que tiene la ventaja de que puede comprobarse sin tener en cuenta los valores de A y ρ. En efecto: si tomamos como abscisas los valores n y como ordenadas $\log (n^{\frac{3}{2}} R_n)$, los puntos obtenidos, cuando $n \to \infty$, se aproximan a la recta $y = x \log \frac{1}{\rho} + \log A$. Ello da, además, el medio de obtener valores aproximados de ρ y A.

Leyes del tipo de la (1), ha obtenido Pólya para diversas series homólogas, que pueden estudiarse en sus memorias (véase la bibliografía, al final).

Aquí vamos a limitarnos para terminar a hacer algunas indicaciones relativas al método para obtenerlas.

Consideremos la serie de potencias:

$$(4) \qquad r(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots + R_n x^n + \cdots$$

Se comprueba fácilmente que $r(x)$ verifica la siguiente ecuación funcional:

$$(5) \qquad r(x) = 1 + x \frac{r(x)^3 + 3 r(x) r(x^2) + 2 r(x^3)}{6}.$$

En efecto, de (4) se deduce:

$$r(x)^3 = \sum_j R_j^3 x^{3j} + 3 \sum_{j \neq k} R_j R_k^2 x^{j+2k} + 6 \sum_{j<k<l} R_j R_k R_l x^{j+k+l}$$

$$3 r(x) r(x^2) = 3 \sum_j R_j x^{3j} + 3 \sum_{j \neq k} R_j R_k x^{j+2k}$$

$$2 r(x^3) = 2 \sum_j R_j x^{3j}$$ de donde, multiplicando por $\frac{x}{6}$ y sumando, resulta

$$x \frac{r(x)^3 + 3 r(x) r(x^2) + 2 r(x^3)}{6} = \sum_j \frac{R_j^3 + 3 R_j^2 + 2 R_j}{6} x^{3j+1} + \sum_{j \neq k} R_j \frac{R_k^2 + R_k}{2} x^{j+2k+1} + \sum_{j<k<l} R_j R_k R_l x^{j+k+l+1}.$$

Comparando ésta con la fórmula recurrente (2) del § 4 y como $R_0 = 1$, se obtiene la ecuación funcional (5). Ella permite la determinación del radio de convergencia de la serie de potencias, utilizando un teorema de Jungen relativo a las singularidades de las funciones definidas por tales series. De este modo se obtiene la fórmula: $R_n \sim A \rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}$.

Sería salirse de los límites que nos hemos impuesto, dar mayor desarrollo a esta exposición, cuyo objeto no es otro que suscitar el interés por los trabajos de Pólya, los cuales sugieren multitud de cuestiones pendientes de solución, la más importante de las cuales es, sin duda, la obtención de una fórmula exacta para R_n y para los números análogos en otras series homólogas.

Cabría también estudiar con estos métodos los tipos especiales de isomería que suelen consignarse en los tratados de Química orgánica.

BIBLIOGRAFIA

[1]. *Blair (C. M.)* y *Henze (H. R.)*: Journal of the American Chemical Society 53 (1931), págs. 3042-3046; 53 (1931), págs. 3077-3085; 54 (1932), págs. 1098-1106; 54 (1932), págs, 1538-1545; 55 (1933), págs. 680-686; 56 (1934), pág. 157.

[2]. *Cayley (A.)*: Collected mathematical papers. (Cambridge, 1889-1898).

[3]. *Delannoy*: Bull. de la Soc. Chim. 1894.

[4]. *Gordan* y *Alexejfe*: Sitz. de Erlangen, 1900.

[5]. *Jordan (C.)*: J. f. die reine une angewandte Math. 70 (1869), págs. 185-190.

[6]. *König (D.)*: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).

[7]. *Lunn (A. C.)* y *Senior (J. K.)*: Journal of Physica Chemistry 33 (1929), págs. 1027-1079.

[8]. *Pólya (G.)*: Helvetica Chimica Acta 19 (1936), pags. 22-24 Comptes Rendus, Académie des Sciences 201 (1935), págs. 1167-1169. Ibidem 202 (1936), págs. 415-443; Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich 81 (1936), págs. 243-258; Acta Mathematica, t. 68.

[9]. *Sylvester*: Am. Journ. of Math. 1878.

Sôbre a existência não contraditória

por **J. Albuquerque** (bolseiro em Roma do I. A. C.)

No complexo confuso de determinantes da atitude científica perante a realidade, aparecem talvez como resultantes, as aspirações de conhecer e de prevenir. Do mesmo modo as duas características mais impressionantes do trabalho científico são conseqüentemente o carácter descritivo e o carácter preventivo.

