supõe a existência de técnicos, cientistas e profissionais, que possam solucionar os nossos problemas. A transplantação das resoluções dêsses problemas «lá fora» resulta geralmente em grosseiros êrros; o ambiente é diferente, os materiais de que se pode lançar mão são diferentes, os fins são às vezes outros. Temos que investigar por nós e para nós, temos que formar espíritos científicos capazes de atacarem os problemas com métodos exactos, mas adaptados aos nossos fins e aos nossos meios. Temos que formar homens capazes de servir as necessidades da Nação, e se a tanto se chegar, da Humanidade em geral. E na verdade, a aquisição do espírito científico, objectivo e exacto, é bem necessário na nossa vida prática; êste é um dos pontos essenciais de tôda e qualquer tentativa de melhorar o nível de vida dos portugueses.

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E A CONCEPÇÃO MODERNA DE UNIVERSIDADE

CARACTERÍSTICAS QUE PERMITEN RECONOCER QUE UNA UNIVERSIDAD ES DE PRIMERA CLASE *

por ***Bernardo A. Houssay***

1) Sus profesores y docentes se consagran exclusivamente a la docencia y a la investigación.

2) Realizan investigaciones originales y forman investigadores.

3) La enseñanza está basada en el espíritu científico o sea en la investigación.

4) Forma hombres superiores por su capacidad técnica, su cultura y su conducta.

5) Desarrolla la inteligencia, la iniciativa, la independencia de juicio y un patriotismo profundo racional e ilustrado.

6) Ayuda intensamente a la formación y adelanto de los jóvenes mediante muchas becas de perfeccionamiento o de investigación.

7) Hay mucho contacto directo y franco entre los profesores, sus colaboradores y los alumnos. El número de alumnos está en relación con la capacidad docente (sitios de trabajo y recursos).

8) Posee una biblioteca moderna muy completa y con plena vitalidad, dinámica y no estática.

9) Las materias científicas básicas son favorecidas con los mayores recursos posibles.

10) Hay amplia colaboración, culto escrupuloso de la verdad, amistad y corrección del trato entre sus miembros; no prospera la maledicencia.

En resumen, se reconoce que una Universidad es de clase superior porque realiza investigación original, porque forma los mejores graduados, es innovadora y progresista, tiene profesores full-time, buena biblioteca, laboratorios activos y eficaces.

* Extraído de «Ciencia e Investigación» — Revista patrocinada por la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciências, Buenos Aires, año I, n.º 1, Enero, 1945.

PEDAGOGIA

NOVO PARÁGRAFO

por ***Nicodemos Pereira***

O debate sôbre os resultados dos exames de aptidão para as Escolas do Ensino Superior que se tem realizado na «Gazeta de Matemática» está, a meu ver, longe de se poder considerar encerrado ou mesmo completamente esclarecido.

Num artigo da autoria do Dr. Júlio Martins, sob o título «Exames de Aptidão», inserido no N.º 39 dos «Liceus de Portugal», que é uma publicação do Ministério da Educação, é apresentada uma estatística comparativa das classificações obtidas por alunos internos dos liceus, no exame do 7.º ano e nos exames de aptidão para algumas escolas do Ensino Superior.

Transcrevemos do referido artigo essa estatística e as condições em que foi organizada.

Seguem as transcrições:

«... Comparação estabelecida entre as classificações obtidas em *Matemática*, no 7.º ano liceal, e as obtidas, na mesma disciplina, no exame de aptidão para a Universidade Técnica.

Para que a comparação seja válida, apenas se consideram os examinandos que, na mesma época (Julho de 1944), prestaram as provas da referida disciplina no liceu e na Universidade, por conseguinte com um intervalo de cêrca de quinze dias.

. . . .

A classificações de *10* valores obtida, nos liceus, por 22 examinados, corresponderam as seguintes no exame de aptidão:

No I. S. T.: 7 valores.

No I. S. A.: 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 13 valores.

No I. S. C. E. F.: 7, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 13 valores.

A *11* valores obtidos por 12 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 6 valores.

No I. S. A.: 8, 9, 10, 11, 11, 12, 14 valores.

No I. S. C. E. F.: 7, 8, 10, 10 valores.

A *12* valores obtidos por 16 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 3 valores.

No I. S. A.: 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 15 valores.

No I. S. C. E. F.: 7, 10, 10 valores.

A *13* valores obtidos por 16 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 7, 8, 8, 11, 11, 16 valores.

No I. S. A.: 7, 8, 8, 9, 11, 13, 14 valores.

No I. S. C. E. F.: 7, 12, 12 valores.

A *14* valores obtidos por 21 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 5, 8, 10, 12, 12, 15, 16 valores.

No I. S. A.: 10, 12, 13, 13, 14, 14, 18 valores.

No I. S. C. E. F.: 7, 10, 10, 11, 12, 12, 13 valores.

A *15* valores obtidos por 5 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 8, 14 valores.

No I. S. A: 12, 12, 14 valores.

A *16* valores obtidos por 9 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 9, 10 valores.

No I. S A.: 11, 13, 15, 15 valores.

No I. S. C. E. F.: 8, 10, 12 valores.

A *17* valores obtidos por 11 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 8, 8, 9, 15 valores.

No I. S. A.: 11, 12, 13 valores.

No I. S. C. E. F.: 11, 12, 14, 15 valores.

A *18* valores obtidos por 4 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 10, 12 valores.

No I. S. A.: 9, 13 valores.

A *19* valores obtidos por 3 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 9, 13 valores.

No I. S. C. E. F.: 16 valores,

A *20* valores obtidos por 2 examinados corresponderam:

No I. S. T.: 10, 12 valores».

Esta estatística mostra novos aspectos da questão debatida na Gazeta de Matemática e que há novas directrizes a seguir para que o seu estudo seja completo. Abre-se um novo parágrafo.

Podem formular-se — e para todos os gôstos — muitas e variadas hipóteses para explicar a disparidade dêstes resultados.

