Exposición bibliográfica del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Durante el pasado mes de abril, tuvo lugar en Barcelona la Exposición de los trabajos realizados en el último quinquenio por los diversos Institutos y Centros cuyas actividades se desarrollan bajo los auspicios del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. En dicha Exposición se hizo patente la aportación del Seminário Matemático de Barcelona al intenso movimiento cultural, realizado en España bajo el patronato del citado Consejo.

Trabajo del Prof. J. Mª. Orts, en la Academia de Ciencias de Barcelona

El Director del Seminario Matemático Prof. Dr. D. J. Mª. Orts, ha presentado recientemente una Memoria acerca del «Método recurrente en Cálculo de probabilidades», en donde a mas de exponer las ventajas de dicho método para la rápida evaluación de ciertas probabilidades, se hace patente su importancia dentro de las cuestiones de convergencia que se plantean dentro de la teoría de las variables aleatorias en cadena.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Num bem elaborado relatório, que Sua Ex.ª o Ministro da Educação Nacional se dignou de aceitar no louvável propósito de nada desprezar de quanto possa trazer benefícios reais ao ensino liceal, emitiu a S. P. M. o seu parecer sôbre a nova organização do ensino da Matemática nos Liceus.

Dada a categoria científica das pessoas que elaboraram êsse parecer e a sua longa prática no ensino da Matemática, não ficaríamos surpreendidos se a própria Secção de Matemática da Comissão da Reforma o tomasse como base de discussão.

A Direcção da S. P. M. está actualmente empenhada numa grande campanha de propaganda pró Sociedade, em todo o País. Se o resultado imediato dessa campanha se pretende que seja a inscrição de novos sócios, ela não deixa de constituir um verdadeiro inquérito sôbre o interêsse e boa vontade dos que se dedicam à Matemática.

Foram já dirigidas circulares aos licenciados e engenheiros geógrafos pela Faculdade de Ciências de Lisboa. Para elas chamamos a atenção dos leitores da Gazeta que ainda não são sócios da S. P. M.

Está já constituída a Comissão de Propaganda do Pôrto, que vai iniciar os seus trabalhos, e em via de constituïção a Comissão de Coimbra. Seria interessante que estas Comissões conseguissem um número de sócios suficiente para a criação de núcleos com autonomia científica como é previsto nos Estatutos da Sociedade.

Oportunamente será dado a conhecer o plano geral dos trabalhos científicos da Sociedade, que está sendo elaborado pela Direcção.

Podemos, porém, desde já anunciar uma série de conferências, sob o tema geral «**Alguns aspectos actuais da Matemática na Física**» que, obsequiosamente, vêm realizar na Faculdade de Ciências de Lisboa alguns professores da Faculdade de Ciências do Pôrto.

São as seguintes as lições:

Rui Luís Gomes, *Espaço de Hilbert e Mecânica Quântica,* em 23 de Maio.

António Almeida e Costa, *Álgebras e Mecânica Quântica*; Os grupos de representação em Quântica — Representação das Álgebras, em 25 e 26 de Maio.

Luís Neves Real, *Teoria da Medida e Mecânica Clássica*; Transformações que conservam a medida — Ergodicidade e transitividade métrica, em 28 e 29 de Maio.

Alfredo Pereira Gomes, *Topologia e ergodicidade*; A definição de uma topologia — Os automorfismos ergódicos como sub-conjunto dum grupo topológico, em 31 de Maio e 1 de Junho.

Rui Luís Gomes, *Teoria da medida e Mecânica Quântica,* em 2 de Junho.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

Licenciatura em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo — Agôsto de 1944 — Ponto n.º 2

1978 — Determine a de modo que as duas equações: $x^2+ax+1=0$; $x^2+x+a=0$ tenham uma raíz comum. R: *Se fôr* x_1 *a raíz comum vem* $(a-1)x_1=a-1$; $x_1=1$ *e portanto* $a=-2$. *Para* $a=1$ *as equações não seriam distintas.*

1979 — Utilizando a fórmula do binómio de Newton, desenvolva $(a+b+c)^3$. R: $(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc)$.

1980 — Uma pessoa viaja fazendo 7 léguas em 5 horas. Passadas 8 horas outra pessoa parte do mesmo local e segue o mesmo itinerário fazendo 5 léguas em 3 horas. ¿ Quantas léguas percorrerá a primeira antes de ser atingida pela segunda ? R : *Como a primeira se atraza por hora* $5/3-7/5=4/15$ *de légua, deverá caminhar durante* $8+\frac{8\times 7/5}{4/15}=50$ *horas e percorrerá portanto 70 léguas.*

Da fórmula $t=e/v$ *deduz-se para equação do problema* $\frac{x}{7/5}=\frac{x}{5/3}+8$, *que nos dá também* $x=70$ *léguas.*

1981 — Verifique a identidade $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a}$.

