**1995** — A área de um círculo menor de uma esfera de raio $r$ é igual à diferença das áreas das zonas em que êsse círculo divide a superfície esférica. Determine a distância do centro dessa esfera: 1.º Ao plano do círculo considerado; 2.º Ao vértice do cone tangente à esfera segundo o círculo. R: *Se fôr* $h$ *a distância do centro da esfera ao plano do círculo considerado será* $\sqrt{r^2-h^2}$ *o raio dêsse círculo e por isso a sua área é* $\pi(r^2-h^2)$; *por outro lado as alturas das duas zonas em que a esfera fica dividida são* $r-h$ *e* $r+h$ *de modo que a diferença das suas áreas é* $2\pi r(r+h)-2\pi r(r-h)=4\pi rh$ *logo* $r^2-h^2=4rh$ *e* $h^2+4rh-r^2=0$ *ou* $h=-2r\pm\sqrt{4r^2+r^2}=r(-2\pm\sqrt{5})$, *donde a distância pedida na primeira alínea* $h=r(\sqrt{5}-2)$. *Se fôr* $d$ *a distância da esfera ao vértice do cone referido na segunda alínea é* $r^2=h\cdot d$ *e por isso* $d=r^2:[r(\sqrt{5}-2)]=r(\sqrt{5}+2)$.

**1996** — Determine sen $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$, sabendo que $\operatorname{tg} a=-24/7$.

R: *Como* $\cos a/2=\pm\sqrt{[(1+\operatorname{tg}^2 a)^{1/2}\pm 1]:[2(1+\operatorname{tg} a)^{1/2}]}$ *vem* $\cos a/2=\pm 4/5$ *ou* $\cos a/2=\pm 3/5$ *e como* $\operatorname{sen} a/2=\pm\sqrt{[(1+\operatorname{tg}^2 a)^{1/2}\mp 1]:[2(1+\operatorname{tg}^2 a)^{1/2}]}$ *vem* $\operatorname{sen} a/2=\pm 3/5$ *ou* $\operatorname{sen} a/2=\pm 4/5$, *correspondendo-se como se reconhece fàcilmente* $\operatorname{sen} a/2=\pm 3/5$ *com* $\cos a/2=\mp 4/5$ *e* $\cos a/2=\pm 3/5$ *com* $\operatorname{sen} a/2=\pm 4/5$.

**1997** — Mostre que a relação $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$ arrasta ou $a-b=k\pi$ ou $a+b=k\pi+\pi/2$. R: *Como* $\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}(a+b)\cdot\operatorname{sen}(a-b)$ *vem* $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a-b)\cdot\operatorname{sen}(a+b)$, *igualdade que é verificada quando* $\operatorname{sen}(a-b)=0$ *e então* $a-b=k\pi$; *ou quando* $\operatorname{sen}(a+b)=1$ *e então* $a+b=\pi/2+k\pi$.

**Soluções dos n.os 1992 a 1997 de J. da Silva Paulo.**

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA

## ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

**F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º Exame de freqüência, Maio de 1944.**

**1998** — Prove que a equação $x^n-x^{n+1}+k=0$ não pode ter raízes inteiras quando $k$ é ímpar. R: *Se* $f(x)$ *admite a raiz inteira* $\alpha$, *em virtude da igualdade* $f(N)=(N-\alpha)\cdot Q(N)$ ($N$ *inteiro*), *será:* $f(1)=k$ *múltiplo de* $\alpha-1$ *e* $f(0)=k$ *múltiplo de* $\alpha$. *Como* $\alpha$ *e* $\alpha-1$ *são números consecutivos, um dêles, com* $f(1)$ *ou* $f(0)$, *será divisível por* 2, *o que é manifestamente impossível por* $k$ *ser ímpar.* c. q. d.

**1999** — Calcule pelo método das partes proporcionais a raiz negativa da equação $3x^3-7x^2+4=0$. R: *Numa primeira aproximação o valor da raiz é* $-17/23$.