Numa teoria científica imaginam-se situações especiais, circunstâncias determinadas com maior ou menor generalidade e possibilidade de verificação, e elaboram-se outras situações que se sucedem a essas.

Para criar uma situação inicial, pensam-se determinados objectos relacionados por certas proposições: os objectos são referidos pelos seus nomes,

(1) **Nota final do capítulo I do original português do livro intitulado «Teoria generale degli insiemi», que possìvelmente será publicado em Roma.**

termos primitivos da teoria, e as proposições que os relacionam são as proposições primitivas ou *axiomas*.

Elaboram-se em seguida novas situações que se sucedem às situações iniciais; as novas situações adquirem o carácter de conseqüência lógica das primeiras, porque são elaboradas ou deduzidas com as *regras da dedução*, porque são pensadas com as regras da Lógica.

Nesta elaboração de situações novas há a necessidade de criar termos novos ou *termos derivados* obtidos dos termos primitivos de certo modo seguro que permitirá usá-los sem enganos e sem estabelecer confusão.

Criar um termo novo é definir, e a segurança com que se define é dada pelas *regras da definição*.

Cada situação nova elaborada a partir da situação inicial é uma nova disposição dos objectos da teoria, relacionados de um modo novo ou submetidos a proposições novas, os *teoremas*.

Os teoremas tão portanto obtidos com as regras da dedução a partir dos axiomas.

Os objectos da teoria *são pensados*, tanto na situação inicial como nas situações novas transitórias ou finais. Pensar êsses objectos é destacá-los ou diferenciá-los de um amálgama de tantíssimos outros objectos pensáveis; é fixá-los no meio da mobilidade das coisas pensáveis, fixá-los não só isolando-os como também determinando-lhes, a cada um, uma forma rígida que os torne como que «visíveis e manipuláveis».

A atribuïção do nome, termo primitivo ou termo derivado, dá-lhes, e resulta de lhes termos dado, a forma rígida; os objectos são isolados do seio das coisas pensáveis por meio das proposições iniciais ou derivadas.

A nosso ver as coisas pensáveis são o reflexo em nós da realidade e é neste facto de enunciado tão simples que se baseiam as relações entre a teoria e a realidade ou a prática.

A teoria criando situações novas para os objectos pensados, satisfaz-nos o desejo de prevenir e fornece-nos a *previsão*. O contrôle destas previsões afina a teoria e corrige em nós próprios as regras da dedução, aperfeiçoando-nos e formando em nós próprios a *Lógica*, num trabalho minucioso e interminável.

O cunho principal das proposições científicas é certamente o de serem condicionais. [2]

De facto na teoria científica ou num sistema axiomático, as proposições tomam inúmeras formas que dependem inclusivamente do gôsto de quem as formula, mas parece podermos incluí-las num pelo menos dos seguintes tipos:

1. Dados... nas condições... então...
2. Quaisquer que sejam... nas condições... então...
3. Suponhamos... nas condições... então...
4. Consideremos... nas condições... então...
5. Se EXISTEM... nas condições... então...
6. EXISTEM... nas condições...
7. Não EXISTEM... nas condições...

Os cinco primeiros tipos de proposições apresentam *explicitamente* o cunho condicional. São cinco tipos dos mais freqüentes e parece que todos êles se reduzem ao quinto tipo:

Se EXISTEM... nas condições... então...

Neste último tipo, colocando no primeiro intervalo os termos iniciais ou derivados e no segundo intervalo as proposições primitivas ou derivadas, convenientemente combinados, deverá pôr-se no terceiro intervalo de acôrdo com as regras da dedução o enunciado da situação nova que envolve em si a previsão.

Os dois tipos, tipo 6 e 7, não apresentam explicitamente o carácter condicional. Mas nem por isso as proposições de qualquer dêstes tipos são menos condicionâis que as do tipo precedente.

Com efeito, uma proposição do tipo 6 ou do tipo 7 não pode ser uma proposição primitiva ou axioma; é portanto uma proposição derivada ou teorema e deverá ser demonstrada a partir de outras proposições e em última análise a partir dos axiomas. Resulta portanto que as proposições dos tipos 6 e 7 são *implìcitamente condicionais*.

Reduzimos assim as proposições de uma teoria axiomática a três tipos em cada um dos quais figura a palavra EXISTE.

Qual o sentido atribüido geralmente a essa palavra em cada um dos tipos a que fomos conduzidos?

Aparentemente, o sentido da palavra EXISTE que figura numa proposição explicitamente condicional, parece diferente do sentido da mesma palavra quando se trate de uma proposição implicitamente condicional; mas de facto êsses sentidos não são tão diferentes como à primeira vista parece.