R : $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{sen} a/2}{\cos a/2}=\frac{2\operatorname{sen} a/2\cos a/2}{2\cos a/2\cos a/2}=\frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a}$.

1982 — A corda de uma circunferência cujo diâmetro mede $27^m,56$ tem de comprimento $15^m,33$. Calcule por logaritmos o ângulo das duas semi-rectas que unem o centro da circunferência com os extremos da corda.

R : $\operatorname{Sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{15,33}{27,56}$ · *Aplicando logaritmos :*

$\log \operatorname{sen} \alpha/2=\log 15,33+\operatorname{colog} 27,56=1,18554+$
$+\bar{2},55972=\bar{1},74526$.

$\alpha/2=33°\,47'\,44'',2$ ou $\alpha=67°\,35'\,28'',4$.

1983 — Sem recorrer às tábuas de logaritmos, calcule as funções circulares (seno, coseno, tangente, cotangente e cosecante) do ângulo — 1125°.

R : $-1125°=-3\times 360°-45°$ *e portanto :*

$-\operatorname{sen}(-1125°)=\cos(-1125°)=\sqrt{2}/2$

$\operatorname{tg}(-1125°)=\operatorname{cotg}(-1125°)=-1$

$\sec(-1125°)=-\operatorname{cosec}(-1125°)=\sqrt{2}$.

1984 — Duas circunferências são tangentes interiormente no ponto A. Pelo ponto B diametralmente oposto a A, na circunferência de maior raio, tire a corda BC, tangente à circunferência interior num ponto D. Demonstre que AD é a bissectriz do ângulo $B\hat{A}C$. R : *Seja O o centro da circunferência de maior raio. Como* $AC \| OD$ *por serem ambas perpendiculares a* BC, $C\hat{A}D=A\hat{D}O$. *Finalmente, por ser isósceles o triângulo* $[AOD]$, $C\hat{A}D=D\hat{A}B$, q. e. d.

1985 — Indique como se devem determinar os centros das circunferências de raio dado R e que interseptam, sôbre duas rectas concorrentes dadas, cordas de comprimentos c_1 e c_2 também dados. ($c_1<2R$; $c_2<2R$). R : *Sejam* r_1 *e* r_2 *as rectas dadas. O lugar geométrico dos centros das circunferências que determinam em* r_1 *cordas de comprimento* c_1 *é constituído por duas rectas* a *e* a', *paralelas a* r_1 *e à distância* $d_1=\sqrt{4R^2-C_1^2}/2$ *desta recta. O lugar dos centros das circunferências que em* r_2 *determinam cordas de comprimento* c_2 *será formado pelas duas rectas* b *e* b' *paralelas a* r_2 *e que distam dela* $\sqrt{4R^2-C_2^2}/2$.

As rectas a, a', b, b', *interseptam-se em 4 pontos que satisfazem ao problema.*

Soluções dos n.os 1978-a-1985 de Fernando Roldão Dias Agudo (aluno do 2.° ano da F. C. L.)

I. S. C. E. F.—Exame de aptidão—Julho 1944—Ponto n.° 1.

As respostas e as passagens essenciais das resoluções devem ser justificadas. Afirmações não justificadas consideram-se como não feitas.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais o n.° 1.

1986 — A proporcionalidade na geometria; propriedades mais importantes.

ARITMÉTICA

1987 — Verificar a identidade

$$\frac{1}{1.2.3\cdots n}+\frac{1}{1.3.4\cdots n}+\frac{1}{1.2.4.5\cdots n}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{1.2.3.\ldots(n-2).n}=\frac{1}{2(n-2)!}$$

R : *Notando que* $1.2.3\ldots(k-1)(k+1)\ldots n=n!/k$, *o 1.° membro pode escrever-se*

$$\frac{1}{n!}+\frac{2}{n!}+\frac{3}{n!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=\frac{n(n-1)}{2}:n!=\frac{1}{2(n-2)!},$$

c. q. p.