Os detentores de *certezas,* que farejam a verdade como se fôsse delicioso pitéu, pela simples leitura desta estatística, à priori, ficam sabendo, sem sombra de dúvida, as causas que determinam tais divergências.

Mas, os outros, *os não iluminados,* infelizmente, só podem pronunciar-se depois de aturado estudo que envolva tôdas as hipóteses em causa.

Êsse estudo só poderá ser feito pelas estâncias superiores ou com sua autorização, pois os elementos que lhe deverão servir de base (e são muitos e dispersos) não podem ser compulsados por qualquer pessoa que deseje fazê-lo.

PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS

por ***A. Lobo Vilela***

As reflexões sôbre os fundamentos da Geometria, que constituem o tema dêste artigo, foram escritas com o propósito de sistematizar algumas noções e apresentá-las de uma forma acessível aos alunos dos liceus. Porisso mantemos a distinção entre postulados e axiomas, a despeito da sua identidade lógica, e reduzimos a vários tipos as proposições teoremáticas.

Gostaríamos de que estas reflexões suscitassem o interêsse dos professores de matemática e de lógica, e fôssem o ponto de partida para estudos mais substanciais e elucidativos.

1 — Mau grado as suas origens intuitivas e a sua projecção no real, a matemática é uma ciência abstracta; ocupa-se de seres ideais, os números e as figuras, cujos elementos foram sugeridos pela experiência, mas que o espírito elaborou depurando-os de tudo o que, nos dados dos sentidos, é precário e contingente. Sem êste trabalho de idealização, os conceitos ficariam sujeitos às restrições e imperfeições da experiência e a uma indeterminação essencial, pois não seria possível fixá-los através duma realidade instável e fugidia, complexa e caprichosa, cujas leis nos escapam.

Tôda a ciência se matematiza na medida em que substitui os dados empíricos, inconstantes e irregulares, por conceitos puros do espírito, fixados por meio das suas propriedades características. Assim se explica o carácter racional que tomaram vários ramos da física e o papel cada vez mais importante que a matemática desempenha na vida moderna.

Como ciência abstracta, a matemática constrói-se a partir de conceitos abstractos pela simples aplicação das regras da lógica (1). A êste processo de construção lógica dá-se o nome de *dedução*.

As proposições matemáticas enunciam propriedades dos entes matemáticos ou relações entre elas.

2 — Em todo o sistema dedutivo há proposições fundamentais que enunciam as propriedades elementares ou as relações lógicas possíveis, e proposições derivadas das precedentes. Conforme o seu carácter e o papel que desempenham na estrutura matemática, estas proposições recebem diversos nomes:

I) Proposições fundamentais:

a) *postulados:* enunciam as propriedades elementares dos seres primitivos, indefiníveis por natureza;

b) *princípios lógicos:* enunciam as leis que regulam tôda a actividade mental;

c) *axiomas:* enunciam as propriedades mais gerais e mais simples das grandezas.

II) Proposições derivadas;

d) *definições:* constroem os conceitos secundários à custa dos conceitos primitivos;

e) *teoremas:* enunciam relações entre as propriedades dos entes matemáticos, estabelecidas por demonstração;

f) *problemas:* enunciam determinadas propriedades e propõem a descoberta dos seres que delas gozam.

As proposições indemonstráveis num dado sistema dedutivo chamam-se *premissas.* Os postulados e as definições são *premissas matemáticas;* os princípios lógicos e os axiomas são *premissas lógicas.* Os teoremas e os problemas obedecem ao critério de necessidade lógica fixado pelas premissas.

É para notar que a mesma proposição pode figurar como premissa num dado sistema e como teorema noutro sistema. Com efeito, a proposição: «por três pontos não em linha recta pode fazer-se passar um plano e só um», por exemplo, pode apresentar-se como *postulado* para determinar o plano. Neste caso, postulando ainda que «uma recta fica determinada por dois quaisquer dos seus pontos», a proposição «uma recta e um ponto situado fora dela determinam um plano e só um» demonstrar-se-ia a partir dequeles dois postulados e seria, portanto, um *teorema.* Tomando esta última proposição para postulado, seria a primeira um teorema.

3 — As proposições matemáticas têm a pretensão de ser verdadeiras. As verdades matemáticas são universais e necessárias: universais por virtude da universalidade dos conceitos que relacionam; necessárias pelo carácter das relações que exprimem. A evidência intuitiva que inspirou os fundamentos da matemática cedeu lugar à evidência lógica, garantia única de validade dos seus mais amplos desenvolvimentos.

O processo que fundamenta a verdade ou falsidade duma proposição na verdade ou falsidade de outras chama-se *demonstração;* e as verdades que resultam ou decorrem necessàriamente de outras dizem-se *conseqüências.*

A necessidade de demonstração é um índice de insuficiência, pois um espírito que apreendesse intuitivamente e dum modo infalível as mais complexas relações não precisaria de demonstrar. Todavia é já uma vantagem apreciável dispormos dum critério infalível de alcançar a certeza, mediante a demonstração.

I — Postulados

4 — Tôda a ciência se constrói à custa de conceitos e êstes, para serem susceptíveis de tratamento lógico, precisam de ser rigorosamente determinados para que não subsistam ambigüidades e não conduzam a contradições.

Há, evidentemente, um limite para a possibilidade de definir. Os conceitos primitivos por meio dos quais se definem todos os outros não podem ser definidos. Todavia é necessário fixá-los de algum modo, e, como não é possível reduzi-los a outros conceitos mais simples, procura-se caracterizá-los pelas suas relações elementares.

As proposições que enunciam as relações elementares entre os conceitos fundamentais e que indirectamente as determinam chamam-se *postulados.* Êles desempenham, em relação aos conceitos primitivos, o papel de definições. A distinção entre conceitos primitivos e conceitos derivados é convencional, pois, em geral, um conceito que serve para definir outros pode também ser definido a partir dêles. Assim, por exemplo, o conceito de congruência pode ser definido a partir do conceito de movimento ou tomado para conceito primitivo.

