a topologia desenvolveu, mas destas ainda, as importantes são já em número tão grande que devo, aqui também, limitar-me a pouquissimos exemplos, escolhidos entre os mais significativos, de modo a persuadir, eu espero, do excepcional interesse que apresenta esta nova doutrina.

Refiramo-nos, por exemplo, à moderna teoria da dualidade. Como é sabido, em 1895, Poincaré demonstrou na célebre monografia dos «*Annales de l'Ecole Polytéchnique*» que os números de Betti de uma variedade orientável fechada, relativos a dimensões complementares com relação à da variedade, eram iguais. Foi esta uma bela descoberta para a época. Por volta daquêles mesmos anos, Jordan conseguia provar que um logar geométrico dos pontos do plano, homeomorfo a uma circunferência, corta em duas partes o mesmo plano. Esta propriedade sugeriu a denominação de *curva,* que depois foi chamada de Jordan dada a tal logar geométrico. A esta definição foi levado, como se sabe, pelos estudos despertados, em virtude da famosa crítica de Peano à definição anteriormente dada de curva, como de imagem contínua de um segmento ou de uma circunferência (crítica em que demonstra que tal imagem pode, mesmo, preencher um quadrado inteiro ou um cubo).

Pois bem, um exame embora atento destes dois resultados de Poincaré e de Jordan não dá logar à suposição de que haja alguma ligação entre si. O primeiro com efeito, concerne uma propriedade de invariantes de variedades topológicas a muitas dimensões; o segundo, uma propriedade do plano euclideano ou da esfera, com relação a alguns seus sub-conjuntos de pontos, oportunamente definidos.

Nem o espirito mais penetrante podia, então, pensar que estes dois fatos poderiam estar ligados entre si, num conjunto mais compreensivel de conceitos.

Todavia, assim é. Pontrjagin, com efeito, mostrou que as duas mencionadas propriedades são casos particulares de relações, bem mais gerais,também chamadas de dualidade, que se podem atribuir a um único ciclo de idéias! Admiravel e formidavel síntese de fatos geométricos fundamentais, tendo o aspecto mais diferente!

Creio que este exémplo colhido mesmo isoladamente, seja deveras tal que convença, mesmo os mais céticos, da importância e do valor da topologia. Efetivamente o valor de uma teoria se aquilata da sua fôrça coordenadora de fenômenos, isto é, da capacidade de colocar um conjunto de fatos, os quais por si sós não dariam um conhecimento científico dos fenômenos, em perspectivas harmónicas, fazendo com que derivem de poucos e simples princípios.

Mas vamos a outro exemplo. Um dos mais antigos *desiderata* da álgebra é, como se sabe, a resolução das equações algébricas. Do desejo de ter as raízes expressas de determinada maneira, por meio de coeficientes, nasce a orientação de pesquisas que, partindo dos sucessos da escola matemática italiana de 1500 e através dos estudos dos analistas de 1700, vai desaguar na obra de Ruffini, de Abel e de Galois.

Por outro lado, do desejo de ter um valor numérico aproximado das raízes, originaram-se os bem conhecidos métodos de aproximação. Mas, numa categoria bastante importante de problemas, não é preciso conhecer o valor particular das raízes ou a sua exprimibilidade com meios dados; ao contrário, é preciso saber sómente se as raízes existem. Este desejo é satisfeito pelo teorema fundamental da álgebra.

Pois bem, este teorema, demonstrado pela primeira vez, com rigor, há mais de um século, é, como já alguém o fez notar, de natureza essencialmente topológica. O seu enunciado, equivale, por exemplo, a afirmar que certa transformação topológica de uma esfera em si, tem, pelo menos, dois pontos unidos distintos.

Ora é significativo observar que êste mesmo teorema que, encarado segundo as linhas clássicas, é o ponto de chegada de um ciclo secular de idéias e foi digno das meditações do sumo Gauss, seja, de há uns vinte anos a esta parte, para a topologia moderna, o trampolim para outro ciclo de considerações belissimas e fecundas. Quero aludir à pesquisa dos pontos fixos dos homeomorfismos ou das transformações de uma variedade ou ou de um espaço em si. Pesquisa a que se reduz um número enorme de questões de matemática pura e aplicada. E, neste campo, obtiveram-se, nos últimos 15 anos, resultados verdadeiramente belos.

