2061 — Mostre que se

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2+2\,(x^2+y^2+z^2)\,(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)^2}{(x+y+z)^4-(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{2}$$

se tem também $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=\dfrac{1}{3}$. R: *A fracção dada pode escrever-se:*

$$\frac{(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2}{(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx)\,(2xy+2yz+2zx)}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{4\,(xy+yz+zx)}=\frac{1}{2}$$

ou $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ *donde é* $(x^2+y^2+z^2)^2=$ $=3\,(xy+yz+zx)$ *e portanto* $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\dfrac{1}{3}$.

2062 — Num quadrilátero $ABCD$, os ângulos B e D são rectos, a diagonal AC mede d, o perímetro vale $2p$ e a área é S. Exprima em função dêstes dados os valores dos quatro lados. R: *Se* x, y, z, *e* t *forem os lados do quadrilátero, as equações que resolvem o problema são:*

$$\begin{cases} x+y+z+t=2p \\ xy+zt=2S \\ x^2+y^2=d^2 \\ z^2+t^2=d^2 \end{cases}$$

da 2.ª, 3.ª e 4.ª equações tira-se: $(x+y)^2+(z+t)^2=2d^2+4S$ *que com* $(x+y)+(z+t)=2p$ *permite determinar*

(1) $$x+y=p+\sqrt{d^2+2S-p^2}$$

e

$$z+t=p-\sqrt{d^2+2S-p^2}$$

De (1) *e* $x^2+y^2=d^2$ *tira-se, fazendo* $\Delta=d^2+2S-p^2$

$$x=\frac{p+\sqrt{\Delta}+\sqrt{d^2-2S-2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$

$$y=\frac{p+\sqrt{\Delta}-\sqrt{d^2-2S-2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$

e análogamente

$$z=\frac{p-\sqrt{\Delta}+\sqrt{d^2-2S+2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$

$$t=\frac{p-\sqrt{\Delta}-\sqrt{d^2-2S+2p\sqrt{\Delta}}}{2}.$$

2063 — Uma esfera de 5 metros de raio é atravessada por um cilindro de revolução de 3 metros de raio e cujo eixo passa pelo centro da esfera. ¿Qual é a área total e qual é o volume do sólido em forma de anel recortado na esfera pelo cilindro? R: *Como o raio da esfera mede* 5m *e o raio da base do cilindro é de* 3m, *a altura do cilindro é de* $2\times 4\,\text{m}=8\,\text{m}$. *A área da zona esférica é então* $2\pi\,.\,5\,.\,8=80\pi\,\text{m}^2$. *O volume do anel é dado por* $1/6\,\pi\,.\,8^3=512\,\pi/6$.

2064 — ¿Qual é a expressão geral de todos os ângulos que satisfazem à condição

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{\cot^2 x}-\frac{1}{\sec^2 x}-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}=-3\,?$$

R: *A expressão dada pode escrever-se:* $\operatorname{cosec}^2 x-$ $-\operatorname{cotg}^2 x-(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)-\sec^2 x-(\sec^2 x-1)=-3$ *ou* $1-1-2\sec^2 x+1=-3$ *ou ainda* $\operatorname{sen} x=\pm\sqrt{2}/2$ *e portanto* $x=n\pi\pm\pi/4$.

2065 — O ângulo sob o qual um observador via determinada tôrre duplicou pelo facto dêle se ter aproximado 110 metros e triplicou quando êle se aproximou mais 50 metros. ¿Qual era a altura da tôrre? R: *Seja* α, 2α *e* 3α *os ângulos segundo os quais é vista a tôrre dos pontos situados às distâncias* $110+50+x$; $50+x$ *e* x. *É fácil ver que os ângulos sob os quais são vistos, do cimo da tôrre os segmentos de* 110m *e* 50m *são iguais a* α. *Dos triângulos que se podem considerar deduz-se que:*

(1) $$(160+x)\operatorname{tg}\alpha=h,$$

(2) $$(50+x)\operatorname{tg}2\alpha=h$$

e

(3) $$110:\operatorname{sen}3\alpha=50:\operatorname{sen}\alpha.$$

De (3) *tendo em conta que* $\operatorname{sen}3\alpha=3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha$ *tira-se que* $15\operatorname{sen}\alpha-20\operatorname{sen}^3\alpha=11\operatorname{sen}\alpha$ *e portanto* $4\operatorname{sen}\alpha=20\operatorname{sen}^3\alpha$ *e* $\operatorname{sen}^2\alpha=1/5$ *ou* $\operatorname{sen}\alpha=+\sqrt{5}/5$ *logo* $\cos\alpha=+2\sqrt{5}/5$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$ *e* $\operatorname{tg}2\alpha=4/3$, *valores que substituídos em* (1) *e* (2) *dão as equaçõs* $200+$ $+4x=3h$ *e* $160+x=2h$ *e finalmente* $h=88\,\text{m}$.

Soluções dos n.ºs 2060 a 2065 de J. da Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Exame final — 9 de Junho de 1944** — 2.º ponto.

2066 — É dado o losango de diagonais d e D. Mostre que o rectângulo de area máxima inscrito no losango tem por lados metade do valor das diagonais. R: *Representando por* 2x *e* 2y *os lados do rectângulo paralelos às diagonais menor e maior do losango, e notando que há entre êsses elementos a relação* $\dfrac{D/2-y}{x}=\dfrac{D}{d}$ *ou seja* $y=D/2-Dx/d$ *vem para valor da área* $A(x)=2xD\,(1/2-x/d)=Dx\,(d-2x)/d$. *Extrememos a função* $f(x)=d\,.\,A(x)/D=x\cdot(d-2x)$. *Tem-se:*

$f'(x) = d - 2x - 2x = 0$ *ou* $4x = d \rightarrow x = d/4$ *como* $f''(x) = -4 < 0$, *a função é maxima. Portanto, um dos lados do rectângulo é:* $2x = d/4 + d/4 = d/2$ *e o outro é* $y = D/2 - D/d \cdot d/4 = D/4$ *ou* $2y = D/2$.