(1) Quanto às relações da lógica com a matemática, as opiniões divergem. Weyl e Brouwer sustentam que a lógica se fundamenta na matemática; Russel e Behmann quási as identificam.

Embora os conceitos primitivos sejam, por natureza, indefiníveis, apreende-se alguma coisa do que significam investigando como se formam. É isso que nos propomos fazer antes de escolhermos os conceitos primitivos. Saímos assim do âmbito da lógica e invadimos o domínio da psicologia.

5 — O conceito mais universal que a experiência nos sugere é a idéia de ser. Assim, a primeira condição a que uma ciência deve satisfazer é que *existam* os objectos de que se ocupa. Como os conceitos secundários são construídos à custa dos primitivos, a sua existência é condicionada pela existência dêstes. A existência dos seres primitivos só pode ser estabelecida por meio de postulados a que chamaremos *existenciais*. Todos os outros conceitos resultam do conceito de «ser», por sucessivas determinações.

Os sentidos revelam-nos a existência de corpos cuja comparação nos leva a construir esquemas gerais, conceitos abstractos que resultam da sua decomposição mental e da associação dos elementos comuns em novas sínteses. A operação do espírito por meio da qual eliminamos das sensações os caracteres que individualizam os objectos e os distinguem, para considerarmos apenas as suas propriedades gerais é a *abstracção*. O espírito humano generaliza na medida em que abstrai.

Assim se elaboram as idéias de *forma* e de *extensão*. Além destas propriedades intrínsecas, há outras extrínsecas que decorrem, como elas, de intuïções: as idéias de *posição*, de *movimento* (variação) e de *repetição* (que gera a idéia de número). Sôbre êstes dados primitivos se constróem os conceitos fundamentais da matemática.

Pela disposição especial dos canais semi-circulares do ouvido, só podemos ter a intuïção de corpos a três dimensões. No entanto, abstraindo sucessivamente de cada uma dessas dimensões, concebemos *superfícies, linhas* e *pontos*. Êste processo de abstracção é, aliás, sugerido pela observação de corpos que parecem realizá-lo materialmente. Efectivamente, a espessura dum corpo pode reduzir-se até que êste pareça ter apenas duas dimensões, como uma fôlha de papel; um fio de sêda parece reduzido a uma única dimensão; um grão de areia fina parece desprovido de dimensões.

Para que estas noções se convertam em conceitos puros do espírito é necessário despojá-las do seu conteudo material e reconstruí-las idealmente; obtêm-se assim os conceitos abstractos de *corpo* (ou sólido) *geométrico*, de *superfície*, de *linha* e de *ponto*. Levando mais longe a abstracção, constrói-se o conceito de espaço, esquema geral de tôda a existência extensiva, que, por sucessivas determinações, produz tôdas as *figuras geométricas* e se refaz por um processo inverso.

6 — As limitações dos nossos sentidos colaboram no processo de abstracção por meio do qual se elaboram os conceitos metemáticos e estabelecem as relações fundamentais. Efectivamente, se a vista nos permitisse notar a estrutura descontínua da matéria dificilmente poderíamos conceber figuras geométricas; sem isto, faltariam materiais intuïtivos para se construir a teoria do contínuo, e a medição reduzir-se-ia a um processo de contagem. Se a par dessa estrutura lacunar percebessemos os movimentos incessantes que nela se produzem, o conceito de *ordem* linear não encontraria representação no espaço mas simplesmente no tempo sob o aspecto de sucessão temporal. Nestas condições o conceito de *congruência* (coincidência no espaço) seria difícil de estabelecer num universo onde parecia não haver repouso e só a noção de simultaneidade (coincidência no tempo) seria sugerida pela experiência. Em suma, era natural que a geometria e a mecânica fôssem bem diferentes das nossas, pois o movimento rectilínio não existiria aparentemente nesse universo e seria difícil, senão impossível, conceber-se um sistema rígido ou um ponto material subtraído à acção de qualquer fôrça.

O certo, porém, é que os objectos materiais parecem rijidos e indeformáveis e susceptíveis de ser divididos indefinidamente em partes. Ainda aqui as limitações dos sentidos contribuiram para facilitar o papel da abstracção e simplificar os conceitos de figuras geométricas permitindo atribuir-lhes propriedades meramente ideais: invariabilidade, homogeneidade e continuïdade.

Dêste modo, os postulados existenciais podem enunciar ao mesmo tempo algumas propriedades dos entes a que se referem, realizando assim uma primeira determinação.

Êstes postulados podem enunciar-se:

1.°) *Existe um ente chamado* espaço *que é contínuo, homogéneo, penetrável, fixo e ilimitado.*

2.°) *Existem porções do espaço chamadas* corpos geométricos ou sólidos.

3.°) *Existem* superfícies *que dividem o espaço ou os sólidos em partes.*

4.°) *Existem* linhas *que dividem em partes as superfícies.*

5.°) *Existem* pontos *que dividem em partes as linhas e não são decomponíveis em elementos mais simples.*

7 — Os sólidos geométricos, as superfícies e as linhas constituem uma *classe de grandezas contínuas* para as quais é preciso fixar os conceitos de igual-

dade e de medida. Ora a igualdade de figuras geométricas apresenta-se sob um duplo aspecto: a igualdade de forma (semelhança) e a igualdade de grandeza (equivalência), reservando-se a designação de congruência para a dupla igualdade de forma e de grandeza. Podíamos, pois, tomar como primitivo o conceito de congruência (como fazem Pasch, Veronese e Hilbert) e caracterizá-lo por meio de postulados. Todavia definiremos congruência e partir das noções de *movimento* e de *coincidência*. É necessário, portanto, postular as condições em que as figuras geométricas se podem deslocar no espaço. Teremos então os *postulados do movimento:*

1.º) *Uma figura pode mover-se no espaço de modo que qualquer dos seus pontos coincida com determinado ponto do espaço.*

2.º) *Uma figura pode mover-se conservando-se fixo um dos seus pontos.*

3.º) *Uma figura pode mover-se conservando-se fixos dois dos seus pontos.*

4.º) *Um ponto em movimento gera uma linha; uma linha em movimento resvala sôbre si mesma ou gera uma superfície; uma superfície em movimento resvala sôbre si mesma ou gera um sólido.*

5.º) *O movimento não altera a forma nem a grandeza* (propriedades métricas) *das figuras geométricas, isto é, uma figura geométrica móvel conserva-se invariável* (postulado da invariabilidade) [1].

