

$\exists \equiv 0$ , porque em geral satisfaz o resto da propriedade PV). (\*) Isto assegura a não contradição interna à proposição.

b) a proposição não deve estar em contradição com as outras proposições já deduzidas no desenvolvimento da teoria até ao momento presente. Isto assegura a não contradição interna à teoria.

c) o conjunto dos objectos pensáveis indicado pela proposição deverá reproduzir uma situação da realidade. Isto garante a não contradição externa à teoria.

Em geral na proposição explicitamente condicional evita-se a palavra EXISTE, enunciando a proposição com uma das formas 1, 2, 3 ou 4 ou outra qualquer forma equivalente de enunciado.

Nas proposições implicitamente condicionais

6. EXISTEM... nas condições...

7. Não EXISTEM... nas condições...

pretende-se dizer respectivamente:

6'. São pensáveis necessariamente... nas condições...

7'. Não se podem pensar... nas condições...

Na proposição 6 o conjunto dos objectos pensáveis definido pelas condições é necessariamente  $\exists \equiv 0$ , sendo contraditório, de uma contradição interna à teoria, supô-lo  $\equiv 0$ .

Na proposição 7 as condições indicadas são logicamente incompatíveis ou, no caso mais correcto, o conjunto por elas definido é  $\equiv 0$ , sendo contraditório, de uma contradição interna à teoria supô-lo  $\exists \equiv 0$ .

Uma proposição implicitamente condicional isto é, uma proposição dos tipos 6 ou 7, enuncia uma situação nova que é uma previsão e que necessita de ser controlada.

(3) A propriedade PV é assim enunciada:

PV. Sempre que se considere um conjunto  $C$  deverão considerar-se outros dois conjuntos  $A$  e  $B$  tais que para todo o  $X \in C$  se tem:  $X \in A$ ,  $X \notin B$ ,  $B \in A$ . EXISTE pelo menos um  $X$  naquelas condições.

Concluimos por consequência que a palavra EXISTE é mais freqüente do que geralmente se supõe; encontra-se muitas vezes escondida nos enunciados das proposições de uma teoria axiomática e só raras vezes ela figura claramente na proposição.

Em qualquer dos casos a palavra EXISTE tem um sentido que se procurará fixar com as seguintes três proposições:

1. Um objecto ou um conjunto de objectos EXISTE ou não EXISTE.

2. A existência ou não existência deve ser não contraditória; de uma contradição cuja natureza diga respeito ao desenvolvimento formal interno da teoria (não contradição interna).

3. A existência ou não existência afirmada, deverá ser tomada com o valor de uma previsão fornecida pela teoria e deverá ser submetida à prova da experiência. Deverá ser não contraditória; de uma contradição cuja natureza diga respeito ao comportamento da teoria perante a realidade (não contradição externa).

O desenvolvimento ulterior de uma teoria axiomática que repouse sobre uma existência ou não existência, não contraditória, dependerá da prova experimental e será sempre contingente. Não nos parece contudo que seja mais contingente que qualquer outra parte do desenvolvimento da mesma teoria. No entanto empregaremos sempre a palavra existe escrevendo-a em letras maiúsculas desejando com isso indicar os passos da teoria que impõem uma avaliação cuidada dos resultados.

A palavra EXISTE usando uma imagem forte, é o cordão umbilical que liga a teoria à realidade material que lhe deu origem e que a alimenta e vivifica, condicionando-lhe todo o seu valor prático e utilitário.

Roma, 1945, Abril 30.

## Sobre a unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias no caso clássico (e no campo real)

por Vergílio Simões Barroso (bolseiro em Roma do I. A. C.)

De um meu trabalho <sup>(1)</sup> recentemente enviado ao I. A. C. extraio, para o leitor da Gazeta, uma breve demonstração da unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, de forma normal, no

caso clássico familiar a todos. Dou-a ao conhecimento do leitor da Gazeta porque esta demonstração, que julgo original, tem, sobre as que geralmente se têm feito até agora, a vantagem de ser independente da formação prévia das sucessões de funções que convergem para as componentes da solução, cuja existência se prova habitualmente em primeiro lugar. Expliquemo-nos:

(1) «O teorema de existência e unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias num caso mais geral do que o clássico (no campo real)», V. S. Barroso.