2067 — Qual é a condição a que devem satisfazer h e k para que a equação $x^3 + hx + k = 0$ tenha uma raiz igual à soma dos inversos das outras duas? R: *A relação dada é* a) $r_1 = 1/r_2 + 1/r_3$ *e, além dessa, conhecem-se as relações:* b) $r_1 + r_2 + r_3 = 0$; c) $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = h$; d) $r_1 r_2 r_3 = -k$. *Das relações* a) *e* d) *tem-se* $(1/r_2 + 1/r_3) \cdot r_2 \cdot r_3 = -k$ *ou seja* $r_2 + r_3 = -k$. *De* b) *obtém-se* $r_1 = k$ *e portanto* $r_2 r_3 = -1$ *e* $r_2 + r_3 = k$. *Substituindo em* c), *vem a condição pedida* $r_1 \cdot (r_2 + r_3) + r_2 r_3 = h$ *ou* $-k^2 - 1 = h$ *ou ainda* $k^2 + h + 1 = 0$.

2068 — É dada a equação $xy + xz + yz - 2x - y - 3z + 1 = 0$. Diga que quádrica representa, determine as coordenadas do centro e refira-a aos eixos. R: *Para determinar a natureza da quádrica, calculem-se as raízes da equação em* S

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} -S & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -S & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -S \end{vmatrix} = -S^3 + 1/8 + 1/8 + 3S/4 = 0$$

As raízes desta equação são $S_1 = 1$, $S_2 = -1/2$ *(dupla). Para referir a equação aos eixos, determina-se* $k = \delta/\Delta$, *onde*

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1 & -1/2 & -3/2 & 1 \end{vmatrix} = -1/4$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1/8.$$

Portanto $k = -2$. *A equação referida aos eixos é:* $x^2 - 1/2 \cdot (y^2 + z^2) = 2$ *ou* $2x^2 - (y^2 + z^2) = 4$ *que representa um hiperbolóide de uma fôlha de revolução.*

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — Outubro de 1944.

2069 — Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} [(a^{m/x} + a^{n/x})/2]^x$. R: $\sqrt{a^{m+n}}$.

2070 — Prove que, sendo as raízes da equação de coeficientes reais $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ tôdas reais e positivas, os coeficientes da equação são alternadamente positivos e negativos a partir de $a_1 < 0$. R: *Sabe-se, pelo teorema de Descartes, que nenhuma equação de coeficientes reais tem mais raízes positivas do que variações e que o excesso, quando o há, é sempre par. Para que a equação dada, de coeficientes reais e de grau* n, *tenha* n *raízes reais é necessário que os seus coeficientes apresentem, pelo menos,* n *variações; tendo a equação* $n+1$ *coeficientes (porque é do grau* n*), o número de variações é exactamente* n, *e como o primeiro termo é positivo, será necessàriamente* $a_1 < 0, a_2 > 0, \cdots$ q. c. d.

2071 — Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos do espaço donde um segmento de comprimento k é visto segundo um ângulo constante θ. Verifique que no caso de ser $\theta = 90°$, o lugar procurado é uma quádrica; diga de que quádrica se trata e refira-a aos eixos. R: *Tomando para origem do sistema de eixos ortogonais, uma das extremidades do segmento, e para eixo oz a recta que contém êsse segmento, obtém-se para equação do lugar procurado* $m^2 [x^2 + y^2 + (z-k)^2] \cdot [x^2 + y^2 + z^2] = [x^2 + y^2 + z(z-k)]^2$ *onde* $m = \cos\theta$. *No caso de ser* $\theta = 90°$, *o lugar procurado é a esfera* $x^2 + y^2 + z^2 - kz = 0$, *de centro no ponto* $(0, 0, k/2)$ *e raio* $k/2$; *a sua equação referida aos eixos é:* $x^2 + y^2 + z^2 = k^2/4$.

Soluções dos n.os 2066 a 2071 de L. Mendonça de Albuquerque.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Exame final. — Julho de 1944.

2072 — Calcular $\sqrt[m]{(xi)^m + i(-xi)^m}$, m inteiro e positivo; $x > 0$ real; $i^2 = -1$. R: *Tem-se* $\sqrt[m]{(xi)^m + i(-xi)^m} = \sqrt[m]{(xi)^m} \cdot \sqrt[m]{1 + (-1)^m i}$. *E por ser* $(x > 0)$ $\sqrt[m]{(xi)^m} = xi\, r_m(k)$, *onde* $r_m(k)$ *representa as raízes de índice* m *da unidade, e* $\sqrt[m]{1 + (-1)^m i} =$

$$= \sqrt[2m]{2} \left[\cos\frac{(-1)^m \pi}{4m} + i \operatorname{sen}\frac{(-1)^m \pi}{4m}\right] r_m(k), \text{ vem}$$

$$\sqrt[m]{(xi)^m + i(-xi)^m} = \sqrt[2m]{2}\, xi \left[\cos\frac{(-1)^m \pi}{4m} + i \operatorname{sen}\frac{(-1)^m \pi}{4m}\right] r_m^2(k).$$

2073 — É dada a função $y(x)$ assim definida no intervalo $(-1, +1)$: $-1 \leq x < 0 \rightarrow y(x) = x$; $0 \leq x \leq 1 \rightarrow y(x) = x^2$.

Representá-la geomètricamente, bem como à sua derivada $y'(x)$. ¿É aplicável a $y'(x)$ o teorema sôbre as descontinuidades das funções derivadas? e o teorema de Darboux? Razões. R: *A função é continua em todo o intervalo* $(-1, +1)$ *por o ser nos intervalos abertos* $(-1, 0)$ *e* $(0, 1)$ *e no ponto zero* $\rightarrow y(0-0) = y(0+0) = y(0) = 0$. *No intervalo* $(-1, 0)$, *aberto à direita, trata-se do segmento de recta que une os pontos de coordenadas* $(-1, -1)$ *e* $(0, 0)$; *no intervalo* $(0, +1)$ *trata-se de um arco de parábola. A derivada existe naquêles intervalos parciais mas não existe no ponto* *zero, por o* $\lim_{h=0} [f(0+h)-f(0)]/h$ *não ser independente da forma como* h *tende para zero. No intervalo aberto à direita* $(-1,0)$ *a sua imagem é o segmento de recta que une os pontos* $(-1,1)$ *e* $(0,1)$; *no intervalo* $(0,+1)$, *trata-se do segmento de recta que une a origem ao ponto* $(1,2)$.