6.º) *Os movimentos do espaço são transformações pontuais que constituem um grupo* isto é, as transformações inveersas e as que resultam da composição (produto) de dois ou mais movimentos são movimentos (pertencem ao mesmo conjunto de transformações).

Pôsto isto, o conceito de congruência pode ser estabelecido por *definição:* duas figuras geométricas dizem-se congruentes quando é possível levá-las a coincidir por meio dum movimento (ou quuando se podem transformar uma na outra por meio dum movimento).

8 — Entre as figuras geométricas, as mais simples de cada espécie são o *ponto*, a *recta* e o *plano*, que por isso se tomam para base do estudo da geometria e permitem construir tôdas as outras. Daí lhes vem o nome de *elementos geométricos*. Como noções fundamentais só podem ser caracterizados pelas suas propriedades relativas.

Postulados da recta:

1.º) *A recta é uma linha indefinida.*

2.º) *Uma recta fica completamente determinada por dois quaisquer dos seus pontos.*

3.º) *Uma recta fica dividida em duas partes opostas* (semi-rectas) *por qualquer dos seus pontos.*

4.º) *Cada uma das partes em que uma recta fica dividida por um dos seus pontos, girando em tôrno dêsse ponto, pode passar por qualquer ponto do espaço.*

Postulados do plano:

1.º) *O plano é uma superfície indefinida que divide o espaço em duas partes.*

2.º) *Se uma recta passa por dois pontos dum plano, fica tôda assente nele e divide-o em duas partes* (semi-planos).

3.º) *Um plano pode deslocar-se sôbre si mesmo, ao longo de uma das suas rectas, em dois sentidos opostos.*

4.º) *Um plano pode deslocar-se sôbre si mesmo em tôrno de um dos seus pontos, em dois sentidos opostos.*

5.º) *Um plano pode girar em tôrno duma das suas rectas de modo que cada um dos semi-planos passe por qualquer ponto do espaço.*

Esta última proposição equivale à determinação do plano por meio duma recta e dum ponto. Ora, como por sua vez a recta foi determinada por dois dos seus pontos, reconhece-se que neste sistema de postulados a proposição: «por três pontos não em linha recta pode fazer-se passar um plano e só um» — é susceptível de ser demonstrada e constitui, portanto, um teorema. (Veja-se § 2).

9 — Ao conceito de linha recta estão associados outros conceitos importantes como o de *direcção, sentido, ordem linear, distância.*

Intimamente relacionado com os conceitos de espaço e de movimento está o conceito de continuïdade que serve de base à teoria da medida e é regulado pelo *postulado de Arquimedes* [1]:

— *Dados dois segmentos desiguais* (e dum modo geral quaisquer grandezas da mesma espécie, homogéneas e finitas) *existe sempre um múltiplo do menor que excede o maior.*

Acrescentando aos precedentes o famoso *Postulatum de Euclides*, o menos intuitivo de todos os que apresentamos, ficam os seres fundamentais suficientemente caracterizados. Hilbert entende ser necessário ainda um postulado por meio do qual se estabeleça a impossibilidade de ampliar o conjunto dos

---

[1] **Êste postulado não impede que as figuras geométricas sejam deformáveis *por uma causa diferente do movimento*. Quando não houver indicação contrária, as figuras geométricas consideram-se *imóveis*; e, quando se lhes atribui movimento, supõem-se *indeformáveis*.**

[1] **Embora atribuído a Arquimedes, êste postulado deve-se a Eudoxo que nêle baseia a teoria geral das razões — P. Tannery: *Noções Históricas*.**

elementos geométricos (pontos, rectas e planos) sem afectar a validade dos postulados anteriores. A esta proposição chama êle o *postulado de integralidade.*

É particularmente interessante notar que os postulados geométricos anteriores são lògicamente equivalentes aos postulados necessários para se construir o conjunto dos números reais.

10 — *Um sistema de postulados deve satisfazer a duas condições:*

a) ser isento de contradição;

b) ser constituído por proposições lògicamente independentes, isto é, que não possam deduzir-se umas das outras.

A primeira condição é necessária à própria construção lógica da teoria matemática; a segunda, embora não afectando a possibilidade de construção lógica, deve respeitar-se por motivos de elegância. Pela mesma razão deve ser reduzido ao mínimo o número de conceitos primitivos. Isto, porém, apresenta o inconveniente de suprimir dos fundamentos da matemática certas noções intuitivas e deduzi-las a partir de outras mais artificiais. Peano mostrou que as noções de *ponto* e de *segmento* são suficientes para se construir a geometria de posição; e basta acrescentar-lhes a noção de movimento para se construir a geometria métrica. Pieri levou ainda mais longe a simplificação mostrando que tôda a geometria se pode construir com as noções de *ponto* e *distância.*

É para notar ainda que a intuição sensível, embora valioso guia na escolha das premissas lógicas, não pode inspirar absoluta confiança, eivada como está das limitações sensoriais que só o espírito corrige. A *rigidez* e a *penetrabilidade,* por exemplo, são conceitos empìricamente contraditórios, mas idealmente compatíveis e de tal modo que fizemos dêles atributos das figuras geométricas, para estabelecermos a congruência.

(Continua)

NOTÍCIA SÔBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA EM ZÜRICH

por ***Maria Pilar Ribeiro***

Já em artigos na Gazeta de Matemática dei informações sôbre alguns aspectos do ensino da Matemática na Escola Politécnica Federal de Zürich. Agora, depois de ter assistido regularmente a lições de Matemática e de Geometria Descritiva numa Escola secundária, a Oberrealschule, de Zürich, julgo útil comunicar alguns resultados das minhas primeiras observações[1].

