didade de trinta quilómetros a qual, sob a acção térmica do radio, ora se liquefazia ora se solidificava.

King sugere, em 1929, uma nova explicação por analogia com o que sucede a uma barra de ferro quando se encontra sob a acção de um campo magnético: se o campo é intenso a barra torna-se mais curta; se é moderado ela aumenta de comprimento. Dêste modo, se o interior da Terra fôr constituído por ferro, como geralmente se admite, êle deve contrair-se ou dilatar-se sempre que o campo magnético é ou não intenso. Mas, ocorre preguntar, a que obedecerão estas variações do campo magnético terrestre? Às manchas solares, que com tanta freqüência se invocam hoje para explicar as mais variadas coisas?

Possìvelmente por falta de elementos suficientes, tôdas as tentativas de King para encontrar uma correlação nítida entre os dois fenómenos foram infructíferas.

Finalmente, em 1937, Brown imagina a existência a pouca profundidade de uma camada situada a uma temperatura crítica, isto é, a uma temperatura tal que qualquer pequena variação causará uma considerável, mudança de volume.

Se houver uma camada em tais condições, com a espessura de quilómetro e meio, é suficiente uma mudança do seu volume de menos de um por cento para explicar as irregularidades do movimento de rotação da Terra.

Do que acabamos de ver se conclui que êste arfar gigantesco da Terra deve ser causado por movimentos, no sentido radial, de massas no interior do globo. Para explicar êsses movimentos só dispomos ainda hoje de hipóteses.

No entanto, o desenvolvimento notável que nos últimos anos tem tomado a técnica sismológica e o grande incremento atingido pelo estudo das propriedades elásticas das rochas levam-nos a supôr que num prazo não muito longo dados precisos se hão-de obter para completa elucidação de um problema de tanto interêsse sob vários pontos de vista.

# ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

## UM PROBLEMA HISTÓRICO

*por **Fernando de Carvalho Araújo***

*Uma urna contém* n *esferas numeradas de* 1 *a* n. *Fazem-se* n *extracções sucessivas sem reposição. ¿Qual é a probabilidade: (1) De que nenhuma esfera saia no lugar correspondente ao seu número; (2) De que pelo menos uma esfera saia no lugar que lhe corresponde; (3) De que* r *esferas saiam nos seus lugares.* * (Problema estudado por De Montmort há mais de duzentos anos em «Essai d'analyse sur les jeux de hasard» — 2.ª ed., Paris, 1713. — Vide Boletim Bibliográfico n.º 45, G. M., n.º 23, crítica do Prof. R. A. Fisher).

Seja $u_n$ o número de ordens que satisfazem à condição (1). Suponhamos agora que a esfera 1 ocupa o lugar da esfera $k$ e que esta ocupa o lugar daquela. Com 1 e $k$ nestas posições há $u_{n-2}$ ordens em que as restantes esferas satisfazem à condição (1).

Como $k$ designa qualquer das esferas $2, 3, \cdots n$, o número total de ordens satisfazendo a (1), mas com 1 no lugar de $k$ e $k$ no lugar de 1, é $(n-1)\,u_{n-2}$. Por outro lado, se 1 ocupar o lugar de $k$ mas $k$ não ocupar o lugar de 1, o número de ordens das $(n-1)$ esferas restantes satisfazendo a (1) é $u_{n-1}$ mas como a esfera 1 pode tomar $(n-1)$ posições distintas o número total de ordens satisfazendo a (1) em que 1 toma a lugar de $k$ mas não $k$ o lugar de 1, é $(n-1)\,u_{n-1}$.

Logo $$u_n=(n-1)\,(u_{n-1}+u_{n-2})$$

ou $u_n-nu_{n-1}=-\{u_{n-1}-(n-1)\,u_{n-2}\}=\cdots=(-1)^n\,(u_2-2u_1)$

mas como $u_2=1$ $u_1=0$ será $u_n-nu_{n-1}=(-1)^n$.

Teremos então

$$\frac{u_n}{n!}-\frac{u_{n-1}}{(n-1)\,!}=\frac{(-1)^n}{n\,!}$$

$$\frac{u_{n-1}}{(n-1)\,!}-\frac{u_{n-2}}{(n-2)\,!}=\frac{(-1)^n}{(n-1)\,!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_2}{2\,!}-u_1=\frac{1}{2\,!}$$

e finalmente somando

$$\frac{u_n}{n!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}.$$

Como

$$\left|\frac{u_n}{n!}-\frac{1}{e}\right|<\frac{1}{(n+1)\,!}$$

a probabilidade é pràticamente $1/e$ excepto para pequenos valores de $n$. Com efeito, para $n=1, 2, 3 \cdots 11$ as probabilidades correspondentes são

$p_1=0{,}0000000$ $p_2=0{,}5000000$ $p_3=0{,}3333333$
$p_4=0{,}3750000$ $p_5=0{,}3666667$ $p_6=0{,}3690556$
$p_7=0{,}3678571$ $p_8=0{,}3678819$ $p_9=0{,}3678792$
$p_{10}=0{,}3678795$ $p_{11}=0{,}3678794$.

---

* Vide Boletim Bibliográfico n.º 45 — «Gazeta de Matemática n.º 23 — crítica à obra *The Advanced Theory of Statistics* de Kendall, feita pelo Prof. R. A. Fisher.