2074 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=x^x, x \geq 0$. As ordenadas dos pontos de estacionaridade, se existirem, serão calculadas, pelo método dos desenvolvimentos em série, com duas casas decimais exactas. R: *A função existe no intervalo* $(0,+\infty)$, *tomando o valor* 1 *para* $x=0$. *Quando* $x \to \infty$, $y \to \infty$. *Não tem assíntotas. É* $y'(x)=$ $=x^x(\log x+1)$ *e* $y''(x)=x^x\,[(\log x+1)^2+1/x]$ *Para* $y'(x)=0$ *é* $\log x+1=0 \to x=1/e$, *sendo* $y''(1/e)>0$ *e* $y(1/e)=e^{-1/e}$. *A função tem portanto um mínimo no ponto* $(1/e,\ e^{-1/e})$. *Como para* $x>0$ *é* $y''(x)>0$, *a curva de equação* $y=x^x$ *tem, no intervalo* $(0,+\infty)$, *a concavidade voltada para os* yy *positivos.*

Sendo $y(1/e)=e^{-1/e}=1-\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2!\,e^2}-\dfrac{1}{3!\,e^3}+\cdots$,

bastará tomar os quatro primeiros têrmos para que o êrro sistemático cometido seja inferior a 1/2.000, *visto ser* $1/4!\,e^4<1/2.00$. *E para que o êrro de cálculo seja inferior a* 1/2.000 *bastará que cada um dos três últimos têrmos tomados seja calculado com um êrro inferior a* 1/10.000. *E assim se tem* $y(1/e) \simeq 1-0{,}3679+$ $+0{,}0677-0{,}0083=0{,}6815$. *Com a aproximação desejada ter-se-á* $y(1/e) \simeq 0{,}68$.

Soluções dos n.os 2072 a 2074 de A. da Costa Miranda.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame final — Época de Dezembro — Milicianos — **1943-44.**

2075 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\dfrac{1}{1+2\,e^{-(1-x)}}$. R: *Função contínua definida no intervalo aberto* $(-\infty,+\infty)$ *e cujo contradomínio é o intervalo aberto* $(0,+\infty)$. *Para* $x \to -\infty$, $y \to 1$ *e para* $x \to \infty$, $y \to 0$. *A sua ordenada na origem é* $e/(2+e)$. *Do exame de* $y'=\dfrac{-2\,e^{x-1}}{(1+2e^{x-1})}$ *e de* $y''=\dfrac{2e^{x-1}(2\,e^{x-1}-1)}{(1+2\,e^{x-1})^3}$, *conclue-se que a curva é monotónica decrescente e tem a concavidade voltada no sentido negativo do eixo das ordenadas, no intervalo* $(-\infty,\ 1-\log 2)$ *e em sentido opôsto no intervalo* $(1-\log 2,+\infty)$. *O ponto* $(1-\log 2,\ 1/2)$ *é um ponto de inflexão.*

2076 — Sendo $y=f(x)$, calcular $\dfrac{d(\log y)}{d(\log x)}$.

R: $\dfrac{d(\log y)}{d(\log x)}=\dfrac{1/y\,.\,dy}{1/x\,.\,dx}=\dfrac{x}{y}\,\dfrac{dy}{dx}$.

2077 — Determinar um polinómio inteiro $P(x)$ que satisfaça às condições:

$P(-5)=-156,\quad P(-3)=-40,\quad P(-1)=-4,$
$P(1)=0,\quad P(3)=20,\quad P(5)=104.$

R: *Construindo a tabela de diferenças, com os valores dados, obtém-se* $\Delta P(-5)=116$, $\Delta^2 P(-5)=-80$, $\Delta^3 P(-5)=48$, $\Delta^4 P(-5)=\Delta^5 P(-5)=0$. *A interpoladora de Gregory-Newton dará* $f(-5+2x)=-156+$ $+116x-40x(x-1)+8x(x-1)(x-2)$ *ou* $f(z)=z^3-$ $-z^2+z-1$ *que é o polinómio procurado.*

Soluções dos n.os 2075 a 2077 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Dezembro de 1944.

2078 — O rendimento de um transformador estático de indução é dado pela fórmula:

$\rho=\dfrac{V_2\,.\,I_2}{V_2\,I_2+A+B\,.\,I_2^2}$, em que: V_2 é a tensão secundária (pràticamente constante), I_2 é a intensidade secundária (variável), A é a perda no ferro (constante), e BI_2^2 é a perda no cobre (B constante). Mostrar que o rendimento é máximo quando a perda no ferro é igual à perda no cobre. R: *Para resolver o problema, basta provar que:* 1.º $A=BI_2^2$ *é raiz da primeira derivada da expressão do rendimento;* 2.º *A primeira derivada que não se anula para* $A=BI_2^2$ *é de ordem par. O valor numérico dessa derivada para* $A=BI_2^2$ *é negativo.*

1.º) $\rho'=\dfrac{V_2(A-B\,.\,I_2^2)}{(V_2\,I_2+A+BI_2^2)^2}$, $\rho'=0 \to V_2(A-B\,I_2^2)=0$, *e portanto:* $A=BI_2^2$.

2.º) *Sendo* $\rho'=\dfrac{N}{D}$ *é* $\rho''=\dfrac{N'\,D-N\,D'}{D^2}$.

Como D *é positivo,* D^2 *também é positivo e* $A=BI_2^2$ *anula* N · *para provar que* $\rho''<0$ *para* $A=BI_2^2$, *basta provar que* $N'<0$.

$N'=-2B\,.\,V_2\,.\,I_2$ *e* $N'(A=BI_2^2)=-\dfrac{2A}{I_2}\cdot V_2<0$, c. q. p.

2079 — Estudar a função $y=tg\,x+8\operatorname{sen}x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. R: 1.º) *Periodicidade: A função y é periódica de período* 2π: $tg(x+2\pi)+8\operatorname{sen}(x+2\pi)=$ $=tg\,x+8\operatorname{sen}x=y$. 2.º) *Pontos de descontinuïdade: Para* $x=\pi/2$ *e* $x=3\pi/2$ *vem* $y=\infty$.