Vou dizer primeiramente o que é a Oberrealschule. Para isso duas palavras rápidas sôbre a maneira como está organizado o ensino em Zürich: O ensino compreende 6 anos de escola primária para a qual as crianças entram aos 6 anos. Terminados êstes os alunos podem ingressar, mediante exame de admissão, no Gimnásio, onde depois de 6 anos e meio de curso, terminarão um de dois tipos de «maturité» (que permite a entrada nas escolas superiores) tipos entre os quais os alunos se repartem a partir do 3.º ano (repartição correspondente à das nossas letras e ciências). Se não desejam ingressar no gimnásio, entram na Escola secundária que compreende 3 anos. No fim do 2.º ano da Escola secundária poderão ingressar, também depois dum exame de admissão, na Oberrealschule cujo curso com a duração de 4 anos e meio (repartidos em semestres) permite obter um novo tipo de «maturité», (tipo C.) É com êste tipo de maturité que os alunos têm preparação para a Escola Politécnica Federal ou secção de Matemática das Universidades (também pode tê-la, é claro, depois do Gimnásio, mas com maior dificuldade).

O fim do ensino desta escola é «procurar, por meio do ensino filológico-histórico e da matemática e ciências da natureza atingir o seguinte objectivo geral: Preparação para abordar todos os estudos científicos modernos, em particular os estudos técnicos superiores; hábitos de idéias e juízos lógicos e suas expressões claras e simples; autonomia intelectual e conhecimento dos deveres, compreensão da vida e claro sentimento de responsabilidade; interêsse pelos problemas da Sociedade e do Estado; compreensão pela cultura moderna e vida intelectual».

A escola realiza êstes objectivos por meio das seguintes disciplinas obrigatórias: Alemão, Francês, Inglês, História, Geografia, Matemática, Geometria Descritiva, Física, Prática de Física, Química, Laboratório de Química, Ciências Naturais, Desenho, Gimnástica e das seguintes facultativas: Italiano, Latim, Exercícios nos laboratórios de Química, Ciências Naturais e Física, Desenho, Canto, Orquestra, Dactilografia, Stenografia e Religião.

A Matemática ocupa um número de horas semanais maior do que as outras disciplinas, e distribuídas por classes e semestres como segue: 1.ª classe 8,8; 2.ª classe 8,8; 3.ª classe 5,5; 4.ª classe 5,5 e 5.ª classe 5.

[1] Foi devido à intervenção amável do prof. Gonseth da Escola Politécnica Federal e ao franco acolhimento dos profs. Rueff e Mettler da Oberrealschule, que tive a possibilidade de seguir o ensino da matemática nesta escola.

O seu objectivo é: «Agilidade e segurança no cálculo numérico e solução de problemas da vida prática; cultivo do pensamento e demonstração lógicos; capacidade para reconhecer e analizar a matemática nos fenómenos mais simples da natureza e da técnica. Por meio de contínuos exercícios: educação para o trabalho rápido e seguro».

Os alunos, ensinados desde os 14 anos, por professores (que são doutores em matemática) têm à saída da escola uma capacidade de raciocínio em matemática que julgo poder, sob muitos aspectos, nivelar-se à dos nossos alunos do 3.º ano do curso de matemática, e uma informação muito superior à exigida, oficialmente, aos alunos que saem dos nossos liceus. Assim é já, por exemplo, do domínio dos seus conhecimentos: Na álgebra: a noção de derivada e suas aplicações, em particular a problemas de máximos e mínimos; a noção de integral e aplicações. Na geometria: as noções fundamentais de geometria analítica, coordenadas rectangulares oblíquas e polares, noções de geometria vectorial, transformações de coordenadas, áreas de triângulos e polígonos, equações da recta, distância dum ponto a uma recta, ângulos de duas rectas, equação da circunferência e sua tangente, polo e polar, equações das cónicas, tangentes, polos e polares, aplicações a exercícios de lugares geométricos, introdução na geometria analítica do espaço e exercícios simples. Na trigonometria: o estudo dos triângulos obliquângulos e estudo dos triângulos esféricos com aplicações à Astronomia.

Independentemente da matemática a cadeira de Geometria Descritiva é dada a partir do 3.º ano e ocupa um número de horas semanais assim distribuído: 3.ª classe 2,3; 4.ª classe 3,3; 5.ª classe 3. O objectivo do seu ensino é: «Educação duma clara visão dos corpos no espaço e das construções; agilidade na exacta representação das superfícies e corpos; segurança na resolução de exercícios estereométricos por meio de freqüentes construções». Aqui o domínio dos conhecimentos chega à construção de sombras próprias e projectados do cilindro, cone e esfera, à representação das secções planas das superfícies de revolução, a colineação central, e transformação colinear da circunferência e às propriedades, que por aí resultam, das secções cónicas.

Os livros para o ensino secundário editados pela «Associação dos Professores de Matemática Suíços» são escritos por grupos de dois professores, escolhidos por aquela associação, e por vezes um dos professores encarregado é professor dum escola superior. O que acima aponto é só um esquema que possa permitir situar a Oberrealschule entre as escolas de Zürich.

Desde Maio do ano passado que tenho assistido às lições de Matemática e algumas de Geometria Descritiva. Tenho procurado seguir aulas de tôdas as classes. O número de alunos em cada sala nunca ultrapassa 25 o que já é considerado, pelos professores, como excessivo.