O leitor sabe que, dado um sistema de equações diferenciais ordinárias, de forma normal,

$$(1) \quad y'_i = f_i(x; y_1; y_2, \dots, y_m) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

onde as  $f_i$  são  $m$  funções reais das  $m+1$  variáveis reais  $x, y_1, y_2, \dots, y_m$  definidas no domínio rectangular fechado  $R$  dado pelas limitações

$$(2) \quad |x - \alpha| \leq a; \quad |y_i - \beta_i| \leq b \quad (i=1, \dots, m)$$

onde  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  são conhecidos, se forem verificadas as condições:

I — As funções  $f_i$  são contínuas em  $R$ ;

II —  $x_0$  é um ponto arbitrário do intervalo fechado  $(\alpha - d, \alpha + d)$ , onde  $d$  é o menor dos dois números  $a$  e  $b/4M$ , sendo  $M$  o maior dos máximos em  $R$  dos valores absolutos das funções  $f_i$  <sup>(2)</sup>;

III —  $c_1, c_2, \dots, c_m$  são  $m$  números escolhidos arbitrariamente de modo que  $|c_i - \beta_i| \leq b/2$ ;

IV — As funções  $f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$  são lipschitzianas de 1.ª ordem em relação às variáveis  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , isto é, existe um número  $L > 0$  tal que, quaisquer que sejam os dois pontos  $(x; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) \in R$  e  $(x; y_1, \dots, y_m) \in R$ , se tenha

$$|f_i(x; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) - f_i(x; y_1, \dots, y_m)| \leq L \sum_{k=1}^m |\bar{y}_k - y_k| \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

então existe uma, e uma só, solução  $\{\varphi_i(x)\}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , do sistema (1), cujas componentes sejam  $m$  funções  $\varphi_i(x)$ , definidas e contínuas em  $(\alpha - d; \alpha + d)$ , admitindo aí derivadas primeiras contínuas, tais que  $|\varphi_i(x) - \beta_i| \leq b$  e satisfazendo às condições  $\varphi_i(x_0) = c_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ).

O leitor recorda-se ainda de que se demonstra (pelo processo de Picard-Peano) a existência da solução definido cada uma das suas componentes  $\varphi_i(x)$  como limite de uma sucessão de funções

$$(3) \quad {}^1\varphi_i(x) \equiv c_i; \quad {}^2\varphi_i(x); \quad {}^3\varphi_i(x); \dots; \quad {}^k\varphi_i(x); \dots \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

cujos termos são obtidos por meio das fórmulas recorrentes

$$(4) \quad \begin{cases} {}^1\varphi_i(x) \equiv c_i \\ {}^{k+1}\varphi_i(x) \equiv c_i + \int_{x_0}^x f_i(t; {}^k\varphi_1(t), \dots, {}^k\varphi_m(t)) dt \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Interessa-nos particularmente aqui a demonstração da unicidade da solução. A demonstração geralmente conhecida é a de Goursat, que consiste no seguinte, resumidamente:

Seja  $\{\Psi_i(x)\}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), um outro sistema de  $m$  funções que satisfaçam em  $(\alpha - d, \alpha + d)$  ao sistema

(1) e às condições iniciais  $\Psi_i(x_0) = c_i$ . Então ter-se-á, em todo o intervalo  $(\alpha - d, \alpha + d)$ ,  $\Psi_i(x) \equiv \varphi_i(x)$  porque se prova que cada uma de tais funções  $\Psi_i(x)$  é também função-limite da sucessão (3) que tende para a função  $\varphi_i(x)$  da mesma ordem. Ora para a demonstração desta última afirmação tem de efectuar-se praticamente o mesmo fatigante trabalho que já antes se tivera de fazer para provar a convergência das sucessões (3).