ÁLGEBRA

1988 — Resolver a inequação $(x+1)^2.(x-2).(x^2-x-6)>0$. R : *Por ser* $(x+1)^2>0$ *qualquer que seja* $x\neq-1$ *real, bastará estudar o sinal do produto* $(x-2)(x^2-x-6)$ *que é positivo para* $-2<x<2$ *e* $x>3$. *Do intervalo* $(-2,2)$ *deve excluir-se o valor* $x=-1$ *que anula o 1.° membro da desigualdade.*

GEOMETRIA

1989 — São dados um cilindro e um tronco de cone, ambos com a mesma altura e tais que a base maior do tronco coïncide com uma das bases do cilindro. Determinar a razão dos raios das bases do tronco de modo que o volume do cilindro seja n vezes o do tronco. ¿ Existe algum valor que n não possa ultrapassar ? R : *Considerem-se um cilindro e um tronco de cone de revolução nas condições do problema, de altura comum* h, *de volumes respectivamente* $V_1=\pi R^2.h$ *e* $V_2=\pi h/3.(R^2+r^2+Rr)$ *sendo* R *e* r $(R>r)$ *os raios das bases do tronco. Terá que ser* $V_1=n\,V_2$ *ou* $(n-3)z^2+nz+n=0$, *sendo* $z=R/r$, $(r\neq 0)$; *portanto,*

$z=\left(-n\pm\sqrt{n(12-3n)}\right)/2(n-3)$.

É evidente que n *não pode ultrapassar o valor* 3 *caso em que o tronco de cone se reduziria a um cone. Tal resultado se concluiria da discussão da equação acima. Das 2 soluções apenas convém ao problema,* $z=\left(-n-\sqrt{n(12-3n)}\right)/2(n-3)$.

TRIGONOMETRIA

1990 — Calcular a soma das potências de expoente n dos senos de quatro ângulos em progressão aritmética de razão $\pi/2$. Discussão.

R : $S=\operatorname{sen}^n(\alpha-\pi/2)+\operatorname{sen}^n\alpha+\operatorname{sen}^n(\alpha+\pi/2)+$
$+\operatorname{sen}^n(\alpha+\pi)=(-1)^n\cdot\cos^n\alpha+\operatorname{sen}^n\alpha+\cos^n\alpha+$
$+(-1)^n\operatorname{sen}^n\alpha$.

Se $n=2K \rightarrow S=2(\cos^n\alpha+\operatorname{sen}^n\alpha)$

Se $n=2K+1 \rightarrow S=0$. (K inteiro).

CÁLCULO NUMÉRICO

1991 — Calcular o valor numérico da expressão $X=\dfrac{(1-1/x)^3\cdot(1+1/x)^3}{x^3-1}:\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$ para $x=\operatorname{sen}18^\circ 30'$.

R : *Efectuando as operações e simplificando vem :*

$$X=\frac{(x^2-1)(x+1)}{x^6}=\frac{-\cos^2\alpha(\operatorname{sen}\alpha+1)}{\operatorname{sen}^6\alpha}\ (com\ \alpha=18^\circ 30')$$

Tendo em conta que

$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b=2\operatorname{sen}(a+b)/2\cdot\cos(a-b)/2$ *virá :*

$$|X|=\frac{2\cos^2(18^\circ 30')\operatorname{sen}(54^\circ 15')\cos(35^\circ 45')}{\operatorname{sen}^6(18^\circ 30')}.$$

Aplicando logaritmos e efectuando as operações ter-se-ia $X=-1160{,}75615$.

Soluções dos n.os 1987 a 1991 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. T. — I.ª prova escrita — 19 de Outubro de 1944
Ponto n.º 4.

1992 — Três sócios constituem uma sociedade com as cotas de 130, 420 e 780 contos, respectivamente.

Cada um dêles deverá exercer a gerência na ausência dos outros dois e estipula-se que o número de dias de trabalho de cada um será inversamente proporcional à respectiva cota.

Supondo que em cada ano há apenas 305 dias úteis, ¿quantos dêsses dias deve durar a gerência de cada sócio? R: *Sejam* x, y *e* z, *respectivamente os números de dias úteis de trabalho que deve durar a gerência de cada um dos sócios. Dada a primeira condição (proporcionalidade inversa) deverá ser* $130x=420y=780z$. *Por outro lado, dado que a gerência de cada um se efectua na ausência dos outros dois sócios, é* $x+y+z=305$. *O sistema constituído pelas equações* $13x=42y$; $x=6z$ *e* $x+y+z=305$, *cujas soluções são* $x=206\frac{19}{31}$, $y=63\frac{59}{62}$ *e* $z=34\frac{27}{62}$, *resolve o problema.*

1993 — Verifique que é igual a 1 o valor numérico da expressão $(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{1/2}(1-bx)^{-1/2}$ para $x=a^{-1}(2a/b-1)^{1/2}$. R: *Pelo enunciado do problema temos :* $ax=b^{-1/2}(2a-b)^{1/2}$ *e* $bx=a^{-1}b^{1/2}(2a-b)^{1/2}$ *e por substituïção na expressão dada obtém-se :*

$$[1-b^{-1/2}(2a-b)^{1/2}]\cdot[1+b^{-1/2}(2a-b)^{1/2}]^{-1}\cdot$$
$$\cdot[1+a^{-1}b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{1/2}\cdot[1-a^{-1}b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{-1/2}.$$