O primeiro facto que me impressionou nas lições dos 1.ºˢ anos foi o de os alunos possuírem uma técnica de cálculo mental muito desenvolvida. Esta técnica deve começar a ser adquirida nos 3 primeiros anos da escola primária, onde se faz cálculo mental. Depois, foi a seriedade com que os alunos trabalham nas aulas. Dir-se-ia estarmos a assistir a aulas dadas a adultos cheios de curiosidade. O estudo é um trabalho muito sério e aquêles 50 minutos de aula são completamente aproveitados. Os alunos tomam uma parte activa na lição que é sempre executada tanto por êles como pelos professores, donde resulta que, fora da escola, poucas tarefas têm a executar (algum exercício que não houve tempo de levar até ao fim). Nunca vi, numa aula um aluno distraído; e é normal, durante todo o tempo de aula, tôdas as atenções convergirem para a execução dum problema ou demonstração dum teorema; e só no final os alunos tomam as suas notas. Nisto são êles também orientados pelos professores que, tendo o cuidado, nos primeiros anos, de lhes indicar o que é indispensável que escrevam, os ensinam a saberem tomar as notas nos cursos futuros.

Sempre a preocupação de economia, aliada a segurança e não automatismo leva a que na resolução quer de exercícios quer de problemas, se fuja sempre à aplicação de regras feitas ou de fórmulas. É assim que, na resolução duma equação do 2.º grau só é aplicada a fórmula resolvente se é impossível determinar imediatamente as raízes; que, por exemplo, na resolução do seguinte sistema (na 2.ª classe): $\frac{xy}{4x+3y}=1$, $\frac{xz}{5x+3z}=1$, $\frac{yz}{5y+4z}=1$ equivalente a $1=\frac{4}{y}+\frac{3}{x}$; $1=\frac{5}{z}+\frac{3}{x}$; $1=\frac{5}{z}+\frac{4}{y}$ utilizou-se a *mudança de variáveis:* $\frac{3}{x}=u$; $\frac{4}{y}=v$; $\frac{5}{z}=t$ transformando-o num de solução imediata.

E isto é uma preocupação de todos os momentos não só da parte dos professores, como dos próprios alunos: a preocupação de executarem um trabalho mínimo de cálculos e jogarem com o máximo de idéias.

O tempo de aulas dedicado à Geometria é apròximadamente igual ao dedicado à Aritmética e Álgebra (são dadas simultâneamente durante todo o ano e se alguma é favorecida em tempo é talvez a Geometria). Talvez por isto os alunos têm uma facilidade que espanta nesta disciplina. É chocante em particular em relação à geometria no espaço, onde não encontram dificuldade em imaginar e desenhar as diferentes relações entre as figuras no espaço e nunca vi, além dumas 3 tôscas réguas, que funcionavam como rectas, utilizar material didactico para êste fim. ¿Estará isto em relação com o facto de estudarem geometria descritiva desde a 3.ª classe? Não sei responder ainda.

Êste ano um dos professores encarregado de escrever um livro de geometria analítica, para o ensino secundário, experimentou o ensino desta disciplina (que faz parte do programa da 4.ª e 5.ª classes), empregando quási exclusivamente, o cálculo vectorial. As vantagens que resultam dêste ensino são bem conhecidas.

Na 1.ª classe quer as operações com fracções numéricas, quer as operações com fracções algébricas e simplificações são feitas durante as lições com a execução de centenas de exercícios. Dir-se-há que em cada lição não é possível executar mais do que meia dúzia e êstes simples. Isto é verdade se se perde tempo a escrevê-los e a efectuá-los na pedra, mas se o professor e alunos possuírem um livro onde essas centenas de exercícios estão enunciados e se a sua resolução se puder fazer mentalmente, então em poucas lições se terá chegado à centena $\left(\text{por exemplo: } \dfrac{30\,(a^4c-b^4c)^2}{16\,(ac+bc)}\right.$ ou $\left.\dfrac{5}{a^2-b^2}+\dfrac{3b^2}{a^4-b^4}\right)$. É esta prática que permite na 5.ª classe quando o professor quere resolver (digo quere resolver, porque os alunos não saem nunca dos seus lugares e são sempre os professores que executam na pedra o que êles lhes vão dizendo) o seguinte problema: Se X_1, X_2 e X_3 são as raízes da equação $X^3-2X^2+3X-4=0$ determinar os coeficientes da equação $X^3+aX^2+bX+c=0$ de raízes $\dfrac{X_1+X_2}{X_3}$, $\dfrac{X_2+X_3}{X_1}$, $\dfrac{X_3+X_1}{X_2}$ que êle se execute ràpidamente, *visto que só houve necessidade de escrever o seguinte:*

$$-a=\frac{X_1+X_2}{X_3}+\frac{X_2+X_3}{X_1}+\frac{X_3+X_1}{X_2}=$$

$$=\frac{X_1X_2(X_1+X_2)+X_2X_3(X_1+X_3)+X_1X_3(X_2+X_3)}{X_1X_2X_3}=$$

$$=\frac{(X_1+X_2+X_3)(X_1X_2+X_2X_3+X_3X_1)-3X_1X_2X_3}{X_1X_2X_3}$$

$$b=\frac{(X_1+X_2)(X_2+X_3)}{X_3X_1}+\frac{(X_2+X_3)(X_3+X_1)}{X_1X_2}+$$

$$+\frac{(X_3+X_1)(X_1+X_2)}{X_2X_3}=\frac{1}{X_1X_2X_3}\Big\{3X_1X_2X_3+$$

$$+(X_1+X_2+X_3)(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\Big\}$$

$$-c=\frac{(X_1+X_2)(X_2+X_3)(X_3+X_1)}{X_1X_2X_3}=\frac{1}{X_1X_2X_3}\Big\{2X_1X_2X_3+$$

$$+X_1X_2X_3(X_1^2+X_2^2+X_3^2)-(X_1^3+X_2^3+X_3^3)\Big\}.$$

Finalmente, vou dar o sumário duma lição, uma lição de geometria numa 2.ª classe: Teoremas de semelhança de triângulos. Comparação com os teoremas de igualdade de triângulos. Foram demonstrados 3 teoremas: *1.º teorema de semelhança:* dois triângulos de lados a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 e ângulos $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ respectivamente, são semelhantes se $a_1:b_1=a_2:b_2$ e $\gamma_1=\gamma_2$, e comparação com o teorema de igualdade $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $\gamma_1=\gamma_2$. *2.º teorema de semelhança:* $\beta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2$ e comparação com o teorema de igualdade $a_1=a_2$, $\beta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2$. *3.º teorema de semelhança:* $a_1:b_2=b_1:b_2=c_1:c_2$ e comparação com o teorema de igualdade $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$.