Em vez disso, o processo que a seguir indico, não exigindo a prévia formação das sucessões (3) nem a prova da sua convergência, pode servir para demonstrar independentemente o seguinte teorema:

«Se existe uma solução do sistema (1) satisfazendo às condições iniciais  $\varphi_i(x_0) = c_i$ , esta solução será única, se admitirmos que são verificadas todas <sup>(3)</sup> as condições I, II, III e IV.»

Demonstração:

Do facto que tanto  $\{\varphi_i(x)\}$  como  $\{\Psi_i(x)\}$  são ambas soluções, no intervalo  $(\alpha - d, \alpha + d)$  do sistema (1) e satisfazem ambas às mesmas condições iniciais em  $x_0$ , isto é,  $\varphi_i(x_0) = c_i$  e  $\Psi_i(x_0) = c_i$  (para  $i=1, 2, \dots, m$ ), resultam as identidades:

$$\varphi_i(x) \equiv c_i + \int_{x_0}^x f_i(t; \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt$$

$$\Psi_i(x) \equiv c_i + \int_{x_0}^x f_i(t; \Psi_1(t), \dots, \Psi_m(t)) dt$$

de onde, por subtrações ordenadas,

$$\varphi_i(x) - \Psi_i(x) \equiv \int_{x_0}^x [f_i(t; \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) - f_i(t; \Psi_1(t), \dots, \Psi_m(t))] dt \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

e, pela condição IV,

$$(5) \quad |\varphi_i(x) - \Psi_i(x)| \leq L \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^m |\varphi_k(t) - \Psi_k(t)| dt \quad i=1, \dots, m$$

Adicionando ordenadamente as  $m$  desigualdades (5),

$$\text{vem } \sum_{i=1}^m |\varphi_i(x) - \Psi_i(x)| \leq mL \left| \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^m |\varphi_k(t) - \Psi_k(t)| dt \right|$$

a qual, pondo  $\sum_{i=1}^m |\varphi_i(x) - \Psi_i(x)| \equiv u(x) \geq 0$  (portanto

$$u(x_0) = 0) \text{ toma o aspecto } u(x) \leq mL \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right|,$$

ou ainda

$$(6) \quad u(x) - mL \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right| = -g(x) \quad \text{com } g(x) \leq 0.$$

<sup>(2)</sup> A limitação das  $f_i$  em  $R$  resulta do facto que elas são contínuas no domínio fechado  $R$ .

<sup>(3)</sup> De facto, sabemos que, se retirarmos somente a condição IV, existe pelo menos uma solução nas condições requeridas.

Ora  $\frac{d}{dx} \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right| = \pm u(x)$ , conforme respectivamente  $x \geq x_0$  e, além disso, no ponto  $x=x_0$ , a função  $\theta(x) = \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right|$  tem, como semi-derivada

à direita,  $u(x_0)=0$  e, como semi-derivada à esquerda,  $-u(x_0)=0$  e, portanto, tem aí uma derivada nula. Consideremos pois, em primeiro lugar, o intervalo fechado,  $(x_0, x+d)$ , onde a função  $\theta(x)$  tem  $u(x)$  como derivada primeira. Derivando então em ordem a  $x$  ambos os membros da (6), resulta

$$(7) \quad u'(x) - mL u(x) = g'(x)$$

e portanto, atendendo a que  $u(x_0)=0$ ,

$$(8) \quad u(x) = e^{mLx} \int_{x_0}^x g'(t) e^{-mLt} dt$$

de onde se deve concluir que, em todo o intervalo,  $(x_0, x+d)$ , será  $g'(t) \geq 0$  porque  $u(x) \geq 0$  e, por conseguinte, que a função  $g(x) \leq 0$  é não decrescente no intervalo  $(x_0, x+d)$ . Mas para  $x=x_0$  é  $g(x_0)=0$  (vide expr. 6), de modo que em todo o  $(x_0, x+d)$ , é  $g(x) \equiv 0$  donde  $g'(x) \equiv 0$  donde ainda  $u(x) \equiv 0$  de onde resulta, em todo o intervalo fechado  $(x_0, x+d)$