Ora os dois últimos colchetes podem escrever-se sob a forma

$$a^{1/2}a^{-1/2}[a+b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{1/2}\cdot[a-b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{-1/2}$$

e transformando os dois últimos factores, que são radicais duplos, na soma e diferença de radicais simples obtém-se para valor da expressão o seguinte :

$$\frac{1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2a-b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}}{-\sqrt{\frac{2a-b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{2a-b}{2}}+\frac{b}{2}-\frac{2a-b}{\sqrt{2b}}-\sqrt{\frac{2a-b}{2}}}{-\sqrt{\frac{2a-b}{2}}+\frac{b}{2}-\frac{2a-b}{\sqrt{2b}}+\sqrt{\frac{2a-b}{2}}}=1.$$

1994 — Num triângulo isósceles os raios das circunferências circunscrita e inscrita medem 8 e 3 centímetros, respectivamente. ¿Quanto medem a base e a altura? R: *Seja o triângulo* [ABC] *de base* $\overline{BC}=2a$ *em que* M *é o ponto médio de* $\overline{BC}$, *isto é,* $\overline{MB}=\overline{MC}=a$. *Sejam* $\overline{AB}=\overline{AC}=b$ *os lados iguais,* I *o centro da circunferência inscrita e* O *o centro da circunferência circunscrita ao triângulo; será então* $\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OC}=8$ cm, $\overline{MI}=3$ cm, *existindo* I *e* O *sôbre o segmento* $\overline{AM}$, *altura do triângulo, que designaremos por* h. *Designaremos ainda por* 2β *o ângulo que cada lado igual forma com a base e por* 2α *o ângulo oposto à base. Do triângulo* [ABM] *tira-se:* (1) $h=a\operatorname{tg}2\beta$, (2) $\operatorname{sen}\alpha=a:(h^2+a^2)^{1/2}$ *e* (3) $\cos\alpha=a:(h^2+a^2)^{1/2}$. *Do triângulo* [IMB] *tira-se:* (4) $\operatorname{tg}\beta=3:a$, (5) $\operatorname{sen}\beta=3:(a^2+9)^{1/2}$ *e* (6) $\cos\beta=a:(a^2+9)^{1/2}$. *Finalmente do triângulo* [BOI] *deduz-se* (7) $8:\cos\beta=(h-11):\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$. *Ora* (8) $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=(3h-a^2):[(a^2-9)^{1/2}\cdot(h^2+a^2)^{1/2}]$ *e como de* (1) *e* (4) *se deduz* $h=6a^2:(a^2-9)$ *ou* (9) $a=3h^{1/2}(h-6)^{-1/2}$ *virá por substituïção em* (8) *e* (7) : $24h-8a^2=a(h-11)\cdot(h-3)\cdot h^{1/2}(h-6)^{-1/2}$ *ou* $24h-216=3\cdot(h-3)(h-11)$ *e finalmente* $h^2-22h+105=0$ *o que dá* $h_1=15$ *e* $h_2=7$ *valores que substituídos em* (9) *dão* $a_1=\sqrt{15}$ *e* $a_2=3\sqrt{7}$. *De modo que o problema tem duas soluções* $h_1=15$ *e* $2a_1=2\sqrt{15}$ *e* $h_2=7$ *com* $2a_2=6\sqrt{7}$.

1995 — A área de um círculo menor de uma esfera de raio r é igual à diferença das áreas das zonas em que êsse círculo divide a superfície esférica. Determine a distância do centro dessa esfera: 1.º Ao plano do círculo considerado; 2.º Ao vértice do cone tangente à esfera segundo o círculo. R: *Se fôr* h *a distância do centro da esfera ao plano do círculo considerado será* $\sqrt{r^2-h^2}$ *o raio dêsse círculo e por isso a sua área é* $\pi(r^2-h^2)$; *por outro lado as alturas das duas zonas em que a esfera fica dividida são* $r-h$ *e* $r+h$ *de modo que a diferença das suas áreas é* $2\pi r(r+h)-2\pi r(r-h)=4\pi rh$ *logo* $r^2-h^2=4rh$ *e* $h^2+4rh-r^2=0$ *ou* $h=-2r\pm\sqrt{4r^2+r^2}=r(-2\pm\sqrt{5})$, *donde a distância pedida na primeira alínea* $h=r(\sqrt{5}-2)$. *Se fôr* d *a distância da esfera ao vértice do cone referido na segunda alínea é* $r^2=h\cdot d$ *e por isso* $d=r^2:[r(\sqrt{5}-2)]=r(\sqrt{5}+2)$.