**2000** — Prove que num triângulo esférico rectângulo se tem $\operatorname{tag} b\cdot\operatorname{tag} c=2$ quando $a+b+c=180^0$. R: *Pelas fórmulas de Nepper* (1) $\cos a=\cos b\cdot\cos c$; *mas também* (2) $\cos a=\cos[180^0-(b+c)]=-\cos b\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c$. *Somando as duas igualdades e dividindo o resultado por* (1), *vem:* $2=\operatorname{tag} b\cdot\operatorname{tag} c$. c. q. d.

**2001** — Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(0,1,2)$, é perpendicular ao plano $y-2z=1$ e define com os planos coordenados um tetraedro de volume $1/3$. R: $16x+2y+z=8$.

**Soluções dos n.os 1998 a 2001 de Carlos Pedro de Jesus, aluno do 2.º ano da Faculdade de Ciências de Coimbra.**

**I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — I.ª cadeira — I.ª Prova de freqüência teórica 16-2-944.**

**2002** — A operação de potenciação. Seus problemas. Seu estudo através os vários conjuntos numéricos.

**2003** — Mostrar que o conjunto dos números complexos da forma $m+in$ onde $m$ e $n$ são inteiros quaisquer, positivos ou negativos, é um domínio inteiro. É êsse conjunto também um campo? Justifique a resposta. Examine as mesmas questões na hipótese de $m$ e $n$ serem inteiros e positivos.

**2004** — Estudar a invertibilidade da função $y(x)$ assim definida:

$$x \text{ racional } \to y=\frac{1}{x}$$

$$x \text{ irracional } \to y=-\frac{1}{x} \quad (x \text{ variável real}).$$

O que pode dizer a respeito da imagem geométrica da função $y(x)$ e da sua inversa, se existe?

**I. S. C. E. F. — I.ª Cadeira — 2.º Exame de Freqüência (15-6-944).**

**2005** — Conceito de convergência; sua importância, seus aspectos; problemas que resolvem.

**2006** — No intervalo (0,1) é definida uma função real de variável real $y(x)$ do modo seguinte $0 \leq x < 1/4$ $y = x/2$ ; $1/4 \leq x < 1/2$ $y = x - 1/8$ ; $1/2 \leq x < 3/4$ $y = x/2 + 1/8$ ; $3/4 \leq x \leq 1$ $y = x - 1/4$ Representá-la geomètricamente.

Estudar e representar geomètricamente a sua derivada.

¿É aplicável à derivada $y'(x)$ o teorema de Darboux? E o teorema sôbre a natureza das descontimidades das funções derivadas? Razões.

**I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência — (22-6-1944).**

**2007** — No livro «Exposition élémentaire des calculs supérieures» de Simon L'Huilier, publicado em 1786, encontra-se a seguinte passagem:

«Se uma quantidade variável, susceptível de limite. goza constantemente duma certa propriedade, o seu limite goza da mesma propriedade».

Comente esta passagem.

Nalguns casos, procuraram-se modificações dos conceitos de modo tal que a afirmação de L'Huilier seja verdadeira. Quais? e como?

**2008** — Na teoria dos complexos prova-se que as potências de expoente inteiro de complexos conjugados são complexos conjugados. Examine se esta propriedade se mantém para expoente real qualquer.

**2009**—Estude o comportamento da função $y = e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$ na vizinhança do ponto $x = 0$.

**I. S. A.** — Matemáticas Gerais — **2.º exame, Maio de 1944.**

**2010** — Calcule $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{tg^2\, x - tg^2\, a}{x - a}$.

$$R: L = \lim_{x \to a} \left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a\right) \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} a \cdot \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(x-a) \cos x \cos a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{\cos^2 a}.$$

*Pode chegar-se, mais ràpidamente, ao mesmo resultado notando que o limite em questão é a derivada, no ponto* a, *da função* $\operatorname{tg}^2 x$, *isto é* $L = \left(\operatorname{tg}^2 x\right)'_{x=a} = \left(2 \operatorname{tg} x \sec^2 x\right)_{x=a} = 2 \operatorname{tg} a \sec^2 a$.