$\lim_{x=\pi/2-0} y=+\infty;\qquad \lim_{x=\pi/2+0} y=-\infty;$

$\lim_{x=3\pi/2-0} y=+\infty;\qquad \lim_{x=3\pi/2+0} y=-\infty$

3.º) *Pontos de encontro com o eixo dos XX:*

$tg\,x+8\operatorname{sen}x=0;\quad \dfrac{\operatorname{sen}x\,.\,(1+8\cos x)}{\cos x}=0;$

$$\operatorname{sen} x\,(1+8\cos x)=0\,;\quad \operatorname{sen} x=0\,;\quad x=0\,;\quad x=\pi\,;$$

$$\cos x=-1/8=-0{,}125\,;\quad x=97^\circ\,10'\,;\quad x=262^\circ\,50'\,.$$

4.º) *Ponto de encontro com o eixo dos YY:*

$$x=0\,,\quad y=0\,.$$

5.º) *Divisão do intervalo* $(0\,,2\pi)$ *em intervalos parciais, nos quais a função é sempre crescente ou sempre decrescente:*

$$y'=\sec^2 x+8\cos x\,;\quad \frac{1}{\cos^2 x}+8\cos x=0\,;$$

$$\frac{1+8\cos^3 x}{\cos^2 x}=0\,;\quad \cos x=-1/2\,;\quad x_1=2\pi/3\ \text{ e }\ x_2=4\pi/3\,.$$

$y'>0$ *para* $0<x<2\pi/3$ *e* $4\pi/3<x<2\pi$ y *crescente.*
$y'<0$ *para* $2\pi/3<x<4\pi/3$ y *decrescente.*

6.º) *Máximos e mínimos:*

$$y'=0\,,\quad x_1=2\pi/3\quad \text{e}\quad x_2=4\pi/3$$

$$y''=2\,.\sec^2 x\,.\operatorname{tg} x-8\operatorname{sen} x=2\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}-8\,.\operatorname{sen} x$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}/2}{-1/8}-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0\quad \textit{Máximo}$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right)=2\cdot\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/8}-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=8\,.\sqrt{3}+4\sqrt{3}>0\qquad \textit{Mínimo.}$$

A função tem um máximo para $x=2\pi/3$ *e um mínimo para* $x=4\pi/3$.

$$f(2\pi/3)=-\sqrt{3}+8\,.\sqrt{3}/2=3\,.\sqrt{3}\quad \textit{Máximo}$$

$$f(4\pi/3)=\sqrt{3}-4\sqrt{3}=-3\sqrt{3}\quad \textit{Mínimo}$$

7.º) *Pontos de inflexão:*

$$y''=2\,.\sec^2 x\,.\operatorname{tg} x-8\operatorname{sen} x=0\,;$$

$$\frac{\operatorname{sen} x\,.\,(1-4\cos^3 x)}{\cos^3 x}=0\,;\quad \operatorname{sen} x=0\,;\quad x_1=0\,;\ \text{ e }\ x_2=\pi$$

$$1-4\,.\cos^3 x=0\,;\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=0{,}629\,;$$

$$x_3\simeq 51^\circ\,;\quad x_4\simeq 309^\circ\,.$$

$$y'''=2\,.\sec^4 x+2\operatorname{tg} x\,.\,2\sec^2 x\operatorname{tg} x-8\,.\cos x$$
$$=2\,.\sec^4 x+4\sec^2 x\,.\operatorname{tg}^2 x-8\cos x\,;$$

$$f'''(0)=2-8=-6\neq 0\,;\quad f'''(\pi)=2+8=10\neq 0\,;$$

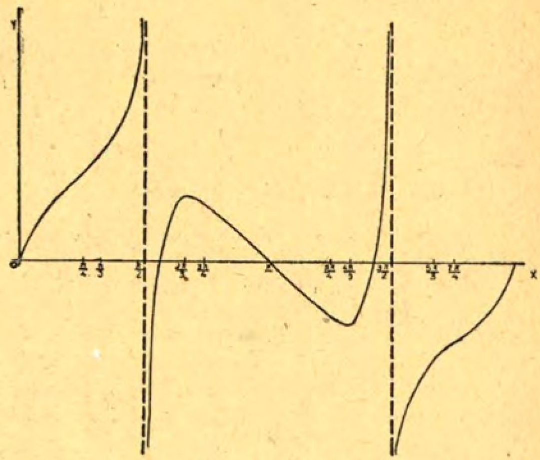
$$f'''\left(\operatorname{arc}\,\cos\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\neq 0\,.$$

Pontos de inflexão:

$$x=0\,,\quad y=0\,;\quad x=\pi\,,\quad y=0\,;$$

$$x=51^\circ\,,\quad y=7{,}5\,;\quad x=309^\circ\,,\quad y=-7{,}5\,.$$

Representação gráfica:



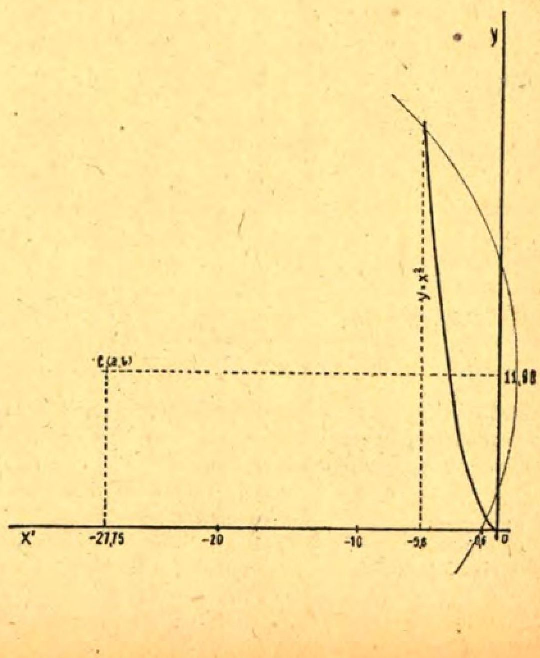
2080 — Determinar, com êrro inferior a 0,1, as raízes reais da equação $x^4-22{,}6\,x^2+55{,}5\,x+40=0$. R: *Utilizaremos um método gráfico. As raízes reais da equação dada, serão as abscissas dos pontos de intersecção de uma parábola com uma circunferência cujas equações vamos estabelecer: fazendo* $y=x^2$, *vem*

$$y^2-22{,}6\,y+55{,}5\,x+40=0\,;\quad x^2-y=0\,;$$

somando membro a membro, teremos:

$$\begin{cases} x^2+y^2-23{,}6\,y+55{,}5\,x+40=0\\ y=x^2\,.\end{cases}$$

A primeira equação representa uma circunferência e a segunda uma parábola.