*

Vamos nos ocupar agora, de um assunto um pouco delicado da matemática moderna. Queremos nos referir aos espaços abstractos. São êles os responsáveis pela introdução na matemática de um grande número de denominações novas que talvez tenham contribuido para afastar dela alguns geômetras e a torná-los desconfiados.

Tal abundância de denominações foi devida, a meu vêr, ao desenvolvimento febril da topologia que não permitiu, num primeiro momento, de avaliar e prever todo o valor e o alcance exato das noções que se iam introduzindo. Foram elas o fruto de uma urgente necessidade de pesquisa e de construção e ressentem-se da pressa com que as teorias foram levantadas.

Creio que o tempo, uma experiência maior e uma conciência mais precisa dos fins para os quais foram estas noções introduzidas, farão obra esclarecedora, eliminando o que é supérfluo. [1]

(1) Apraz-me realçar que é, exatamente, na compreensão da necessidade de tal obra que se inspira a recente monografia de A. Weil — *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (Hermann, éditeurs, 1937).

Então poder-se-á ver, ainda melhor do que hoje, o interesse e a importância da nova doutrina.

Em suma que se fez quando se admitiram tais espaços? Fez-se no fundo, isto: analisaram-se as propriedades topológicas do espaço ordinário, deu-se-lhes uma forma racional, eliminaram-se algumas propriedades por acessórias ou menos importantes e depois chamou-se espaço a cada coleção de entidades (os pontos do nosso espaço) entre as quais subsistem propriedades que, abstratamente consideradas, fossem idênticas às preestabelecidas.

O processo que se seguiu é, afinal, muito simples. Ás entidades assim admitidas e às teorias conexas deu-se, logo, uma grande divulgação, nos países em que a topologia já era cultivada e nos quais havia maior preparação par recebê-las.

A maioria dos matemáticos modernos é, hoje, de parecer que êstes espaços abstratos trazem uma grande economia de pensamento. Releva notar o fato fundamental, de que êles agora constituem *o ambiente mais natural da topologia*.

Logo que apareceram, suscitaram, como era de prever críticas e objeções. Creio, todavia, que tais críticas e objeções não subsistam após serena reflexão. São de caráter puramente psicologico e perfeitamente análogas às que se fizeram, por exemplo, quando da introdução dos números complexos ou da quarta dimensão. Estou que o tempo as fará cair por terra.

Parece-me que se deva dar relevo, incidentalmente, a que o adjetivo «abstratos» dado a êstes espaços não é dos mais felizes; pela mesma razão porque não é dos mais felizes, como já ha tempos se observou, o apelativo de «imaginários» dado aos números que ainda levam êste nome.

Tais espaços, não são, em verdade, noções matemáticas mais abstratas do que as outras, assim como os números imaginários não são entidades mais imaginárias do que as outras.

Adjetivos da natureza dos que agora são recordados, foram, às-vezes, usados em matemática, quando se nos depararam, pela primeira vez, noções ou fenômenos novos que despertaram maravilha e tocaram a fantasia de maneira particular. Uma compreensão mais serena e profunda subentra a êste primeiro estado de espirito e permite considerar êsses fenômenos com mentalidade diferente e inserí-los num povo e harmônico ciclo de idéias. E a mim me parece que, quando nos limitamos a considerar fatos espirituais, nesta obra ordenadora e harmonizadora esteja o verdadeiro fim a que deve mirar a ciência, e na nova mentalidade que ela crea a pouco e pouco, o seu mais benéfico fruto.

Como já observou Giambattista Vico, o homem, primeiramente *«sente con animo perturbato e commosso»* depois *«riflette con mente pura»*.

As denominações do gênero das que referimos, provam que o homem passa através dêstes dois estados, ainda que defronte conceitos ou fatos científicos. Tais denominações são creadas, evidentemente, quando nos achamos no primeiro dos estados mencionados: mas é frequente que elas se conservem na linguagem e nos textos, ainda quando já tenha passado êsse estado do nosso espírito.

*

Parece-me util observar que o conceito de espaço sofre com a admissão dos espaços abstratos, uma evolução análoga à já percorrida, antes, pelo conceito de número.