**2011** — Represente gràficamente as funções: *a)* $y = 3x - 1$, *b)* $y = 2|x| + 3$ e *c)* $y = x \cdot I(x) - 1$ (esta última só no intervalo $[0, 3)$. Indique os contradomínios correspondentes. R: a) *Representa uma recta. O contradomínio é o eixo das ordenadas.* b) *Representa duas semi-rectas com o ponto comum* (0,3). *Tem-se*

$$y = 2|x| + 3 = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x \geq 0 \\ -2x + 3 & \text{para } x \leq 0. \end{cases}$$

*O contradomínio é a semi-recta* $x = 0$ $y \geq 3$. c) *O gráfico é o conjunto dos 3 segmentos rectilíneos definidos por* $0 \leq x < 1$ $y = -1$ ; $1 \leq x < 2$ $y = x - 1$ ; e $2 \leq x < 3$ $y = 2x - 1$ e do ponto (3,8).

**2012** — Determine a probabilidade de uma soma de pontos pelo menos igual a 10 no lançamento de 2 dados. R: *Os casos favoráveis que correspondem a somas de pontos iguais a 10, 11 e 12 são em número, respectivamente, de 3, 2 e 1.*

*O número de casos igualmente possíveis é* $6^2$.

*A probabilidade pedida é pois* $\dfrac{3+2+1}{36} = \dfrac{1}{6}$.

**2013** — Defina e dê exemplos de funções monotónicas num intervalo. O mesmo para funções pares, ímpares e periódicas.

Soluções dos n.os 2010 a 2012 de António Gonçalves dos Santos Júnior (aluno do 2.º ano do I. S. A).

## CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

**I. S. A.** — Cálculo — **2.º Exame de frequência — 24 de Maio de 1944.**

**2014** — Dada a função $z = (\operatorname{sen} x)^{\log \operatorname{cotg} y}$ calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

**2015** — Calcule $I = \int x \cos^2 x\, dx$. R: *Fazendo* $u = x \cos x$, $dv = \cos x$, *vem*

$$I = \frac{x \cos x \operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4} + \frac{x^2}{4} + C.$$

**2016** — Mostre que se a função $y = f(x)$ derivável, é crescente na vizinhança do ponto $(x, y)$, a sua derivada de primeira ordem é positiva na vizinhança do mesmo ponto.

**2017** — Um círculo de raio $r$ é dividido em dois segmentos por uma linha recta $g$ à distância $h$ do centro. Qual é o rectângulo de área máxima que se pode increver no mais pequeno dos segmentos? R: *Designando por* $l$ *a altura do rectângulo é*

$$A = 2\sqrt{r^2 - (h + l)^2} \cdot l \quad donde \quad l = \frac{-3h \pm \sqrt{9h^2 + 8r^2}}{4}.$$

**2018** — Calcule, aplicando directamente a definição de integral como limite de uma soma, $\int_0^b x^3\, dx$.

R: $I=\int_0^b x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_1^n x_j^3\,\Delta x$ ; *mas* $x_j=j\Delta x$ *e* $\Delta x=b/n$, *logo* $I=\lim_{n\to\infty}\sum_1^n (j\Delta x)^3\,\Delta x=$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\,(n+1)^2\,b^4}{4\,n^4}=\frac{b^4}{4}$.

**2019** — Calcule, aplicando directamente a definição de integral como limite de uma soma,

$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)n$ · R: *Pode escrever-se* $L=\lim\sum_{j=1}^n\frac{n^2}{j^2+n^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim\sum_{j=1}^n\frac{1}{1+x_j^2}\Delta x$ *se fizermos* $\frac{1}{n}=\Delta x$ *e* $x_j=j\Delta x$, *donde* $L=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$.

**2020** — A soma de $n$ quantidades variáveis reais e positivas é constante e igual a $C$. Para que valores dessas quantidades é máximo o seu produto? R: *Da função* $F_1\equiv x_1.x_2\ldots x_4$ *e da equação de condição* $F_2\equiv x_1+x_2+\ldots x_n-C=0$ *obtém-se o sistema de estacionariedade* $\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=C \\ \dfrac{\partial(F_1\,,\,F_2)}{\partial(x_1\,,\,x_j)}=0\ (j=2,3,\ldots n)\end{cases}$ *donde* $x_1=x_2=\ldots=x_4=\frac{C}{n}$.