Calculemos as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

Coordenadas do centro:

$$C\,(a\,,b)\,;\quad a=-55{,}5/2=-27{,}75\,;$$

$$b=+23{,}6/2=+11{,}80\,;\quad C\,(-27{,}75\,,+11{,}80)\,.$$

Raio:

$$R^2=27{,}75^2+11{,}80^2-40=29{,}48\,.$$

Construídas as curvas, obtemos para raízes reais da equação:

$$x_1=-5{,}6 \quad e \quad x_2=-0{,}6\,.$$

2081 — A recta r passa por O e por $A\,(2\,,3\,,4)$; a recta s passa por $B\,(2\,,0\,,0)$ e por $C\,(0\,,3\,,4)$: verificar que r e s são coplanas e determinar o ângulo do seu plano com OZ. (eixos rectangulares)

$$R:\; r)\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\,,\qquad s)\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\,.$$

Condição de coplanaridade:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

Equação do plano definido por r *e* s.

vector da recta r: $\mathbf{u}=2I+3J+4K$

vector da recta s: $\mathbf{v}=-2I+3J+4K$

$$\textit{vector do plano}\quad \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\begin{vmatrix} I & J & K \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-16J+12K$$

Como o plano passa pela origem $D=0$.

Equação do plano pedido:

$$16y-12z=0 \quad \textit{ou} \quad \pi)\ 4y-3z=0\,.$$

Equações do eixo OZ *escritas sob a forma normal:*

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}\,.$$

Ângulo de $\overline{OZ}$ *com* π:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{-3}{\sqrt{16+9}}=-\frac{3}{5}\,,\qquad \varphi=\operatorname{ang\,sen}\,(3/5)\,.$$

Soluções dos n.os 2078 a 2081 de Jorge Cândido da Silva.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final, 20-6-1945** — 1.ª chamada.

2082 — Definida, em projecções cotadas, uma superfície cónica por $[d]_{\odot} -\!\cdot\!- \nu_0$ e $V_{(4)}$ $(V' -\!\cdot\!- [d'])$, construa um plano π, passando por $n_{(4)}$ dada $\left(\text{com } n' \begin{cases} \dot{-}\ V' \\ \text{cortando } [d'] \end{cases}\right)$ e produzindo secção parabólica na superfície.

Se, mantendo a cota de n, fizermos rodar n' em tôrno dum seu ponto P', existe alguma superfície envolvente das posições do plano π do enunciado? Caso afirmativo, caracterize essa superfície R: π *deve ser* // *a um plano tangente* θ *com horisontais* // n. *Basta construir* h^θ *tangente a* [d] *e paralelo a* n. *Teremos:*

$$\theta\equiv V, h^\theta \ e\ \pi \begin{cases} -\!\cdot\!-\ n \\ //\ \theta\,. \end{cases}$$

Há 2 soluções para cada direcção de n'. *A sup. envolvente do enunciado é uma sup. cónica homotética da dada, e tendo o vértice em* $P_{(4)}$.

2083 — Considere 3 rectas concorrentes, a, b e c, nas seguintes condições: a e b de nivel; $b'\equiv c'$.

Suponha um parabolóide hiperbólico $[\pi]$, do qual: b é um diâmetro, a e c são assíntotas da secção feita por $\alpha\equiv a\,,c$; X (dado) é ponto de contacto dum plano tangente $\beta//\alpha$ (dado) e d (dada, com $d'//b'$) é uma geratriz. Determine o vértice dêsse parabolóide.

Questionário:

a) O conhecimento das assíntotas a e c implica o conhecimento das direcções de algumas rectas da superfície? Porquê? Tal conhecimento, aliado ao da direcção do eixo do parabolóide, arrasta o dos planos directores? Porquê? b) Trace as geratrizes da superfície situadas em β. c) Que circunstância caracteriza as geratrizes que definem o plano tangente no vértice? Sendo recto o parabolóide, que mais se pode afirmar acêrca dessas geratrizes? R: a) *Implica o das geratrizes da sup. que são* //s a a *e* c *respectivamente, porque as assíntotas duma secção são as intersecções do plano secante com os pl. assintóticos das geratrizes que dão os pontos impróprios daquela secção. Arrasta, porque cada uma daquelas geratrizes é paralela a um dos pl. directores e o eixo é paralelo aos 2 planos directores; os pl. directores são, assim:* ν_0 *e* $\rho \begin{cases} -\!\cdot\!-\ c \\ \perp \nu_0 \end{cases}$ *(o paraboloide é isósceles).* b) X *é, necessàriamente, o ponto* b . β *e as geratrizes situadas em* β *são as rectas* m *e* n *que passam por* X *e são paralelas a* a *e* c *respectivamente;* c) *São perpendiculares à intersecção dos planos directores, cada uma delas paralela a um pl. director; sendo recto o paraboloide, tais geratrizes são ortogonais.*

Solução: *A geratriz* d *pertence ao mesmo sistema que* n; *é, pois, complana com* m *e não complana com* n. *Construídas 2 geratrizes* m_1 *e* m_2 *de nivel, temos*

$m'_1 . m'_2 \equiv V'$; *a proj. vertical* V'' *é obtida por intersecção da vertical de* V' *com a geratriz de nível* m_3 *cuja projecção horizontal* m'_3 *passa por* V' *e é perpendicular a* b'.

