

PROBLEMAS

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1342 — Desenhar três circunferências de raios proporcionais a h , k e l , de modo que cada circunferência seja tangente às outras duas e a dois lados de um triângulo de que é dada a área S . R: *Desenhem-se três circunferências, C_1 , C_2 e C_3 tangentes entre si duas a duas e de raios respectivamente iguais a h , k e l ; desenhe-se, em seguida, o triângulo T' tal que cada circunferência seja tangente a dois dos seus lados. Vê-se facilmente que a figura constituída por T' , C_1 , C_2 e C_3 é semelhante à figura pedida, bastando-nos, portanto, para construir esta, determinar a razão de semelhança. Seja S dada pelo quadrado de lado $a = \sqrt{S}$ e determine-se o lado a' do quadrado equivalente a T' , procedendo, por exemplo, do modo seguinte: constrói-se o triângulo rectângulo em que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa são uma altura de T' e metade do lado correspondente; a altura deste triângulo rectângulo relativa à hipotenusa é precisamente a' . Visto a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes ser igual ao quadrado da razão de semelhança, a razão de semelhança entre figura pedida e a figura constituída é igual a a/a' . Os raios das circunferências pedidas são respectivamente ha/a' , ka/a' , la/a' , que podem determinar-se por aplicação do lema de Thales.*

Solução de José Morgado

1434 — Calcular $I_{m,n} = \int_m^n \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}}$ (m, n inteiros positivos). R: $E' I_{m,n} = \int_m^n \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}} = \int x^n (a+bx)^{-1/2} dx$.

Faça $a+bx = t^m$, donde $x = (t^m - a)/b$ e $dx = m/b \cdot t^{m-1} dt$.

$$\begin{aligned} \text{Substituindo, vem } I_{m,n} &= \frac{m}{b^{n+1}} \int (t^m - a)^n t^{m-2} dt = \\ &= \frac{m}{b^{n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} a^p \int t^{m(n-p+1)-2} dt = \\ &= \frac{m}{b^{n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} a^p \frac{t^{m(n-p+1)-1}}{m(n-p+1)-1} + c \quad \text{ou:} \\ I_{m,n} &= \frac{m}{b^{n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} a^p \frac{(a+bx)^{m(n-p+1)-1/m}}{m(n-p+1)-1} + c. \end{aligned}$$

Solução de José Machado Gil (da Barquinha)

1555 — Circunscrever um tetraedro a um tetraedro dado cujas faces passem por quatro rectas dadas. R: *Sejam r_1, r_2, r_3, r_4 as rectas dadas e A_1, A_2, A_3, A_4 os vértices do tetraedro dado e seja (r_i, A_j) o plano definido pela recta r_i e pelo ponto A_j . O problema reduz-se a construir conjuntos de quatro planos (r_i, A_j) tais que em cada conjunto se tenha uma permutação dos índices i e uma permutação dos índices j . Há, quando muito, $4! = 24$ soluções, que podem obter-se escrevendo os termos do desenvolvimento do determinante simbólico*

$$\begin{vmatrix} (r_1, A_1) & (r_2, A_1) & (r_3, A_1) & (r_4, A_1) \\ (r_1, A_2) & (r_2, A_2) & (r_3, A_2) & (r_4, A_2) \\ (r_1, A_3) & (r_2, A_3) & (r_3, A_3) & (r_4, A_3) \\ (r_1, A_4) & (r_2, A_4) & (r_3, A_4) & (r_4, A_4) \end{vmatrix}$$

Solução de José Morgado

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

49 — TORROJA, EDUARDO — Lecciones elementales de elasticidad con aplicación a la técnica de la construcción. XVI+326 pgs. (Publicaciones de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puentes). Madrid, 1945. Editorial Dossat.

La resistencia de materiales es, como se sabe, una ciencia matemática, que nació el día en que Galileo se propuso determinar la resistencia de una viga empujada en un muro. Pero no basta con etiquetar de matemática a una teoría para que sea, sin más,

utilizable. En nuestro caso se precisa, además, que dicha teoría sea sencilla y de aplicación económica, es decir que para calcular un cierto elemento constructivo no se requiere un trabajo que exceda a una determinada fracción de su precio de coste.

Por otro lado, es notorio que dicha ciencia matemática es insuficiente llegado el momento de elegir entre diversas formas posibles la que mejor se adapta a las condiciones prefijadas y en este hallazgo de la idoneidad reside el secreto de la intuición del ingeniero o

arquitecto que, merced a tal decisión imprime la huella de su personalidad a la obra que proyecta.