Como é bem sabido, para um matemático moderno, um número não é mais sómente um simbolo que se usa para representar quantas moedas estão na bolsa, ou o comprimento de um segmento, mas, em vez disso, um elemento de uma classe de entidades entre as quais definem-se certas relações e certas operações (ou correspondências) que gosam de determinadas propriedades.

Ora são bem conhecidos os beneficios que deram à matemática as sucessivas extensões do conceito do número, as quais se subordinam ao mencionado princípio.

Uma grande parte dos progressos de matemátida é consequência direta ou remota desta feliz extensão: dão disso exemplo, a teoria das funções de variavel complexa, dos números hipercomplexos, a dos números algébricos, a teoria das algébras, etc. ... Isto no que se refere sómente às consequências especificas e diretas da extensão do conceito de número. As consequências remotas são tais e tantas que não podem ser isoladas e desentranhadas do conjunto das outras teorias, porque, ao fim de contas, são intima parte do próprio espirito das mesmas.

Já ficou patente que a extensão do conceito de espaço propiciada pelos espaços abstratos dá à matemática beneficios do mesmo gênero daqueles provocados pela extensão do conceito de número. A cousa foi sentida tão nitidamente que hoje *há a tendência de fazer análise especialmente nos espaços abstratos.*

Esta orientação é evidentissima em muitos países em que são realizados cursos inteiros inspirados por esta tendência que, de frequente, é quasi exclusiva nos jovens. Ela data de muito poucos anos, mas propagou-se com grandissima rapidez.

*

Seja-me consentido, a esta altura, responder a uma eventual objeção. De vez que, como também eu procurei ressaltar, a admissão dos espaços abstratos constitue, à luz dos exemplos oferecidos pela evolução da matemática, uma creação bastante *natural* do pensamento matemático, poder-se-ia acreditar que tal invenção seja cousa simples e espontânea, porque bastante lógica, quasi como um «ovo de Colombo» e, portanto seja de escasso merecimento.

A tal objeção, responderei observando que, a meu ver, é sempre no terreno da dificuldade psicológica e nunca no da dificuldade lógica que se mede o valor de uma descoberta, uma vez que todas as descobertas sempre se verificaram quando já estavam cientificamente amadurecidas, isto é quando sob o aspeto lógico faltava sómente um passo para alcançá-las. A dificuldade em dar tal passo depende sempre tão só do fato de que opiniões enraizadas ou uma mentalidade instintiva impedem ao homem, não ao homem «lógico», abstração que não existe, mas ao verdadeiro homem, ao homem por inteiro, com os seus preconceitos, de compenetrar-se de como verdadeiramente podem estar as cousas; só porque mudaram inesperada e radicalmente quanto ao modo de pensar, as grandes descobertas foram dificeis de se fazer, e uma vez feitas, são deveras dignas de admiração.

Ora, deve-se considerar que no campo psicológico a invenção dos espaços abstratos não é uma cousa simples e intuitiva, porque é uma profunda mudança de um môdo instintivo de pensar que, afinal, já tinha tradições bastante enraizadas.

Creio que agora resultará clara a razão de ser possível considerar que a admissão destes espaços seja um progresso verdadeiramente importante do pensamento matemático.

*

Vejamos, por fim, um quarto e, para não enfadar, último exemplo das admiráveis teorias que a topologia soube crear. O exemplo já considerado dos espaços abstratos era dado para mostrar a importância lógico-filosófica de alguns conceitos introduzidos com a topologia.

O exemplo que vou citar tem em mira, ao invés disso, dar uma idéia adequada da importância *técnica* de alguns entre êsses conceitos. Trata-se do conceito de *representação continua ou imagem continua,* isto é, transformação dos pontos de um conjunto A nos pontos de um conjunto B mediante uma operação contínua f. Pode ser definida como a operação mais geral que conserva o limite.

Portanto, não parecerá estranho que seja, com frequência, considerada como a operação mais fundamental da análise.

Pois bem, um capítulo verdadeiramente admiravel da topologia, estuda as propriedades desta operação. Elas tem sido objeto, nêstes últimos anos, de tal interesse que sobrelevam, acredito, mesmo o dos homeomorfismos.