2084 — Dum parabolóide isósceles, conhece-se: o vértice $V(3,3)$; uma das geratrizes que passam em V $(g \perp \varphi_0)$ e sabe-se que: planos de rampa produzem secções parabólicas; e o plano tangente θ num ponto $P -\!\!\cdot\!\!- g$ $(P \equiv\!|\!\equiv V)$ faz 45° com ν_0. Determine: a) o eixo, e os traços da superfície em ν_0 e φ_0. b) um plano tangente β paralelo a α dado $(\alpha \equiv h^{\alpha}, v^{\alpha}, \nparallel LT)$. c) o centro da secção feita pelo plano α.

Questionário:

1) Conhecer as geratrizes que se cruzam no vértice equivale a conhecer as orientações dos planos directores? Justifique a resposta. 2) Trace a 2.ª geratriz situada no plano tangente θ. 3) Qual a circunstância, referida no enunciado, que faz o conhecimento da direcção dos diâmetros do parabolóide? Porquê? 4) Dão algum elemento importante da secção (α) as rectas pelas quais vai definir o plano β? Justifique a resposta. R: 1) *Sim, porque a normal ao plano dessas geratrizes dá a direcção do eixo, e esta direcção combinada com cada uma daquelas rectas, define um pl. director; no caso presente, os pl. directores são:* ν_0 *e* φ_0;

2) *É a recta de frente* f *do plano* θ, *conduzida por* P;

3) *É o facto de saber que planos* // LT *produzem secções parabólicas, porque só planos // aos diâmetros produzem secções dêste género;* 4) *Dão as direcções assintóticas da secção* (α) *pois elas são as geratrizes da superfície situadas em* β *e, portanto, paralelas a* α.

Solução: a) *O eixo é a paralela a* LT *conduzida por* V; $h^{[\pi]}$ *fica definido por* V' *e por* H'; $v^{[h]}$ *fica definido por* V'' *e por* $M \equiv LT . h^{[\pi]}$ b) V' *e* V'' *são pontos de divergência, numa e noutra projecção, das geratrizes de nível e frente respectivamente; as geratrizes de* β *constroem-se, pois, imediatamente; e o seu ponto comum* X *é o ponto de contacto de* β; c) *A paralela a* LT *conduzida por* X *é o diâmetro conjugado com a orientação* (α); *o seu traço em* α *é o centro da secção* (α).

2085 — Dados: um elipsóide $[\varepsilon]$ de revolução, de eixo vertical (afastamento 4 cm, raio do equador — 2 cm) e um cilindro de revolução de eixo de frente (inclinado a 45° sôbre ν_0) e raio 2 cm, nas seguintes condições: na intersecção das 2 superfícies verifica-se um caso de beijamento simples, e a projecção vertical da intersecção é uma cónica. Determine: a) as orientações de planos que dão, nas 2 superfícies, secções homotéticas, e uma das assíntotas da projecção vertical da intersecção. b) A linha dos pontos duplos aparentes na projecção horizontal. c) Os pontos duplos nessa projecção, se existirem. R: *As 2 condições impostas, pelo enunciado, à intersecção, obrigam à existência de um plano principal comum de frente e de um plano tangente comum, projectante vertical (fazendo* 45° *com* ν_0*)*.

a) *As orientações pedidas determinam-se recorrendo a superfícies homotéticas das dadas e circunscritas a uma mesma esfera. Uma das assíntotas da proj. vertical também se constroe imediatamente.*

b) *A linha dos pontos duplos aparentes pedida é a intersecção do plano do equador do elipsoide com o plano projectante vertical do eixo do cilindro.*

Nota: **Duração da prova — 4 horas livres.**
Resposta obrigatória — e 2082 2085 e uma das outras duas.
Dispensa-se o relatório em qualquer problema. Facultativa a justificação de qualquer dos passos da construção relativa a 2085.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final, 23-6-1945** — 2.ª chamada.

2086 — Considere um hiperbolóide de revolução, cuja gola ($R = 2$ cm) exista em ν_4 e no qual exista uma geratriz g_d perpendicular a um dado plano π $(\widehat{\pi\nu_0} = 45°)$ Dada uma recta $r // g_d$, determine o ponto P (próprio) de intersecção de r com a superfície. Como procuraria uma recta $s -\!\!\cdot\!\!- P$ tal que o plano $\alpha \equiv r, s$ produzisse, na superfície, uma secção hiperbólica de assíntotas perpendiculares.

2087 — Um parabolóide hiperbólico é definido pelo plano director ν_0 e directrizes a e b paralelas a $\beta_{2,4}$ Determine um plano π, passando por um dado ponto P, com uma dada direcção l de traço horizontal e produzindo, na superfície, uma secção hipérbólica equilátera. Construa uma das assíntotas da secção.

Questionário:

a) O conhecimento dos planos directores dum parabolóide $[\varepsilon]$ implica o conhecimento das direcções assintóticas das secções feitas por planos duma mesma orientação nos infinitos parabolóides com os mesmos planos directores que $[\varepsilon]$. Como justifica a afirmação? b) Como poderia determinar o centro da secção feita num parabolóide $[\varepsilon]$ por um plano α, se conhecesse o diâmetro de $[\varepsilon]$ conjugado com a orientação a que pertence α? c) Se escolhesse novas directrizes a_1 e b_1 também paralelas a $\beta_{2,4}$ em substituïção de a e b, mantendo ν_0 como um dos planos directores, haveria alguma alteração relativamente ao ângulo das assíntotas da secção $[\pi]$? Porquê? d) Relativamente à direcção l dada para h^{π}, em que caso não tem solução o problema proposto? Porquê?

2088 — Dum hiperbolóide empenado conhecem-se duas directrizes $d_1 \perp \nu_0$ e $d_2 \perp \varphi_0$, e sabe-se que um dado plano $\rho \perp \varphi_0$ determina uma secção hiperbólica da qual se conhece uma das assíntotas $m//d_2$ e o ângulo k^0 das 2 assíntotas. Construa uma 3.ª directriz $d_3//LT$ de modo que o hiperbolóide definido por d_1, d_2 e d_3 satisfaça às condições do enunciado. Centro da secção (P).