Hooke, Joung y Navier han sido los fundadores de la Teoría de la resistencia de materiales, que al desarrollarse ha dado origen a la teoría matemática de la elasticidad, estudiada por el ingeniero de caminos español Torroja, en estas *Lecciones*, con un excelente sentido pedagógico. La orientación de la obra hacia la técnica de la construcción está claramente marcada en todo el texto y explícitamente desarrollada en su tercera parte — más de 100 páginas — en donde se estudian diversos casos prácticos tales como los de piezas prismáticas sometidas a tracción simple, a torsión y a flexión, dándose la expresión general de la energía elástica en la pieza prismática y determinándose las reacciones hiperestáticas en piezas empotradas en sus extremos.

Otros problemas de gran interés en construcción, tales como la presa de gravedad de perfil triangular, las sollicitaciones de cuerpos cilíndricos en torno a su eje, los aperturas producidos por taladros y entalladuras, y los estudios fundamentales del reparto de cargas sobre el terreno bajo las cimentaciones son estudiadas en sendos capítulos donde la sencillez y claridad de exposición no dejan nada que desear.

En el último capítulo de esta tercera parte se aborda la cuestión de la placa plana semi-indefinida con carga concentrada en el borde y normal a él, utilizándose, con elegancia, las funciones de variable compleja y constituyendo una excelente introducción a obras que como la de Nádai resulta imprescindible en la biblioteca de todo ingeniero que no rinda culto a la Rutina.

En las partes primera y segunda el autor expone la teoría de la elasticidad tri y bi dimensional incluyendo

en la última un interesante capítulo sobre la Fotoelasticidad.

Aun cuando el autor declara en el prólogo, con excesiva modestia, que su obra carece de originalidad y de aportación personal, no vacilamos en recomendarla a todos los ingenieros, arquitectos y estudiantes técnicos que deseen conocer cuáles son los problemas actualmente planteados y aún sin resolver en teoría de la elasticidad así como las soluciones a los clásicos.

Al final de la obra se incluye un resumen general y un vocabulario, amén de un índice de notaciones y fórmulas que contribuyen a aumentar y no en pequeña parte, la utilidad de las *Lecciones*.

La presentación de la obra es insuperable como corresponde a la tradición de la Editorial Dossat.

J. Gallego Díaz

50 — SMART, W. M. — Text-Book on Spherical Astronomy — Cambridge — 1944.

Trata-se da quarta edição (1944) do tratado de Astronomia Esférica do Prof. W. M. Smart, da Universidade de Glasgow. É este livro suficientemente conhecido dos nossos estudantes de Astronomia para nos dispensar de pormenorizadas referências: na Faculdade de Ciências de Lisboa tornou-se, desde a sua primeira edição (1931), um livro de consulta frequente.

É particularmente recomendável no estudo das órbitas dos sistemas binários e dos modernos métodos fotográficos de determinação dos movimentos próprios e paralaxes estelares que o clássico e, ainda hoje, precioso Chauvenet não podesse já conter. Nesta quarta edição é de notar apenas a introdução do último valor da paralaxe solar (1941).

A. B. S.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES DE MATEMÁTICA

NACIONAIS

Portugaliae Mathematica — Vol. 4, Fasc. 4 :

Guido Ascoli — *Sopra un'equazione funzionale.*

António Monteiro — *Caractérisation de l'opération de fermeture par un seul axiome.*

J. Albuquerque — *Ensembles de Borel.*

Enrique Vidal — *Sobre una representación equivalente de una porción de superficie curva sobre um plano.*

A. de Mira Fernandes — *Connessioni finite.*

Henryk Schärf — *Intégrale et mesure dans certains espaces algébriques.*

J. Albuquerque — *Ensembles de Borel (Suite).*

Guy Hirsch — *Sur les groupes d'homologie de certains complexes de recouvrement.*

H. Hadwiger — *Ueberdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen.*

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise geral :

N.º 3. «Algebra Moderna» — 1 — Grupos — 2.ª edição — por José Morgado.

N.º 14. «Teoria Geral da Medida» — 3 — Medida à Borel — Introdução — Classe B — por L. Neves Real.

N.º 15 — «Teoria Geral da Medida» — 4 — Medida à Borel — De finição e Teoremas Gerais — por L. Neves Real.

N.º 16. «Teoria Geral da Medida» — 5 — Medida à Lebesgue e Medida à Carathéodory — por L. Neves Real.