No caso (2) a probabilidade é evidentemente

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

e no caso (3), como as $r$ esferas podem ser escolhidas de $\binom{n}{r}$ maneiras e o número de ordens em que nenhuma das restantes $n-r$ ocupa o seu lugar é $u_{n-r}$, a probabilidade será $\frac{1}{n!}\binom{n}{r}u_{n-r}=\frac{1}{r!}\cdot\frac{u_{n-r}}{(n-r)!}=$

$$=\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}\right\}.$$

O problema pode resolver-se de maneira um pouco diferente, por indução.

Consideremos $r$ esferas determinadas, por exemplo, as esferas $1,2,3,\cdots r$, das $n$ esferas dadas e calculemos a probabilidade de que nenhuma delas ocupe o seu lugar.

Representemos por $N_{k,\underset{\cdot}{m},\cdots\underset{\cdot}{x},y}$ o número de ordens em que as esferas $k$ e $y$ ocupam os seus lugares e as esferas $m$ e $x$ não ocupam os seus.

Será

(1) $$N_{\underset{\cdot}{1}}=n!-(n-1)!$$

$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}}$ obtém-se subtraindo a (1) $N_{\underset{\cdot}{1}2}$. Ora $N_2=(n-1)$ e $N_{12}=(n-2)!$ portanto $N_{\underset{\cdot}{1}2}=(n-1)!-(n-2)!$ número que se obtém substituindo em (1) $n$ por $n-1$. Logo

(2) $$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}}=n!-(n-1)!-\{(n-1)!-(n-2)!\}=$$
$$=n!-2(n-1)!+(n-2)!.$$

Para obter $N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}}$ basta subtrair a (2) $N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}3}$. Como $N_3=(n-1)!$. $N_{123}=(n-3)!$, $N_{1\underset{\cdot}{2}3}=(n-2)!-(n-3)!$ $N_{\underset{\cdot}{1}23}=(n-2)!-(n-3)!$ donde $N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}3}=(n-1)!-2(n-2)!+$ $+(n-3)!$, número que se obtém substituindo em (2) $n$ por $n-1$, será

(3) $$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}}=n!-3(n-1)!+3(n-2)!-(n-3)!.$$

Para obter $N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}\underset{\cdot}{4}}$ temos que subtrair a (3) $N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}4}$
Da mesma maneira, como

$N_4=(n-1)!$ $N_{1234}=(n-4)!$ $N_{12\underset{\cdot}{3}4}=(n-3)!-(n-4)!$

$N_{\underset{\cdot}{1}234}=(n-3)!-(n-4)!$ $N_{1\underset{\cdot}{2}34}=(n-3)!-(n-4)!$

$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}34}=(n-2)!-2(n-3)!+(n-4)!$

$N_{\underset{\cdot}{1}2\underset{\cdot}{3}4}=(n-2)!-2(n-3)!+(n-4)!$

$N_{1\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}4}=(n-2)!-2(n-3)!+(n-4)!$

vem

$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}4}=(n-1)!-3(n-2)!+3(n-3)!-(n-4)!$

número que se obtém substituindo em (3) $n$ por $n-1$.

Logo

$$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\underset{\cdot}{3}\underset{\cdot}{4}}=n!-4(n-1)!+6(n-2)!-4(n-3)!+(n-4)!$$

O método é completamente geral. O número de ordens em que as $r$ esferas não ocupam os seus lugares é assim

$$N_{\underset{\cdot}{1}\underset{\cdot}{2}\cdots\underset{\cdot}{r}}=n!-\binom{r}{1}(n-1)!+\binom{r}{2}(n-2)!+$$
$$+\cdots\pm\binom{r}{r}(n-r)!$$

donde se tiram fàcilmente os resultados a que fomos conduzidos pelo primeiro processo.

O problema é um caso particular do teorema seguinte:

Teorema — Consideremos $n$ acontecimentos compatíveis $E_1, E_2, E_3, \cdots E_n$. Indiquemos por $p_h$ a probabilidade que se realise $E_h$ só ou em conjunto com os outros, por $p_{hi}$ a probabilidade de que se realizem $E_h$ e $E_i$ só ou associados aos outros, etc., etc. A probabilidade de que pelo menos um dos acontecimentos $E_1, E_2, \cdots$ se verifique é

$$P=\sum_h p_h-\sum_{hi}p_{hi}+\sum_{hik}p_{hik}-\cdots.$$

No caso considerado, como a probabilidade de que $r$ esferas quaisquer saiam nos lugares que lhes correspondem é $1/r!$, a fórmula anterior dá imediatamente para a probabilidade do caso (2)

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots.$$

Vale a pena ainda, para finalizar o assunto, citar, modificando-a ligeiramente, a forma dada ao teorema por um colega de Coolidge.

«Se todos os habitantes de Lisboa se reünissem num único lugar e resolvessem festejar o S. Martinho com tôdas as regras, a probabilidade de que pelo menos um chegasse a casa, é aproximadamente 2/3».

## BIBLIOGRAFIA


*Ball, R. W.* Mathematical Recreations & Essays — Macmillan, London, 1944.

*Bertrand, J.* Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1907.

*Castelnuovo, G.* Calcolo Delle Probabilità, Nicola Zanichelli, Bologna, 1933.

*Coolidge, J.* An Introduction To Mathematical Probability, Clarendon Press, Oxford, 1925.

*Crystal, G.* Algebra — A. & C. Black Ltd., London.

*Kendall, M.* The Advanced Theory of Statistics, Charles Griffin, London, 1943.

*Levy, H. and Roth, L.* Elements of Probability — Clarendon Press, Oxford.

*Plummer, H.* Probability And Frequency, Macmillan, London, 1940.