Nota: **Dispensa-se, aqui, a marcação rigorosa do ângulo de k^0 das assíntotas, desde que o aluno diga, na altura própria, em que essa construção intervém no problema, como faria tal construção.**

Questionário:

a) Sendo a secção hiperbólica, quantas geratrizes há, na superfície, paralelas ao plano secante? Porquê? Conhece algum ponto da projecção horizontal de alguma delas? Qual? Porquê? Como poderia aproveitá-lo para, nas condições do enunciado, construir a 2.ª direcção assintótica? b) Existe alguma superfície envolvente dos planos que intervêm na determinação das assíntotas das secções planas dum hiperbolóide? Como se designa tal superfície? Em que caso se pode afirmar ser tal superfície de revolução? c) Se o plano ρ fôsse de perfil, poderia escolher-se k arbitràriamente em face dos restantes elementos do enunciado? Justifique a resposta.

2089 — Considere um hiperbolóide de revolução de eixo $e \perp \nu_0$ e uma superfície cónica, de vértice V pertencente à gola do hiperbolóide e afastamento igual ao do centro C do hiperbolóide, e de directriz na directriz (em ν_0) do cone assintótico daquela superfície. a) Existe algum plano de simetria ortogonal comum às 2 superfícies? Qual? Alguma orientação de planos de sec. hom? Qual? b) Determine uma das assíntotas da projecção vertical da intersecção das duas superfícies. c) V é um ponto de intersecção das 2 superfícies. Diga tudo quanto sabe dêsse ponto relativamente à intersecção e indique, justificando, as suas tangentes.

Enunciados e soluções dos n.os 2082 a 2089 de Humberto Meneses.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — I.º Exame de frequência — 1945

2090 — Calcule a derivada $\dfrac{du}{dx}$ da função u definida pela equação $u^2+x^2+y^2+z^2=c^2$ em que z e y são as funções de x definidas por $\log(xy)+y/x=a^2$ e $\log(z/x)+z\,x=b^2$.

2091 — Ache a equação transformada de

$$(x+y)\,\frac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

mediante as relações $u=x^2-y^2-2\,xy$ e $v=y$.

F. C. L. — 2.º Exame de frequência — 1945.

2092 — Calcule $\displaystyle\int\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

2093 — Ache a evoluta da parábola $y=x^2/2$, e faça a sua representação geométrica.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — Exame final — Julho, 1944.

2094 — Determinar o plano osculador da linha $x=u^u$, $y=\cos\pi u/2$, $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{u}$ no ponto correspondente a $u=1$. R: $\pi X+6Y+8\pi Z=\pi+2\pi^2$.

2095 — Integrar a equação $y'-\dfrac{y}{2x}=\dfrac{1}{y\sqrt{x^2-1}}$. R: *Fazendo* $y^2=z$ *vem a equação linear* $z'-\dfrac{z}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ *que integrada dá* $z=C_1x+2x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$. *Logo* $y^2=C_1x+2x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$.

2096 — Calcular o volume limitado pela superfície gerada pela rotação da linha $x^2+(y-1)^2=1$ em tôrno do eixo dos yy, por meio de um integral duplo e depois por um integral simples. R:
a) *A equação da superfície gerada é* $z^2+(y-1)^2+x^2=1$.
Logo $V=\displaystyle\iint_D 2\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}\,dx\,dy$, *sendo* D *limitado por* $x^2+(y-1)^2=1$. *Fazendo a mudança de variáveis* $x=\rho\cos\varphi$, $y-1=\rho\operatorname{sen}\varphi$ *vem*

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=4\pi/3.$$

b) $$V=\pi\int_0^2 x^2\,dy=\pi\int_0^2\{1-(y-1)^2\}\,dy=4\pi/3.$$

2097 — Determinar a equação cartesiana de uma linha em que $R=1+s^2$, sendo R o raio de curvatura e s o comprimento do arco. Tomar para eixo dos xx a tangente na origem dos arcos. R: *Temos*

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=1+s^2 \quad \textit{que integrada dá} \quad s=\operatorname{tg}\alpha \quad (\alpha_0=s_0=0).$$

$$\begin{cases} dx=ds\cos\alpha=\dfrac{d\alpha}{\cos\alpha}\\[2mm] dy=ds\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\end{cases}$$ *Fazendo* $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ *vem*

$$\begin{cases} dx = -\dfrac{d\beta}{\operatorname{sen}\beta} \\ dy = -\dfrac{\cos\beta\, d\beta}{\operatorname{sen}^2\beta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\log \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + C_1 \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta} + C_2 . \end{cases}$$

Atendendo às condições iniciais vem $x = -\log \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ *e* $y = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} - 1$.

Eliminando β *temos* $y + 1 = \frac{1}{2}\,|\,e^x + e^{-x}\,|$.

Soluções dos n.os 2094 a 2097 de Jayme Rios de Sousa

I. S. T. — Cálculo — **I.º Exame de freqüência — 1944.**

2098 — Determinar os máximos e mínimos da função

$$f(x, y) = \int_x^{xy} x\sqrt{1-x^2}\, dx .$$

2099 — Verificar, para as funções $f_1 = ax^2 + 2b\,xy$, $f_2 = x + 2y$ e $f_3 = 3x + 2a\,y$ se é possível determinar a e b de modo tal que, das três fnnções, só uma seja independente.

2100 — Estudar a convergência do integral

$$\int_0^\infty e^{-u^3 \operatorname{sen}^2 \sqrt{u}}\, du .$$

I. S. T. — Cálculo — **2.º Exame de frequência — 1944** — 2.ª chamada.

2101 — Integrar a equação $yy' = \frac{2}{x^3} + \frac{3y^2}{x^2}$.

2102 — Determinar as assíntotas da curva $ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$.

2103 — Calcular o integral $\iint \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2+1)^2}$ extendido a todo o plano.

I. S. T. — Cálculo — **2.º Exame de frequência — 1944** — 1.ª chamada — (exame teórico).

2104 — Comparação dos métodos de Cauchy e Logrange-Charpit para a integração das equações de primeira ordem, não lineares, às derivadas parciais.

2105 — Quando é que o pfaffiano $\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i$, $X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, admite um factor integrante? Porquê?

I. S. T. — Cálculo — **2.º Exame de frequência — 1944** 2.ª chamada — (exame teórico).

2106 — Curvas notáveis das superfícies.

