a adesão, na categoria de sócios extraordinários, de trinta e sete Companhias de Seguros. Naquela mesma data o número de sócios ordinários elevou-se a 81 dos quais os primeiros 78 são considerados fundadores.

Os primeiros corpos gerentes estão assim constituídos:

Mesa da Assembleia Geral: *Presidente,* Victor Hugo de Lemos; *Vice-Presidente,* A. Castanheira Nunes; *Secretários,* Álvaro Alexandre e J. Matos Correia.

Direcção: *Presidente,* Caetano M. Beirão da Veiga; *Vice-Presidente,* Frederico Caroça de Figueiredo; *Secretário,* Carlos A. Fernandes Carvalho; *Tesoureiro,* A. da Costa Miranda; *Vogal,* A. Stichini Vilela.

Conselho Fiscal: *Presidente,* José A. Queiroz de Barros; *Vogais,* J. J. Pais Morais e A. Tavares Júnior.

Comissão do Boletim: *Presidente,* Rinaldo Campeão; *Vice-Presidente,* Frederico Macedo Santos; *Vogais,* A. da Costa Miranda, António Leão e Mário Ferreira Braga.

A Gazeta de Matemática regista com prazer a criação do Instituto, cuja actividade científica passará a referir, e deseja, vivamente, êste novo centro de estudos contribua para o progresso das matemáticas actuariais.

Cientistas estrangeiros em Portugal

O Professor da Universidade de Cambridge, Sir William Lawrence Bragg, prémio Nobel de Física, especialista no estudo da estrutura da matéria pelos raios X, veio a Portugal realizar uma série de conferências em Lisboa e Pôrto.

Os temas das lições expostas em Lisboa, pelo ilustre cientista, foram:

«A Optica dos Raios X»,

«Alguns problemas do estado metálico» e «Conseqüências científicas da descoberta de Roentgen».

Estas conferências efectuaram-se respectivamente no anfiteatro de Física da Faculdade de Ciências, na Academia das Ciências e no Instituto Britânico em Lisboa.

L. S.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DA EQUAÇÃO DE DIOFANTO

por ***José da Silva Paulo***

Como é sabido a equação de Diofanto $ax+by=c$, onde a, b e c são inteiros positivos e a e b primos entre si, admite soluções inteiras da forma $x=\alpha+bm$, $y=\beta-am$ onde α,β é uma solução inteira e m um inteiro qualquer. Sabe-se também que o teorema de Catalan indica o número de soluções inteiras não negativas, com uma certa indeterminação, pois afirma que o seu *número é igual ao maior inteiro contido em* c/ab, *ou êsse inteiro aumentado de uma unidade.*

No entanto o número exacto de soluções inteiras não negativas daquela equação pode determinar-se pelo método a seguir exposto, onde se seguiu de perto a exposição de *J. V. Upensky* e *M. A. Heaslet* no seu livro *Elementary Number Theory.*

Seja então a equação

$$(1)\qquad ax+by=c$$

e x,y uma sua solução em inteiros não negativos. Dividamos x e y respectivamente por b e a, obtém-se:

$$(2)\qquad x=b\xi+r\,,\ 0\leq r<b\,,\quad x=a\eta+s\,,\ 0\leq s<a\,.$$

Por substituïção em (1) vem:

$$(3)\qquad ab\,(\xi+\eta)+ar+bs=c\,.$$

Determinemos o cociente e o resto da divisão de c por ab. Será

$$c=ab\cdot q+R\,,\quad 0\leq R<ab$$

ou seja

$$ab\,(\xi+\eta)+ar+bs=ab\cdot q+R\,.$$

Ora $ar+bs\geq 0$, e como $s<a$ e $r<b$ é também $ar+bs<2ab$; logo, terá que ser ou $0\leq ar+bs<ab$ e então é

$$(4)\qquad ar+bs=R$$

e

$$(5)\qquad \xi+\eta=q$$

ou $ab<ar+bs<2ab$ [1] e será

$$(6)\qquad ar+bs=ab+R$$

e

$$(7)\qquad \xi+\eta=q-1\,.$$

Note-se que q é o maior inteiro contido em c/ab.

[1] É fácil ver que $ar+bs\neq ab$, por serem a e b primos entre si e $r<b$ e $s<a$.

Conclui-se então que uma vez conhecidas as soluções inteiras não negativas de (5) ou (7) e as soluções inteiras não negativas $s<a$, $r<b$ de (4) ou (6), teremos as soluções inteiras não negativas de (1) por intermédio de (2).

