

les diriger vers les sommets commandant de vastes panoramas.

*

Après nous être inquiétés des moyens de susciter l'éclosion de grandes créations scientifiques, parlons enfin de l'orientation souhaitable des mathématiques.

Le profane n'imagine pas la mathématique autrement qu'un assemblage de chaînes déductives formées de théorèmes successifs. Il ne soupçonne pas que chez nous aussi la question se pose de porter des jugements de valeur. Si une rigueur logique hors de contestation est indispensable pour qu'un ouvrage puisse revendiquer une place en mathématiques, cette condition, obligatoirement remplie par les œuvres relevant de cette discipline, ne leur confère pas à toutes un rang égal. La hiérarchie adoptée ne sera pas indépendante du mathématicien appelé à la définir. Même si les qualités inventives de l'auteur sont pareillement appréciées de tous ses confrères, ceux-ci différeront habituellement d'avis, concernant le degré d'intérêt qu'il convient de prêter au sujet traité.

Les mathématiques sont l'honneur de l'esprit humain, a dit Jacobi. Aussi les mathématiques, comme l'honneur, ne sont-elles jamais trop pures aux yeux de quelques-uns. Il n'est cependant pas opposé à un véritable esprit philosophique de souhaiter que les mathématiques, loin de former un organisme sans connexion avec l'ensemble des autres connaissances humaines, se développent en relation d'homogénéité tout au moins avec les sciences les plus voisines d'elles et lui faisant le plus d'emprunts.

Les séries trigonométriques, situées à la source de toutes les notions fondamentales de l'Analyse mo-

derne, ont été imposées par la Physique aux géomètres, qui se sont d'abord débattus de toutes leurs forces pour repousser loin d'eux ce cadeau pourtant sans prix. Les fonctions harmoniques, les équations différentielles ou aux dérivées partielles ont été suggérées à l'Analyse par la Physique, la Mécanique ou la Géométrie. Une catégorie mathématique joue un rôle d'autant plus important dans une théorie et elle brille de propriétés d'autant plus remarquables qu'elle offre un caractère davantage interthéorique, quand elle se présente aussi dans une seconde doctrine mathématique, ou même interscientifique, si une autre science que la mathématique en impose la considération.

Aussi peut-on raisonnablement soutenir que les équations de la Physique et de la Mécanique sont nécessairement une source de problèmes mathématiques de très vaste intérêt.

On me répondra que la Physique, l'Astronomie ont utilisé de la façon la plus adéquate qu'on eût pu souhaiter certaines théories mathématiques conçues dans la voie la plus éloignée de toute visée d'application. Il est vrai, mais on ne peut porter un jugement aussi favorable sur toutes les parties des mathématiques même parmi les plus anciennes. En réalité, le mathématicien doit posséder un don de discernement lui permettant de pressentir si les faits qu'il met en évidence dans une étude d'objet défini, sont ou non rencontrés également dans d'autres parties des mathématiques. Chaque analyste doit porter à tout instant sur son ouvrage un jugement de valeur. Un sens spécial doit l'avertir s'il crée du formel ou s'il découvre du réel.

.....

MOVIMENTO MATEMÁTICO

ALGUNS ASPECTOS ACTUAIS DA MATEMÁTICA NA FÍSICA

Conforme foi anunciado no n.º 24 desta revista, um grupo de colaboradores do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, realizou, de 23 de Maio a 2 de Junho p. p., no anfiteatro de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, a convite da Sociedade Portuguesa de Matemática, uma série de oito lições subordinadas ao título geral «Alguns Aspectos Actuais da Matemática na Física».

Ao aceitarmos esse convite, o nosso objectivo foi, por um lado, mostrar como se torna impossível abordar o estudo de certos problemas de actualidade da Mecânica Clássica e da Mecânica Quântica sem pôr em jôgo as mais especializadas e as mais abstractas aquisições da Matemática no domínio da Álgebra, da

Topologia e da Teoria da Medida. E, por outro lado, demonstrar, através de um exemplo concreto, como nos sentimos obrigados, pela própria natureza dos problemas a investigar, a um trabalho de equipe em que cada qual utiliza ao máximo os seus conhecimentos especializados, no desejo de contribuir para uma interpretação geral e tão completa quanto possível.

O trabalho de equipe aparece assim como uma condição essencial para o estudo eficiente de qualquer questão de grande generalidade, e, ao mesmo tempo, mantém o investigador em contacto permanente com os resultados que vão sendo obtidos por outros investigadores, no mesmo ou em diferentes domínios, dando-lhe tôdas as possibilidades de alargar a sua cul-

tura, de maneira a ter uma visão de conjunto dos problemas em estudo no Centro de trabalho a que pertence.