1996 — Determine sen $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$, sabendo que tg $a=-24/7$.
R: *Como* $\cos a/2=\pm\sqrt{[(1+tg^2 a)^{1/2}\pm1]:[2(1+tg^2 a)^{1/2}]}$ *vem* $\cos a/2=\pm4/5$ *ou* $\cos a/2=\pm3/5$ *e como* $\operatorname{sen} a/2=\pm\sqrt{[(1+tg^2 a)^{1/2}\mp1]:[2(1+tg^2 a)^{1/2}]}$ *vem* $\operatorname{sen} a/2=\pm3/5$ *ou* $\operatorname{sen} a/2=\pm4/5$, *correspondendo-se como se reconhece fàcilmente* $\operatorname{sen} a/2=\pm3/5$ *com* $\cos a/2=\mp4/5$ *e* $\cos a/2=\pm3/5$ *com* $\operatorname{sen} a/2=\pm4/5$.

1997 — Mostre que a relação $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$ arrasta ou $a-b=k\pi$ ou $a+b=k\pi+\pi/2$. R: *Como* $\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}(a+b)\cdot\operatorname{sen}(a-b)$ *vem* $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a-b)\cdot\operatorname{sen}(a+b)$, *igualdade que é verificada quando* $\operatorname{sen}(a-b)=0$ *e então* $a-b=k\pi$; *ou quando* $\operatorname{sen}(a+b)=1$ *e então* $a+b=\pi/2+k\pi$.

Soluções dos n.os 1992 a 1997 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º Exame de freqüência, Maio de 1944.

1998 — Prove que a equação $x^n-x^{n+1}+k=0$ não pode ter raízes inteiras quando k é ímpar. R: *Se* f(x) *admite a raiz inteira* α, *em virtude da igualdade* $f(N)=(N-\alpha)\cdot Q(N)$ (N *inteiro*), *será:* $f(1)=k$ *múltiplo de* $\alpha-1$ *e* $f(0)=k$ *múltiplo de* α. *Como* α *e* $\alpha-1$ *são números consecutivos, um dêles, com* f(1) *ou* f(0), *será divisível por* 2, *o que é manifestamente impossível por* k *ser ímpar.* c. q. d.

1999 — Calcule pelo método das partes proporcionais a raiz negativa da equação $3x^3-7x^2+4=0$. R: *Numa primeira aproximação o valor da raiz é* $-17/23$.

2000 — Prove que num triângulo esférico rectângulo se tem $\operatorname{tag} b\cdot\operatorname{tag} c=2$ quando $a+b+c=180^0$. R: *Pelas fórmulas de Nepper* (1) $\cos a=\cos b\cdot\cos c$; *mas também* (2) $\cos a=\cos[180^0-(b+c)]=-\cos b\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c$. *Somando as duas igualdades e dividindo o resultado por* (1), *vem:* $2=\operatorname{tag} b\cdot\operatorname{tag} c$. c. q. d.

2001 — Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(0,1,2)$, é perpendicular ao plano $y-2z=1$ e define com os planos coordenados um tetraedro de volume $1/3$. R: $16x+2y+z=8$.

Soluções dos n.os 1998 a 2001 de Carlos Pedro de Jesus, aluno do 2.º ano da Faculdade de Ciências de Coimbra.

I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — I.ª cadeira — I.ª Prova de freqüência teórica 16-2-944.

2002 — A operação de potenciação. Seus problemas. Seu estudo através os vários conjuntos numéricos.

2003 — Mostrar que o conjunto dos números complexos da forma $m+in$ onde m e n são inteiros quaisquer, positivos ou negativos, é um domínio inteiro. É êsse conjunto também um campo? Justifique a resposta. Examine as mesmas questões na hipótese de m e n serem inteiros e positivos.

2004 — Estudar a invertibilidade da função $y(x)$ assim definida:

$$x \text{ racional} \rightarrow y=\frac{1}{x}$$

$$x \text{ irracional} \rightarrow y=-\frac{1}{x} \quad (x \text{ variável real}).$$

O que pode dizer a respeito da imagem geométrica da função $y(x)$ e da sua inversa, se existe?

I. S. C. E. F. — I.ª Cadeira — 2.º Exame de Freqüência (15-6-944).

2005 — Conceito de convergência; sua importância, seus aspectos; problemas que resolvem.