Das equações:

$$ar+bs=R \tag{4}$$

e

$$ar+bs=ab+R \tag{6}$$

só uma poderá ter *uma* solução inteira não negativa $r<b$, $s<a$. De facto se fôr r_0, s_0 uma tal solução, por exemplo, de (4), por um lado esta equação não pode ter outra solução naquelas condições, por as soluções gerais de (4) serem dadas por $r=r_0+bm$ e $s=s_0-am$; por outro lado (6) não terá soluções $s<a$, $r<b$ pois que sendo $ar_0+bs_0=R$, será

$$ar_0+bs_0+ab=R+ab$$

ou

$$a(r_0+b)+bs_0=R+ab$$

e então as soluções inteiras de (6) seriam

$$r=r_0+b-bm\,, \quad s=s_0+am \tag{8}$$

onde m é um inteiro qualquer. Ora o primeiro inteiro não negativo r menor que b dado por (8) obtém-se, fazendo ali, $m=1$ e para êste valor é $s=s_0+a$ maior que a.

Do mesmo modo se provaria que se (6) admitir uma solução inteira não negativa $r'_0<b$, $s'_0<a$, essa solução é única e (4) não admite soluções naquelas condições.

Temos assim dois casos a considerar: 1) $ar+bs=R$ tem uma solução em números inteiros não negativos $s_0<a$, $r_0<b$; 2) $ar+bs=R$ não tem soluções naquelas condições.

No primeiro caso é $\xi+\eta=q$, equação que tem exactamente $q+1$ soluções

$$\xi=0,\quad 1,\quad 2,\cdots,q$$
$$\eta=q\,,q-1\,,q-2\,,\cdots,0$$

e a equação (1) tem $q+1$ soluções.

No segundo caso é $\xi+\eta=q-1$, equação com q soluções

$$\xi=0,\quad 1,\quad 2,\cdots,q-1$$
$$\eta=q-1\,,q-1\,,q-3\,,\cdots,\quad 0$$

a que correspondem q soluções de (1); em qualquer dos casos será $x=b\xi+r_0$, $y=a\eta+s_0$.

Resumindo: a equação $ax+by=c$, onde a,b,c são inteiros positivos e a e b, primos entre si, tem ou q ou $q+1$ soluções inteiras não negativas, segundo o teorema de Catalan, conforme a equação $ar+bs=R$ (R é o resto da divisão de c por ab), *não tem* ou *tem* soluções inteiras não negativas $r_0<b$ e $s_0<a$.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1945)

I. S. C. E. F. — Agôsto de 1945.

2115 — São dados dois pontos fixos A e B do plano à distância de 12 cm. e um ponto C do segmento $\overline{AB}$ à distância 3 cm. de A; levante-se por C a perpendicular a AB. Determinar sôbre essa perpendicular um ponto P tal que o segmento $\overline{AB}$ seja visto sob um ângulo de 60° e diga qual o método ou métodos empregados para essa determinação. Discuta a solução. R: *O lugar geométrico dos pontos do plano dos quais um segmento* $\overline{\mathrm{AB}}$ *é visto sob um ângulo* α *é constituido por dois arcos de circunferência passando por* A *e* B, *simétricos em relação a* $\overline{\mathrm{AB}}$. *O centro dum dêstes arcos é o ponto de intersecção da mediatriz de* $\overline{\mathrm{AB}}$ *com a perpendicular levantada numa das extremidades dêste segmento, à recta que faz com* $\overline{\mathrm{AB}}$ *o ângulo dado* α. *(Vd. por exemplo,* Elementos de Geometria—*3.° ciclo—de Nicodemos e Calado). Construam-se estes arcos sendo* $\alpha=60°$ *e* $\overline{\mathrm{AB}}=12$ cm. *Os pontos que satisfazem à questão posta são portanto os pontos de intersecção dêste lugar geométrico com a perpendicular a* $\overline{\mathrm{AB}}$ *levantada pelo ponto* C. *As soluções são duas e o método empregado é o dos lugares geométricos.*

2116 — Calcular e simplificar

$$S=\frac{1}{2^n}\left[\binom{9}{5}:\binom{10}{6}+\binom{7}{3}:\binom{8}{4}+\binom{5}{1}:\binom{6}{2}\right]$$

e determinar o menor valor de n para o qual é $S<\frac{1}{10^4}$. R: $\mathrm{S}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{43}{30}$, $\mathrm{n}=14$.

2117 — Determinar os valores reais de x para os quais é verificada a desigualdade $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}>\frac{1}{3}$. De entre êles indicar, se existirem, os inteiros e os racionais da forma $\frac{a}{10}$ onde a é um inteiro positivo menor que 20. R: $1<\mathrm{x}<9-\sqrt{58}$ e $2<\mathrm{x}<9+\sqrt{58}$. *Os inteiros que satisfazem ao problema são* $\mathrm{x}=3,4,\cdots16$. *Os racionais da forma* $\frac{\mathrm{a}}{10}$ *com* a *inteiro e* $0<\mathrm{a}<20$ *são* $\mathrm{x}=1{,}1$, $1{,}2$ *e* $1{,}3$.