Subordinando-nos a estas directrizes, resolvemos aproveitar da experiência adquirida nos trabalhos d'êste Centro de Estudos para abordar, na Mecânica Quântica, a interpretação da espectroscopia atômica em termos da teoria das representações dos grupos abstractos e contínuos e a questão da compatibilidade das grandezas físicas em termos da teoria da medida, enquanto que, na Mecânica clássica, foi o problema ergódico que principalmente nos preocupou.

Damos a seguir uma referência mais detalhada dos pontos fundamentais das lições :

O Problema Ergódico

Na exposição realizada procurámos pôr em relêvo a importância fundamental das técnicas de medida à Borel e à Lebesgue na redução da antiga hipótese ergódica de Boltzmann à transitividade métrica.

Nessa redução, obtida através dos trabalhos de v. Neumann e de Birkhof aparecem: uma noção nova — a de automorfismo ergódico ou métricamente transitivo — e um problema a analisar: o da posição d'êste tipo particular de automorfismos no conjunto das transformações que conservam a medida. Relativamente a êste problema, mostrámos como os métodos topológicos tentam resolvê-lo, graças à introdução, no grupo dos automorfismos que conservam a medida, duma topologia em relação à qual é denso em todo o espaço, o conjunto dos automorfismos ergódicos.

Ainda no domínio da Mecânica Clássica, no estudo crítico das proposições experimentais que a essa ciência interessam, expusemos a interpretação de v. Neumann que faz corresponder, no espaço das fases, ao sistema dessas proposições a Álgebra cociente dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue-módulo conjuntos de medida nula.

Teoria da Medida e Mecânica Quântica

Começámos por mostrar que as variedades lineares fechadas geradas pelos elementos de um sistema ortonormado completo de um Espaço de Hilbert constituem

uma estrutura ortocomplementada e distributiva e fixámos depois a nossa atenção sobre a posição relativa das estruturas associadas aos elementos próprios de duas grandezas físicas A , B e verificámos que, dentro de cada uma delas, a projecção sobre uma variedade se comporta como uma funcional não-negativa e modular.

Nestas condições se definirmos medida exterior e medida interior de uma variedade de uma daquelas estruturas a partir da funcional-projecção das variedades da outra (interpretada como uma medida) obtém-se o seguinte teorema fundamental: a condição necessária e suficiente para que as duas grandezas A e B sejam compatíveis é que as variedades da estrutura associada a A sejam mensuráveis com as variedades da estrutura associada a B e inversamente.

Quere dizer: grandezas compatíveis são grandezas comensuráveis.

Álgebras e Mecânica Quântica

Depois de algumas generalidades sobre a equação de Schrödinger e seus grupos de invariância, tratámos especialmente o caso dum espectro descontínuo, no qual cada valor próprio da energia determina um espaço linear finito de funções próprias. Mostrámos que as representações da Quântica são unitárias, e, portanto, irredutíveis ou completamente redutíveis. Falámos da importância dos conceitos de redutibilidade e irredutibilidade e desenvolvemos a teoria das representações dos grupos contínuos, especialmente do grupo das rotações. A aplicação da série de Clebsch-Gordan à construção atômica e aos espectros dos hidrogenoides, as regras de selecção e de intensidade, o esquema vectorial de Neumann-Wigner (spin), etc., foram também focados. Prôpriamente sobre as representações das álgebras, seguimos o método de E. Noether, dado no *Mathematische Zeitschrift*, e falámos dos resultados de Frobenius sobre as representações dos grupos finitos, que aparecem inseridos naquêlê método. Incidentalmente, demos alguns teoremas recentes relativos aos anéis com condições de cadeia (no sentido de Dedekind).

Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto

NOTICÁRIO

Academia das Ciências de Lisboa

Num dos primeiros dias de Julho realizou, na Academia das Ciências de Lisboa, o Professor da Faculdade de Ciências e da Faculdade de Ciências Económicas de Madrid, Dr. O. Fernandez Baños, uma conferência onde expôs os resultados a que chegou sobre a elasticidade em econometria.

Faculdade das Ciências de Coimbra

Na Universidade de Coimbra realizaram-se durante o mês de Junho as provas de doutoramento em Ciências Físico-Químicas do assistente da Faculdade de Ciências, José Luís Rodrigues Martins.