Junto alguns pontos dos exames de «maturité» do ano de 1944.

Zürich, Março de 1945

Alguns pontos de exames dos liceus — Matemática e Geometria Descritiva — exigidos para a matrícula nas Universidades e Escola Politécnica Federal. Idade média 18 anos.

I

— **1** — Procure uma fórmula para a soma: $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$.

Observação: A expressão pode considerar-se como a derivada duma progressão geométrica.

— **2** — Discuta a função $y=x-5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ e represente-a gràficamente.

— **3** — Intersecte a curva $y=x^4+2x^3-3x^2-5x+7$ com as rectas $y=ux+q$ e determine u e q de modo que cada dois dos pontos da intersecção coincidam (tangente dupla). Que coordenadas têm os pontos de tangência desta tangente dupla?

— **4** — A equação da cardioide em coordenadas polares é $r=2a\,(1+\cos\varphi)$. Quais os pontos da curva que estão a maior distância do eixo de simetria? Em que pontos da curva são as tangentes normais ao eixo de simetria? (Use coordenadas polares). Esboce a curva.

— **5** — Uma elipse e uma hipérbole têm os mesmos focos com a distância focal igual a $2c$ e os eixos menores também iguais a $2b<2c$. Sob que ângulos se cortam as curvas? Quais as distâncias dos pontos de intersecção ao centro?

— **6** — Por um ponto $P_1(x_1, y_1)$ deve passar uma circunferência K, tangente à recta $g\equiv x=0$ e que corta ortogonalmente a circunferência $k\equiv x^2-2rx+y^2=0$.

a) Determine, com régua e compasso o centro M de K quando $x_1=1$ cm., $y_1=3$ cm.; $r=3{,}6$ cm..

Observação: Inversão, círculo de inversão passando por P_1 e normal a k.

b) O cálculo das coordenadas de M conduz a equações do 2.º grau. A que condições devem satisfazer as coordenadas de P_1 para que estas equações tenham soluções reais? Interprete geomètricamente as condições.

c) Onde ficam os centros de tôdas as circunferências que são tangentes a g e cortam k ortogonalmente?

Oberrealschule, 14-VI-1944 *Dr. J. Hablützel*

II

— **1** — Esboce o gráfico da função $y=\frac{x^2(x+2)}{(x-1)^2}$.

— **2** — Sejam x_1, x_2, x_3, as raizes da equação $x^3+x^2-2x+1=0$. Pede-se a equação cúbica cujas raizes são $x_1 x_2/x_3, x_2 x_3/x_1, x_3 x_1/x_2$.

— **3** — Num triângulo isósceles de base a e de altura relativa à base h está inscrita a maior elipse. Determine os semi-eixos e a área.

— **4** — Pede-se o traçado da cónica $x^2-xy-2y^2+$ $+x-5y+7=0$.

— **5** — São dadas a parábola $y^2=2px$ e a circunferência de centro $A(a, o)$ que é tangente à parábola em dois pontos. Qual é a curva sôbre a qual ficam os pontos de tangência quando p é tomado como parâmetro?

— **6** — É dado o segmento $\overline{AB}=2a$. Qual é o lugar geométrico dos pontos tais que o produto das distâncias a A e a B é igual a a^2?

— **7** — Qual é a envolvente das polares relativamente ao círculo $K(0,0;a)$ dos pontos da elipse $E(0,0;a,b)$?

— **8** — Quando é que as curvas de 2.ª ordem, e curvas planas de 3.ª e 4.ª ordens, se decompõem? Justificação.

Oberrealschule, 14-VI-1944 *Dr. Mettler*

III

— **1** — As raizes x_1, x_2, x_3 da equação cúbica: $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ deverão constituir uma progressão geométrica. A que condição satisfazem os coeficientes? x_1, x_2, x_3?

— **2** — Calcule o m. d. c. dos polinómios $f_1(x)=x^4-2x^3-x+2$; $f_2(x)=x^4-4x^3+6x^2-5x+2$ e resolva as equações $f_1(x)=0, f_2(x)=0$.

— **3** — Resolva o sistema:

$$x^2+y^2-2=0$$
$$xy-2x-2y-3=0$$

algébrica e gràficamente.

— **4** — Em que ponto tem a curva exponencial $y=e^x$ a sua maior curvatura? Qual é a sua abcissa?

— **5** — Determine o tipo, a posição dos eixos e os comprimentos dos semi-eixos de k_2‡ $\equiv 5x^2-3xy+y^2-$ $-3x+2y-5=0$.

— **6** — Determine as intersecções das tangentes a k_3‡ $\equiv y^2=x^3$ com a curva e o lugar geométrico dos meios de tôdas as cordas existentes nessas tangentes. (gráfico).

— **7** — Para a família de normais à parábola $y^2=2px$, determine o lugar geométrico dos polos relativamente à parábola e discuta. (grafico).

Oberrealschule, 14-VI-1944 *Dr. G. Grimm*

IV

— **1** — Dum octaedro regular são dados o centro $M(0;5;5)$ e a recta $g \left\{ S_1(0;12;0), S_2(6;0;7) \right\}$, que contém uma aresta. Represente o octaedro pelas suas projecções.

— **2** — É dado um paraboloide de rotação pelo foco $F(0;6;6)$ e pelo vertice $S(0;6;7)$ e a recta g que contém os pontos $A(0;6;10)$ e $B(-8;6;0)$. Conduza por g os planos tangentes ao paraboloide.

— **3** — Dum elipsoide de rotação cujo eixo ($2a=12$ cm.) é perpendicular ao plano horizontal, toma-se a metade superior obtida por secção pelo plano horisontal passando pelo centro $O(0;6;6)$ (raio do círculo da secção 3,5 cm.). Desenhe os limites da sombra própria e da sombra projectada no interior da metade inferior do elipsoide. (raios de luz paralelos ao plano vertical, inclinação 30º).