$$(9) \quad \varphi_i(x) - \Psi_i(x) \equiv 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Um raciocínio completamente análogo, feito para o intervalo  $(x-d, x_0)$  (de facto basta trocar nas (7) e (8)  $mL$  por  $-mL$  e substituir a conclusão « $g(x)$  é não decrescente em  $(x_0, x+d)$ » por esta outra: « $g(x)$  é não crescente em  $(x-d, x_0)$ » porque será agora neste intervalo  $g'(x) \leq 0$ ) permite demonstrar que também no intervalo fechado  $(x-d, x_0)$  é  $u(x) \equiv 0$  e que,

por conseguinte, as (9) são válidas em todo o intervalo  $(x-d, x+d)$ .

*Nota.* No meu trabalho, citado a págs. 6, considerava-se o caso mais geral em que às  $m$  componentes  $\varphi_i(x)$  da solução a determinar se atribuem «a priori» os  $m$  valores iniciais  $c_1, c_2, \dots, c_m$  em  $m$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , todos distintos ou não. Demonstrei que uma condição suficiente para que a solução procurada exista e seja única é que às condições atrás citadas I, II, (convenientemente modificada), III e IV se junte a condição:  $V-O$  número  $d$  satisfaz ainda à limitação  $2Lm d < 1$ .

Com esta nova condição, a demonstração da unicidade da solução  $\{\varphi_i(x)\}$  correspondente simplifica-se extraordinariamente. Com efeito, se fizermos  $M_k = \max |\varphi_i(x) - \Psi_k(x)|$  em  $(x-d, x+d)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) poderemos escrever, a partir das (5)

[onde em vez de  $\int_{x_0}^x$  deve então pôr-se  $\int_{x_i}^x$ ]

$$|\varphi_i(x) - \Psi_i(x)| \leq L \left( \sum_{k=1}^m M_k \right) |x - x_i| \leq 2Ld \left( \sum_{k=1}^m M_k \right)$$

e portanto também

$$(10) \quad M_i \leq 2Ld \left( \sum_{k=1}^m M_k \right) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Adicionando membro a membro as  $m$  desigualdades

$$(10), \text{ resulta } \sum_{i=1}^m M_i \leq 2Lm d \left( \sum_{k=1}^m M_k \right) \text{ e portanto,}$$

quando se tenha  $2Lm d < 1$ ,  $\sum_{i=1}^m M_i = 0$  isto é  $M_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) e isto significa que se terão as (9).

Roma, Novembro de 1944.

## PEDAGOGIA

### A GEOMETRIA DEMONSTRATIVA NO ENSINO LICEAL

por António Nicodemus Pereira

Na leitura de livros modernos sobre a pedagogia da Matemática, é frequente encontrarmos referências à geometria intuitiva e experimental e à geometria demonstrativa.

Segundo creio, foi na reforma de programas do ensino secundário, em 1918, que entre nós, pela primeira vez, em linguagem oficial, houve referências à geometria intuitiva e experimental e ao método de laboratório.

Na reforma de 1918, houve uma inovação brilhante e notável no estudo da geometria que foi dividido em dois ciclos.

No 1.º ciclo, constituído pela 1.ª e 2.ª classes, a geometria plana e no espaço devia ser «estudada intuitiva e experimentalmente e introduzido o método de laboratório», conforme aconselhavam as instruções pedagógicas que acompanhavam o programa.

No 2.º ciclo, constituído pela 3.ª, 4.ª e 5.ª classes, era retomado o estudo da geometria, começando a 3.ª classe por uma «revisão, sob um ponto de vista mais ordenado das propriedades estudadas na 1.ª classe» (Geometria plana). A 4.ª classe começava também por revisões da 2.ª classe (Geometria no espaço), segundo o mesmo critério.