A dissertação «Da influência das forças de «spin» nas reacções entre partículas nucleares — Contribuição

para o estudo da espectroscopia nuclear» foi discutida pelos professores Dr. A. Cyrillo Soares da Universidade de Lisboa e Dr. Mário Silva da Universidade de Coimbra. Dos pontos — Teoria das valências orientadas — e — Ondas electromagnéticas; sua propagação. Teorema de Poyting. Estudo do campo de irradiação do dipolo de Hertz — foram argüentes respectivamente os Professores Drs. Couceiro da Costa e Mário Silva, da Universidade de Coimbra.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

Nos dias 25 e 26 de Junho tiveram lugar neste Instituto as provas de doutoramento em Ciências Económicas e Financeiras do assistente João Remy Freire. A dissertação «Estudos de Demografia Portuguesa — 1.º ensaio» foi discutida pelos Professores Bento Caraça e Francisco Leite Pinto. As teses foram discutidas pelos Professores C. M. Beirão da Veiga e A. Marques Guedes.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SÔBRE INEQUAÇÕES FRACCIÓNARIAS DO 1.º GRAU

por Raúl Rato

Estas inequações têm sido tratadas de formas muito variadas nos compêndios de Álgebra elementar. Serrasqueiro (1883) não as considera em especial; resolvendo $\frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5}$ acha $x > 17$, o que é incompleto.

A. J. da Cunha (1883) não as considera. Albuquerque (1898) desembaraça de denominador, tomando o quadrado, sempre positivo. Dias Agudo (1938) resolve-as com as hipóteses usuais na resolução das inequações fraccionárias do 2.º grau. Sequeira Ribeiro (s/d. prog. de 1936) faz considerações muito complicadas.

Ora estas inequações têm uma resolução muito simples, se applicarmos o mesmo raciocínio que nos dá os valores de x que tornam o trinómio do 2.º grau positivo ou negativo, no caso das raízes reais e desiguais. Com efeito toda a inequação fraccionária do 1.º grau pode reduzir-se à forma $f(x) > 0$, ou $f(x) < 0$, dando-se a $f(x)$ a expressão:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \times \frac{x+b/a}{x+d/c}$$

Mostra esta expressão que $f(x)$ será de sinal contrário a a/c para valores de x compreendidos no intervalo $(-b/a, -d/c)$ e do mesmo sinal de a/c para valores não compreendidos no mesmo intervalo.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

I. S. A. — 2.ª prova escrita — 24 de Outubro de 1944
Ponto n.º 3.

Nota — É obrigatório resolver quatro questões, entre as quais a primeira.

2036 — Na equação $2x^2 + (p^2 + 2)x + 2p^2 - 4 = 0$ determine p com a condição de a diferença entre as raízes ser igual à unidade.

2037 — Numa propriedade existem alguns cavalos,

Alguns exemplos tirados dos autores referidos:

$$\text{Serrasqueiro: } \frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5}.$$

Façamos $f(x) > 0$ $\frac{x-1}{x+3} - \frac{4}{5} > 0$ ou $\frac{1}{5} \times \frac{x-17}{x+3} > 0$ o que dá a solução: $x > 17$ ou $x < -3$, isto é, fora do intervalo $(17, -3)$.

Albuquerque: $\frac{1}{4} - \frac{5}{8x} < 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{4} - \frac{5}{8x} - 1 - \frac{1}{x} < 0$ ou $\frac{-6x-13}{8x} < 0$. Solução $x > 0$ ou $x < -13/6$.

Sequeira Ribeiro: $\frac{x-1}{x+1} < 1$, $\frac{x-1}{x+1} - 1 < 0$, $\frac{-2}{x+1} < 0$ ou $x > -1$.

Idem: $\frac{3x^2-4x}{x^2+3} < 3$, $\frac{3x^2-4x}{x^2+3} - 3 < 0$ ou $\frac{-4x-9}{x^2+3} < 0$, $x > -\frac{4}{9}$.

Dias Agudo: $\frac{x+1}{x-3} > 0$ dá imediatamente $x < -1$ ou $x > 3$. Se fôsse $\frac{x+1}{x-3} < 0$, seria $3 > x > -1$.

um número exacto de juntas de bois e porcos num total de 34 cabeças. Sabe-se que o triplo do número de porcos é igual à soma de 5 vezes o número de bois com 3 vezes o número de cavalos. Determine o número de bois, de cavalos e de porcos.

2038 — Um diedro de $105^\circ 11', 4$ intersecta uma esfera cujo centro está situado sobre a sua aresta. O plano perpendicular à aresta do diedro e passando pelo centro da esfera contém dois pontos situados