Uma representação $f(A)$ de um espaço A sôbre um espaço B, se chama *essencial* quando, para cada ponto b de B existe ao menos um ponto a de A pelo que $f(a)=b$, e quando esta propriedade se mantem qualquer que seja a modificação de f de modo continuo. Para dar interesse à teoria das representações é necessário introduzir esta concepção.

Ora, dados dois espaços ou duas variedades, nasce o problema que consiste em saber se um dêstes A seja capaz de ser representado sôbre o outro B de modo essencial. Se A e B são duas variedades orientáveis e sem contorno da mesma dimensão n, demonstra-se que deveremos ter

$$R_p(A) \geq R_p(B) \ ^{(1)} \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq n-1 .$$

Em geral, afim de que A possa ser representado sôbre B, é preciso que o espaço B seja, como diz bem Hopf, de uma estrutura «mais simples» do que A. Mas que cousa deve significar, *com precisão,* esta locução «mais simples» ainda nos é desconhecido.

Um grupo de questões de alto interesse e que se liga tambem a problemas de topologia clássica, como, por ex. a hipótese de Poincaré (2), concerne o eventual homeomorfismo de duas variedades das mesmas dimensões que se supõem representaveis cada uma delas sôbre a outra de modo particularmente simples.

A êstes quesitos, em geral, não se sabe que responder. Via de regra não sabemos ainda remontar de hipóteses concernentes simples representações a conclusões que se relacionem com os homeomorfismos; em muitos casos somos reconduzidos a variedades cujo homeomorfismo não sabemos provar e que, no entanto, têm todos os invariantes conhecidos iguais.

Um belo quesito é o seguinte: dado um segmento, qual é a sua imagem continua mais geral? Peano mostrou que esta imagem pode ser um quadrado, um cubo ou um hipercubo.

Vê-se logo que, qualquer que seja a função representativa, a imagem de um segmento é conexa, compata e localmente conexa.

Pois bem, um resultado extraordinário, obtido por Hahn e Mazurchiewitz, permite caracterizar, na imensa categoria dos espaços abstratos, as imagens continuas dos segmentos. Estes dois cientistas che-

(1) $R_p(A)$ é o número de Betti das variedades A relativas à dimensão p.

(2) Poincaré aventou a hipótese de que uma variedade a n dimensões, privada de contorno, tendo os mesmos grupos de homologia de uma n-esfera e com o grupo de Poincaré igual à identidade, seja homeomorfa a uma esfera.

garam a demonstrar que a observação precedente se pode inverter, isto é, que *cada espaço abstrato conexo, compato e localmente conexo é a imagem contínua de um segmento.*

A imagem contínua de um segmento assume, portanto, os aspectos mais inesperados e que menos facilmente se podem conceber. Pode ser, por exemplo, um paralelótopo do espaço hilbertiano e espaços muito mais complicados.

O referido resultado é, certamente, um dos mais interessantes da análise moderna.

Naturalmente a dimensão que, na geometria clássica, tinha permanecido um conceito, por assim dizer, tabú, nestas novas teorias é bem maltratada. Mas, por pouco tempo, pois dois interessantes teoremas de Hurewicz vem regular, com um critério muito simples, as variações dimensionais que podem sofrer as imagens topológicas de um espaço.

Eis, agora, como conceitos de matemática clássica vêm em nossa ajuda. A imagem de um segmento é, como já se disse, um espaço compato e conexo e localmente conexo. Os primeiros dois adjectivos são, frequentemente, considerados como equivalentes ao de «contínuo».

A imagem de um segmento é, pois, um espaço contínuo localmente conexo. Mas, se tomo tal espaço e procuro a sua imagem contínua genérica, obtenho, evidentemente, ainda um espaço contínuo localmente conexo. A esta altura os topólogos não se fizeram esperar para concluir. Partindo de uma curva e aplicando uma representação contínua, obtem-se um espaço contínuo localmente conexo; aplicando a êste espaço a mesma operação obtem-se novamente um espaço com as mesmas propriedades; portanto, êstes espaços constituem ùma categoria, por assim dizer, fechada, com relação à operação de transformação contínua, porque tais transformações mudam um elemento de determinada classe em um elemento da mesma classe. E de vez que entre êsses elementos estão as curvas ordinárias que podemos tomar por modelo dos conjuntos capazes de serem obtidos, bôa parte dos topólogos chama logo de *curvas contínuas* aos elementos de tal classe, isto é, os segmentos ou as suas imagens, as quais são os contínuos localmente conexos.