2107 — Integração da equação diferencial total.

F. C. P. — Análise Superior — **1.º Exame de freqüência — 28 de Fevereiro de 1945.**

2108 — O plano tangente no ponto n de uma superfície corta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B.

Determinar a equação de derivadas parciais das superfícies tais que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 1$.

Integrar a equação obtida e do integral completo deduzir a superfície integral que passa pela linha $xy = 1$, $z = 1$. R: *Como* $\overline{OA} = (xp + yq - z)/p$ *e* $\overline{OB} = (xp + yq - z)/q$, *a equação de derivadas parciais das superfícies pedidas é*

$$\frac{(xp + yq - z)^2}{pq} = 1, \quad ou \quad z = xp + yq - \sqrt{pq} .$$

Esta equação (de Clairaut) admite para integral completo $z = c_1 x + c_2 y - \sqrt{c_1 c_2}$.

A superfície integral que passa pela linha dada é $z = 2\sqrt{xy} - 1$.

2109 — Determinar uma função analítica $f = \varphi + i\psi$ da variável z, sabendo que $\varphi = x - \frac{x}{x^2+y^2}$ e que $f(1) = 0$. R: *Como* $\Delta\varphi = 0$, *o problema é possível. Tira-se:*

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Logo $d\psi = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \left(1 - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dy$.

Portanto $\psi = \frac{y}{x^2+y^2} + y + c_1$.

Será então

$$f(z) = \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{y}{x^2+y^2} + y + c_1\right).$$

Como $f(1) = 0$, $c_1 = 0$. *Exprimindo* $f(z)$ *em função da variável* z, *vem* $f(z) = z - 1/z$.

2110 — Calcular $\int_S \frac{e^{z-z^2}}{z^2(z-1)}\, dz$ em que S é uma circunferência com o centro na origem e raio $R = 2$. R: *Pelo teorema dos resíduos:*

$$\int_S \frac{e^{z-z^2}}{z^2(z-1)}\, dz = 2\, i\pi\, (R_0 + R_1),$$

onde R_0 *e* R_1 *são os resíduos correspondentes aos polos* 0 *e* 1.

Como $R_0 = -2$ *e* $R_1 = 1$, *o integral pedido é igual a* $-2\, i\pi$.

Soluções dos n.os 2108 a 2110 de Laureano Barros.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — **I.º exame, 2-2-944.**

2111 — Integrar a equação às derivadas parciais $z(rt-s^2)+pqs=0$.

2112 — Desenvolver a função $f(x)=x(\pi-x)/8$ em série do seno, no intervalo $0\leq x\leq\pi$.

2113 — Averiguar que a equação integral

$$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy,$$

se fôr $k(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ e $\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx=A$, admite a solução

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda f_1(x)}{1-A\lambda}\int_a^b f(y)\,f_2(y)\,dy.$$

2114 — Determinar as curvas de estacionaridade do integral $I=\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^n\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

46 — NEVILLE, Eric Harold — **Jacobian Elliptic Functions** — Cambridge — 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do Instituto Britânico em Portugal.

O intento dêste livro, no dizer do autor, é restabelecer, sob um novo aspecto, à custa de *estruturas* fundamentais de definição, a aparelhagem algoritmica das clássicas funções elípticas de Jacobi, que o emprêgo das funções *theta* como elementos iniciais, embora artificiosos, da teoria, quási por completo banira dos modernos tratados. E, como as principais razões dêsse banimento se apoiavam nas dificuldades trazidas pela inversão do integral de Legendre, no caso da variável complexa, é à remoção dessas dificuldades que directamente visa a elegante construção dos novos elementos elípticos do autor, permitindo restaurar, em moldes acessíveis, a fertilíssima teoria clássica. E não se recuperam apenas os benefícios dessa fertilidade que tem, sobretudo, como razão de ser, a possibilidade de cálculo daquêles integrais com as quais as funções jacobianas estão tradicionalmente associadas, possibilidade que resulta, como se sabe, das relações que as ligam com as suas derivadas. A teoria exposta tem ainda o merito de elucidar mais fortemente do que a teoria elementar weierstrassiana da função $P(z)$ as relações que implicitamente ligam a dupla periodicidade da função elíptica às propriedades do integral que é a sua inversa. Como se consegue êste objectivo? O autor associa com uma arbitrária função weierstrassiana um conjunto simétrico de funções duplamente periódicas, tendo em cada paralelogramo dos períodos da função inicial, dois polos simples. Êsse conjunto converte-se num sistema jacobiano pela especialização dum dos parâmetros; e essa especialização, que é fundamental na teoria, importa, para o sistema obtido, a dupla periodicidade, sem impôr aos parâmetros a condição de serem reais. Seguidamente, demonstrações simples dos teoremas de adição e das transformações de Jacobi e Landen substituem as demonstrações algébricas exigidas pelo integral de inversão.

A *estrutura* é a configuração dos pontos congruentes (em que a função toma o mesmo valor); e, embora ela seja sempre formada (para uma função duplamente periódica) pelos pontos de intersecção de duas famílias de rectas paralelas equidistantes, no plano da variável complexa, essas famílias não são fundamentais: porque não são únicas e porque apenas têem interêsse os pontos congruentes em que se cruzam. Das estruturas, das células de congruência e do conceito geral de função elíptica se ocupa pormenorizadamente o autor na introdução do livro, na qual se inclui áinda a teoria das funções weierstrassianas, formulada a partir do conceito de estrutura. E logo no capítulo primeiro são introduzidos os elementos *primitivos* com as seguintes notações:

$$(1)\qquad \begin{cases} fjz=[P(z)-e_f]^{1/2} \\ gjz=[P(z)-e_g]^{1/2} \\ hjz=[P(z)-e_h]^{1/2}, \end{cases}$$

sendo $P(z)$ a função de Weierstrass e e_f, e_g, e_h os respectivos parâmetros (e_1, e_2, e_3) (ou sejam os valores de $P(z)$ nos pontos semi-períodos). As funções (1) são duplamente periódicas, e constroem-se, à sua custa, as restantes funções *elementares* (ao todo *doze*) defini-