5. Se EXISTEM... nas condições... então...

pretende-se dizer:

5'. Se são pensáveis sem contradição... nas condições... então...

Para garantir a não contradição deverá verificar-se neste caso:

a) o conjunto dos objectos a pensar definido pelas condições indicadas na proposição deve verificar a propriedade PV (sôbre tudo que tal conjunto seja

---

(2) **Salvo o das proposições categóricas que se limitam ao enunciado do facto.**

$\equiv|\equiv 0$, porque em geral satisfaz o resto da propriedade PV). [3] Isto assegura a não contradição interna à proposição.

b) a proposição não deve estar em contradição com as outras proposições já deduzidas no desenvolvimento da teoria até ao momento presente. Isto assegura a não contradição interna à teoria.

c) o conjunto dos objectos pensáveis indicado pela proposição deverá reproduzir uma situação da realidade. Isto garante a não contradição externa à teoria.

Em geral na proposição explicitamente condicional evita-se a palavra EXISTE, enunciando a proposição com uma das formas 1, 2, 3 ou 4 ou outra qualquer forma equivalente de enunciado.

Nas proposições implicitamente condicionais

6. EXISTEM... nas condições...

7. Não EXISTEM... nas condições...

pretende-se dizer respectivamente:

6'. São pensáveis necessàriamente... nas condições...

7'. Não se podem pensar... nas condições...

Na proposição 6 o conjunto dos objectos pensáveis definido pelas condições é necessàriamente $\equiv|\equiv 0$, sendo contraditório, de uma contradição interna à teoria, supô-lo $\equiv 0$.

Na proposição 7 as condições indicadas são lògicamente incompatíveis ou, no caso mais correcto, o conjunto por elas definido é $\equiv 0$, sendo contraditório, de uma contradição interna à teoria supô-lo $\equiv|\equiv 0$.

Uma proposição implicitamente condicional isto é, uma proposição dos tipos 6 ou 7, enuncia uma *situação nova* que é uma *previsão* e que necessita de ser controlada.

(3) **A propriedade PV é assim enunciada:**

PV. Sempre que se considere um conjunto C deverão considerar-se outros dois conjuntos A e B tais que para todo o $X \in C$ se tem: $X \in A$, $X \notin B$, $B \in A$. EXISTE pelo menos um X naquelas condições.

Concluimos por conseqüência que a palavra EXISTE é mais freqüente do que geralmente se supõe; encontra-se muitas vezes escondida nos enunciados das proposições de uma teoria axiomática e só raras vezes ela figura claramente na proposição.

Em qualquer dos casos a palavra EXISTE tem um sentido que se procurará fixar com as seguintes três proposições:

1. Um objecto ou um conjunto de objectos EXISTE ou não EXISTE.

2. A existência ou não existência deve ser *não contraditória;* de uma contradição cuja natureza diga respeito ao desenvolvimento formal interno da teoria (não contradição interna).

3. A existência ou não existência afrmada, deverá ser tomada com o valor de uma *previsão* fornecida pela teoria e deverá ser submetida à prova da experiência. Deverá ser *não contraditória;* de uma contradição cuja natureza diga respeito ao comportamento da teoria perante a realidade (não contradição externa).

O desenvolvimento ulterior de uma teoria axiomática que repouse sôbre uma existência ou não existência, *não contraditória,* dependerá da prova experimental e será sempre contingente. Não nos parece contudo que seja mais contingente que qualquer outra parte do desenvolvimento da mesma teoria. No entanto empregaremos sempre a palavra existe escrevendo-a em letras maiúsculas desejando com isso indicar os passos da teoria que impõem uma avaliação cuidada dos resultados.

A palavra EXISTE usando uma imagem forte, é o cordão umbilical que liga a teoria à realidade material que lhe deu origem e que a alimenta e vivifica, condicionando-lhe todo o seu valor prático e utilitário.

Roma, 1945, Abril 30.

Sôbre a unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias no caso clássico (e no campo real)

por ***Vergílio Simões Barroso*** (bolseiro em Roma do I. A. C.)

De um meu trabalho [1] recentemente enviado ao I. A. C. extraio, para o leitor da Gazeta, uma breve demonstração da unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, de forma normal, no caso clássico familiar a todos. Dou-a ao conhecimento do leitor da Gazeta porque esta demonstração, que julgo original, tem, sôbre as que geralmente se têm feito até agora, a vantagem de ser independente da formação prévia das sucessões de funções que convergem para as componentes da solução, cuja existência se prova habitualmente em primeiro lugar. Expliquemo-nos:

(1) **«O teorema de existência e unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias num caso mais geral do que o clássico (no campo real)», V. S. Barroso.**