Assim, por meio de conceitos adequados, conseguiu-se estender pontes entre perspectivas ilimitadas de fatos geométricos que ha bem pouco tempo a mente humana nem chegara a conceber.

*

Poder-se-ia, agora, perguntar: é verdade que a topologia apresenta as mais amplas perspectivas de fatos geométricos e introduz concepções capazes de dominá-los, mas não apresenta além disso, problemas simples, que de relance, porém, parecem-nos fundamentais e que concernem figuras particulares, com que estamos familiarizados? Problemas que os franceses chamariam «bien posés» de enunciado elementar e que persuadem logo, mesmo aos leigos, graças à à sua simplicidade?

Sim! Tais problemas encontram-se até a cada passo e já observei, ao princípio, que quando a topologia surgiu, foi frequentemente inspirada, até, por problemas de carácter tão simples a ponto de serem incluidos nos manuais de matematica divertida. Basta que se pense nos problemas das sete pontes de Koenigsberg, nos vários problemas concernentes aos «graphs», ou complexos de uma só dimensão, no problema das quatro côres; problemas que muita vez parecem ser dados pela natureza para desafio e escárneo da presunção humana, visto que, alguns dêles, ainda não puderam ser resolvidos, como por exemplo o das quatro côres; argumento êste último sôbre o qual já se fizeram estudos que sobem a mais de uma centena!

Mas desejo aqui, referir-me como última cousa, a uma categoria de problemas de enunciado bastante simples no tocante às representações contínuas: problemas sôbremodo sugestivos e que não são praticamente inatacaveis, como alguns dos precedentes, porque já em alguns casos especiais, foram resolvidos.

Aludo, por exemplo, a êste elegantíssimo problema: Dadas duas esferas S_m e S_n a m e n dimensões, sendo $m>n$ quando é que S_m pode ser representada essencialmente sôbre S_n?

Creio que o bom gôsto e a simplicidade dêste problema não escapará a ninguem [1].

Pois bem, nasce daí um problema dependente dos inteiros m e n. Este problema, no caso geral, não está ainda resolvido, mas possuimos, a seu respeito, muitos resultados particulares, para classes de tais pares de números. Eis, a titulo de exemplo, duas soluções:

1.°) Um resultado afirmativo de Hopf, segundo o qual

---

(1) Eis o que pensa, a respeito, o eminente topólogo Hopf: *Je considère la réponse générale à cette question comme une tâche des plus importantes et des plus attrayantes; non seulement en ce qui concerne la théorie, mais aussi parce que nous dévrions connaître complètement et sous chaque point de vue des figures aussi simples et aussi importantes que les sphères!*

(2) Resultado comunicado ao Congresso Internacional dos Matemáticos, de Oslo, em 1936.

Outros resultados, sôbre êste assunto, foram recentemente obtidos por Freudenthal.

a representação é possível quando $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$ e $m=4k-1$;

2.°) Um resultado negativo de Pontrjagin [2] quando $m=n+2>4$.

Acredito ter mostrado, com êstes exemplos, como a topologia possa satisfazer, e do melhor modo, também a quesitos do tipo que acabamos de assinalar.

*

Considero que os exemplos referidos, conquanto só possam dar uma idéia muito fragmentária do desenvolvimento atual da topologia, sejam capazes de persuadir, completamente, acerca da evidente verdade daquela afirmação que antecipamos: isto é, que ela constitue o meio mais rápido para entrar na posse de muitos dos conceitos mais importantes da matemática moderna e de um grande número das suas teorias mais significativas.

Com isto parece-me ter dito muita cousa. Entretanto nêste ponto, uma grande parte de topólogos sentiria que não disse tudo.

É que a topologia, como toda teoria que não só amplia e aperfeiçoa os conhecimentos técnicos, como tambem transformam profundamente a visão, e a própria mentalidade científica do pesquizador, exerce sôbre o ânimo dos seus cultores uma fascinação toda particular.

Ela provocou um «pathos» bem sensível nos centros em que a topologia está realizando os seus progressos mais significativos e um interesse que se projeta alem do circulo dos seus cultores; fato êste bastante raro para uma teoria matemática.