— **4** — Determine a curva de intersepção do cone circular recto de vértice $S(0;5;8)$, de eixo normal ao plano horisontal e com metade do ângulo de abertura igual a 30º, com a esfera: $M(3;7;4)$, $r=3{,}5$ cm.

— **5** — São dados os 3 pontos $A(6;4;3{,}5)$, $B(4;6;3{,}5)$ e $C(-2;3;1{,}5)$. Desenhe os traços dos planos que distam $a=3{,}5$ cm. de A, $b=2{,}5$ cm. de B e $c=1{,}5$ cm. de C.

— **6** — O plano E é dado pelos 3 pontos $A(-7;0;0)$, $B(0;12;0)$ e $M(0;5;4)$. M é o centro duma circunferência do plano E. Determine o raio da circunferência de modo que a sua sombra obtida a partir do centro de luz $L(7;3;7)$ sôbre o plano horisontal seja uma parabola, e desenhe esta parábola.

Oberrealschule, 17-VI-1944 *Dr. Billeter*

V

— **1** — Duma esfera são dados o plano tangente π_1*, a recta $S_1(0;7;0)$, $B(4;3;4)$ tangente no ponto B e o ponto $P(-1;2;6)$. Determine o centro e o raio.

‡ Nota do tradutor: k_n designará sempre uma curva de ordem n.

— **2** — São dados dois planos paralelos E_1 e E_2 (pontos de intersecção dos traços em -4 e -10; os traços horisontais fazem um ângulo de 60º e os verticais de 30º com o semi-eixo positivo dos xx*) e uma recta g pelos seus traços S_1 $(0;\ 2;\ 0)$, S_2 $(-2;\ 0;\ -3)$. Determine os traços dum plano que passe pela recta g e corte os dois planos paralelos dando uma banda de largura 5. (Dar ambas as soluções).

— **3** — São dados um prisma oblíquo com uma base regular de 6 lados, assente no plano π_1*, e um octaedro regular. Determine, para a iluminação convencional, a sombra do octaedro sôbre o prisma. (Disposição prescrita).

— **4** — Um cilindro circular oblíquo e um cone circular oblíquo têm o mesmo círculo director em π_1* de centro M $(-3;\ 11;\ 0)$ e raio 4. O eixo do cilindro é uma recta de frente cuja projecção vertical faz um ângulo de 135º com a parte positiva do eixo dos xx*. O vértice do cone é S $(5;\ 0;\ 5)$. Desenhe a intersecção das duas superfícies, em particular os pontos de tangente horisontal e de frente.

— **5** — Dum paraboloide de rotação aberto para baixo são dados o foco F $(3;\ 6;\ 9)$ e o plano horisontal com a cota 11 como plano director. O paraboloide é cortado pelo plano horisontal de cota 7 e fechado para baixo por uma esfera tangente. Determine a sombra própria da superfície oval assim construída por iluminação de centro L $(-2;\ 6;\ 9)$.

— **6** — São dados uma esfera de centro M $(0;\ 6;\ 4)$ tangente ao plano π_1* e uma superfície cónica de rotação com o vértice S $(-3;\ 6;\ 8)$; uma secção plana axial dêste cone é obtida pela projecção horisontal de S e pela paralela ao eixo dos xx* passando por S; o eixo corta a superfície esférica. Desenhe as duas projecções da intersecção das superfícies e determine em particular as tangentes no ponto duplo.

Oberrealschule, 16-VI-1944 *Dr. M. Rueff*

* Nota do tradutor: π_1 representa o plano horisontal de cota *0* e o eixo dos xx a linha de terra.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

MOVIMENTO MATEMÁTICO ESPANHOL

De novo a «Gazeta de Matemática» tem o prazer de apresentar aos seus leitores algumas notas sôbre a actividade dos centros científicos de Barcelona no campo das ciências matemáticas. A notícia que segue é devida ao Prof. Dr. Francisco Sanviséns, nosso colaborador em Barcelona.

Trabajos de investigación

Entre los trabajos de investigación realizados por los Profesores y Colaboradores del Seminario Matemático de Barcelona en el año de 1944, cabe citar los siguientes, publicados en la «Revista Matemática Hispano-Americana»:

«Nota sobre los fundamentos de la geometría intrínseca de un espacio de Riemann», por F. Botella Raduán. — «Las indicatrices de los funcionales analíticos n-lineales y su aplicación a la integración de funciones racionales», por F. Sanvisens. — «Convergencia de algunos valores medios», por J. Mª Orts. — «Caracterización de un funcional lineal por los valores que toma sobre una línea analítica», por J. Augé. — «Sobre ciertas probabilidades iteradas», por J. Mª Orts.

También los becarios de dicho Seminario Matemático han colaborado en «Matemática Elemental», habiendo merecido el artículo del becario E. Figueras Calsina, «Distribución de las sobreaceleraciones en un movimiento rígido plano», el premio que otorga dicha publicación en el Concurso anual.

Cursos monográficos

A raiz de la concesión de validez académica para el Doctorado en Ciencias Matemáticas a los cursos superiores profesados en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, honor de caracter singular y por primera vez concedido a una Universidad de provincias, en el año escolar 1944-45 han sido desarrollados los siguientes cursos monográficos:

Profesor Dr. D. José Mª Orts: Curso de Análisis Superior: I. Los teoremas de Picard. — II. Familias normales de funciones analíticas.

Profesor Dr. D. Francisco Botella: Curso de Estudios superiores de Geometría: Geometría diferencial y de los espacios.

Profesor Dr. D. Francisco Sanvisens: Curso de Mecánica Celeste: estudio del estado actual del problema de los tres cuerpos e Introducción a la Teoría de las perturbaciones.

Profesor Dr. D. Juan Augé: Ecuaciones integrales y Cálculo de variaciones.