2118 — Diga em que consiste o método de transformação por semelhança e exponha os conceitos e as propriedades em que êle se baseia.

2119 — Dados dois números inteiros cujas decomposições em factores primos são $n=p^a\cdot q^b$, $n'=p^{a'}\cdot q^{b'}$ ¿como estão relacionados os números de divisores de n e n' com o número de divisores do produto $n\cdot n'$? Justifique a resposta. R: *Sejam* N_1, N_2 *e* N_3, *respectivamente os números de divisores de* n, n′ *e de* $n\cdot n'=p^{a+a'}\cdot q^{b+b'}$; *ter-se-á:* $N_1=(a+1)(b+1)$, $N_2=(a'+1)(b'+1)$ e $N_3=(a+a'+1)(b+b'+1)=N_1+N_2+ab'+a'b-1$.

2120 — ¿Uma equação biquadrada de coeficientes reais em que os coeficientes de x^4 e x^2 têm o mesmo sinal, pode ter tôdas as raízes reais? Justifique a resposta.

Soluções dos n.os 2115 a 2119 de Orlando Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR—MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de freqüência — 1945.**

2121 — Quais os intervalos em que é uniformemente convergente a série $\sum \frac{x^n}{\log(n+1)}$? R: *Apliquemos o critério d'Alembert:* $\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}$. *Ora* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}=1$ *pois* $1-\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}=$ $=\frac{\log\frac{n+2}{n+1}}{\log(n+2)}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log(n+2)}$ *tende para* 0 *com* 1/n, *como fàcilmente se vê. Então* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$ *e o intervalo de convergência da série é* $(-1,1)$. *Ela é portanto uniformemente convergente em qualquer intervalo interior a* $(-1,1)$. *No extremo superior* $(x=1)$ *a série diverge, por ser* $\frac{1}{\log(n+1)}>\frac{1}{n+1}$ *e divergir* $\sum 1/(n+1)$. *Não se pode pois aplicar o teorema de Abel que daria a convergência uniforme no intervalo* (0,1).

2122 — Qual a circunferência que passa pela origem e define com $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ um sistema de eixo radical $y-x+1=0$? (Coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Pode considerar-se o eixo radical como uma das circunferências do feixe. Multiplicando por um parâmetro ambos os membros da sua equação e somando à equação da circunferência dada vem* $x^2+y^2-(h+2)x+(h-4)y+h+1=0$ *que para cada valor de* h *dá uma das circunferências do feixe. Qualquer delas define com a circunferência dada o próprio feixe de eixo radical* $y-x+1=0$. *A que passa pela origem é aquela cuja equação carece de têrmo independente, portanto a que corresponde a* $h=-1$, *isto é* $x^2+y^2-x-5y=0$, *que é o resultado pedido.*

2123 — Qual a natureza do lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta $x=0$ e da circunferência de centro $(a,0)$ e raio r? ($r<a$; coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Seja* (x, y) *um ponto do lugar geométrico. A distância dêste ponto à recta* $x=0$ *(eixo das ordenadas) é a própria abcissa do ponto,* x. *A distância de um ponto a uma circunferência é o valor absoluto da diferença entre o raio da circunferência e a distância do ponto ao centro da circunferência. No caso presente, como* $r<a$, *a circunferência e a recta dada não se intersectam, nenhum ponto interior à circunferência pode ser equidistante desta e da recta; o lugar geométrico é pois, exterior à circunferência e por isso na diferença a considerar o diminuendo é sempre a distância do ponto* (x, y) *ao centro* (a, 0) *e o diminuidor o raio da circunferência. A distância de* (x,y) *a circunferência é pois* $\sqrt{(x-a)^2+y^2}-r$ *e a equação do lugar geométrico pedido é*

$$x=\sqrt{(x-a)^2+y^2}-r \quad ou \quad x+r=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Quadrando: $x^2+2rx+r^2=x^2-2ax+a^2+y^2$ *ou* $y^2-2(a+r)x+a^2-r^2=0$; *o lugar geométrico é pois uma parábola.*

2124 — Quais são os pontos próprios ou impróprios de continuïdade de $f(x)=\frac{x^2}{e^x-2}$? R: *As funções* x^2 *e* e^x-2 *são definidas e contínuas em todos os pontos próprios mas a divisão não é definida quando o denominador se anula, isto é, quando* $x=\log 2$. *São pois de continuïdade todos os pontos próprios excepto* $x=\log 2$. *Haveria ainda ponto impróprio de continuïdade se existisse e fôsse finito* $\lim f(x)\ (x\to\infty)$. *Ora tal não sucede porquanto* $\lim\frac{x^2}{e^x-2}=-\infty\ (x\to\infty)$.

Soluções dos n.os 2121 a 2124 de Renato Pereira Coelho.