Lembro, a êste respeito, como em Princeton, das conferências de topologia de carácter não muito particular, participava sempre um auditório notavelmente mais vasto e interessado do que o normal, constituído não sómente de matemáticos. Isto não é cousa de somenos importância, ainda que não produz para a ciência efeitos imediatos, porque é, precisamente, inspirando simpatia e confiança em círculo mais vasto possível de pessoas inteligentes que um ramo da ciência (sôbretudo quando, como a matemática, nem sempre dá para logo, aplicações práticas) provoca aquela compreensão e, onde fôr preciso, aqueles auxilios materiais e morais que impedem a sua decadência e que estimulam homens de valor a dedicarem-se ao seu desenvolvimento.

Estou que sómente outra teoria contemporânea possa, no campo físico-matemático, orgulhar-se de ter a seu crédito a formação de uma análoga paixão: a física atômica. Ambas estas teorias tiveram, em consequência de descobertas inovadoras, um desenvolvimento simultâneo rapidissimo e transformaram respectivamente os dois campos da matemática e da física teórica.

É lei da natureza que onde é mais difícil a vida, aí, às vezes se desenvolvem os organismos mais bem dotados. O período de formação de uma teoria nova é sempre árduo para o trabalho científico, porque nesta fase da pesquisa se enturvam as analogias que são a guia perene do cientista. Mas, em compensação o mistério de que se cerca o ambiente, excita de tal modo a sensibilidade e a fantasia que supre, em parte, a experiência que falta.

Com efeito, em tal ambiente apaixonado se desenvolvem frequentemente as personalidades científicas fora do comum. Estas abundam entre os cultores da topologia.

Entre os muitos que merecem ser lembrados, citarei para ser breve, um só: Leon Pontrjagin.

Este jovem é um dos mais profundos geômetras da última geração. Pesa sôbre êle a terrivel sina de ser cego, como me dizem, desde o nascimento; exemplo, talvez, único entre os matemáticos e, com maior razão entre os geômetras. Êle dita à irmã os resultados de pesquisas sôbre cousas que nunca pôde ver; pesquisas, muitas das quais, deram um impulso vivo e essencial ao progresso da topologia.

É conhecido o agarramento, todo especial, que os topólogos têm para a topologia.

A propósito, lembro-me da singular resposta que me foi dada por valoroso topólogo, apreciado, também, por seus trabalhos de geometria diferencial, ao perguntar-lhe se gostaria de volver aos seus estudos precedentes: «voltar a tais estudos parecer-me-ia caminhar para trás».

Essa resposta não deixou de me surpreender no primeiro momento.

É fato evidente que todo o matemático embora tendo trabalhado na topologia, pode entregar-se a pesquisas não topológidas, sem por isso, diminuir de modo algum o interesse e a importância da própria atividade. Parece tão claro que o interesse de um trabalho científico decorre principalmente das idéias novas que êle desvenda ou dos resultados que apura, isto é, das novas ligações que estabelece entre idéias e conceitos já determinados! Mas, um topólogo conserva sempre, mesmo em pesquisas não topológicas a nova mentalidade devida aos seus conhecimentos de topologia. A topologia, em suma, proporciona ao matemático um modo de vêr os problemas ao qual não mais renuncía, mesmo quando se dedica a outras questões. Neste sentido, provàvelmente, pode justificar-se a frase que acima recordei.

Nos ambientes em que a topologia é mais cultivada são bem comuns frases entusiásticas que é oportuno referir. Tais frases são, por exemplo: «êste é o século da topologia», ou «nada há na matemática, além da álgebra e da topologia».

É preciso que nos detenhamos no exame, ao menos da primeira frase. Outras vezes, com efeito, acreditou-se poder sintetizar a operosidade desenvolvida na matemática, em dado periodo histórico, esquematizando-a num dado dominio da própria matemática. Assim, o século passado teria sido o século da teoria das funções e o século XVIII o do cálculo infinitesimal.

Estas afirmações tomadas ao pé da letra, estão evidentemente bem longe de ser exatas, porque é óbvio que cada época deu a sua contribuição para o progresso de muitas teorias diferentes da matemática e não de uma só. No entanto frases dêsse gênero sempre foram ouvidas e têm uma razão de ser, ou seja, que é verdade que nos varios periodos históricos os cientistas foram, muita vez atraídos por algumas teorias que exerceram fascinação particular e às quais atribuiram maior importância.

Entre as partes de que se compõe uma ciência como a matemática, quando estas são abstratamente consideradas, não se pode estabelecer uma hierarquia. Com efeito, qualquer raciocínio, qualquer declaração tendo tal escopo, conduziu sempre a afirmações contraditorias e choca-se, frequentemente, contra o sentido de harmonia em face do belo que cada um tem em si.

Mas, as cousas mudam se as várias teorias científicas em logar de serem consideradas fora do tempo e do ambiente científico em que se desenvolveram, se consideram no seu desenvolvimento histórico.

Muitas vezes uma teoria nova, cuja introdução tenha sido desejada por muito tempo, se desenvolve com grande rapidez, muito maior do que a de outras, quasi como um organismo tambem biologicamente jovem; e, por assim dizer, impregna de si mesma, por algum tempo quasi todas as partes da matemática que dela recebem novos meios e alcance. *A topologia acha-se, agora, em semelhante periodo de desenvolvimento.*

Esta doutrina baseia-se, em grande parte em conceitos que preexistiam na matemática de ha algum tempo. Portanto, poderia parecer estranho que se desenvolva principalmente agora e alguem poderia vêr nisso um sinal de que êste desenvolvimento seja favorecido ainda por fatores não intrinsecos, como, por ex., uma espécie de «moda».

A meu vêr, entretanto, nada está mais longe da realidade do que esta opinião.

Parece-me que o ritmo do desenvolvimento, através da história das várias partes de uma ciência, tenha sempre, ainda quando não transparece que seja devido a evidentes necessidades, uma intrínseca razão de ser. As fases de desenvolvimento do pensamento científico são muito frequentemente determinadas pelo instinto de tornar o mais possìvelmente eficaz o trabalho de pesquisa. O fato de que, depois de se ter chegado a possuir certos meios de pesquisa, se prefira estudar certas partes da ciência em logar de outras que também teriam possivel desenvolvimento, estou que se deva atribuir à necessidade de utilizar ao máximo o pensamento humano naquele modo com que se pensa de obter, com o tempo e com os meios de que em dado momento se dispõe, a maior cópia de resultados. Trata-se, portanto, de uma necessidade de carácter sério, cuja satisfação favorece de certo o progresso científico.

A topologia tomou tal impulso que faz brotar e aceitar a referida frase sómente porque intuiu que constituia um campo de pesquisas no qual se trabalha com o maior aproveitamento para o progresso de tôda a matemática.

O fato de que, especialmente agora, a topologia seja cultivada não nos deve espantar: porque a ciência não se subordina nunca, no seu desenvolvimento, a esquemas abstratos, mas àquelas leis que mais a fazem prosperar.

A frase acima mencionada não é pois, de se atribuir a unilateralidade ou exaltação, como alguem numa primeira hora, poderia presumir, mas é de preferência, um entusiástico grito de ação, fruto de intuição feliz.

Para terminar, quero observar que um aspeto exterior, mas impressionante, do rápido progresso da topologia é a atual absorvente difusão geográfica das suas escolas.

Com efeito, há, hoje, escolas de topologia nos seguintes países: Alemanha, Suiça, Dinamarca, Holanda, Inglaterra, Russia, China, Japão, Estados Unidos. Houve, tambem, em Viena, Praga e Varsóvia. As melhores são as dos Estados Unidos, a russa e a polonesa. Nesses países quasi todos os jovens que estudam matemática dedicam-se, no todo ou em parte à topologia ou, pelo menos, conhecem-na bem. Há, ainda, cultores isolados na Itália, na França e em quasi todos os outros países. Estes são, em complexo, centenas. A topologia é, portanto, hoje em dia, a teoria matemática recente, mais difundida e geogràficamente mais universal.

Cerca de 40 % dos trabalhos de geometria não elementar, concernem a topologia, bem como a maioria dos trabalhos de geometria, escritos por autores jovens.

Também isto é sinal mais claro de que por muito tempo o desenvolvimento da geometria e de bôa parte da matemática depende indissoluvelmente do da topologia.