Soluções dos n.os 2014 a 2020 de F. de Carvalho Araújo.

**I. S. T. — Cálculo — I.º Exame de frequência — 1944**

**2021** — Determinar as ordenadas máximas e mínimas da cónica $x^2+4y^2+2x+y+1=0$. R: *Do sistema de estacionaridade*: $\begin{cases} f=x^2+4y^2+2x+y+1=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+2=0\end{cases}$ *deduz-se*: $x=-1\,,\,y=0$ *(máximo)* e $x=-1\,,\,y=-1/4$ *(mínimo) não havendo necessidade de calcular as derivadas de 2.ª ordem para se concluir da natureza dos pontos de estacionaridade por se tratar de uma elipse. (Note-se que o anulamento de* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *promove de facto o anulamento de* $\frac{dy}{dx}$, *visto não se anular* $\frac{\partial f}{\partial y}=8y+1$ *tanto para* $y=0$ *como para* $y=-1/4$).

**2022** — Calcular: $I=\int\frac{x^{-1/2}\,dx}{(1-x^3)\,(2x^3-1)^{1/6}}$.

R: *Fazendo a mudança de variável*: $2x^3-1=x^3\,u^6$ *donde* $dx=2x^4\,u^5\,du$, *racionaliza-se a função integranda:*

$$I=2\int\frac{u^4\,du}{1-u^6}=2\int\frac{u^4\,du}{(1-u)\,(1+u)\,(1+u+u^2\,(1-u+u^2)}\,.$$

*Aplicando a regra de Fubini:*

$$I=\frac{1}{6}\log\frac{(1+u)^2\,(1+u+u^2)}{(1-u)^2\,(1-u+u^2)}-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{3}\cdot\frac{u}{1-u^2}\right]+c,$$

*onde:* $u=(2-x^{-3})^{1/6}$.

**2023** — Estudar a convergência do integral:

$$I=\int_0^\infty\left[\frac{2-x\,e^{-x}}{2x^2}+\frac{1}{x\,(1-e^x)}\right]dx\,.$$

R: *O integral é impróprio de 2.ª espécie.*

*Temos:* $I=\int_0^\infty\frac{2e^x-2e^{2x}-x+3x\,e^x}{2x^2\,.\,e^x\,(1-e^x)}\,dx=$

$=\int_1^\infty\frac{2t-2t^2-\log t+3t\log t}{2t^2\,(1-t)\,(\log t)^2}\,dt$, *fazendo a mudança de variável:* $e^x=t$.

*Aplicando o 2.º critério de Bertrand, [se* $f(x)$ *é da ordem de* $x^{-1}(\log x)^{\lambda-1}$ *quando* $x\to\infty$, *o integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *é absolutamente convergente se* $\lambda<0$] *vem:*

$$L=\lim_{\substack{t=\infty\\ \lambda=-1}}\frac{2t-2t^2-\log t+3t\log t}{2t^2\,(1-t)\,(\log t)^2\cdot t^{-1}\,(\log t)^{\lambda-1}}=$$

$=\lim_{t=\infty}\frac{2t-2t^2-\log t+3t\log t}{2t\,(1-t)}=1$ *(aplicando, por exemplo, a regra de L'Hôpital duas vezes). Logo o integral é convergente (absolutamente).*

Soluções dos n.os 2021 a 2023 de Olívio de Sousa Bento.

**I. S. T. — Cálculo — 2. Exame de freqüência 1944.**

**2024** — Sôbre uma esfera de centro na origem é definido o vector $\alpha=(y-z)\;I+(z-x)\;J+(x-y)\;K$.

Verificar, para êste vector, e para qualquer calote esférica de base paralela ao plano $x\;y$ o teorema de Stokes.

**2025** — Integrar a equação $\frac{dy}{dx}-\frac{d^3y}{dx^3}=0$.

Determinar a curva integral particular que tem ordenada mínima $y$ no ponto $(0,1)$, sendo igual à unidade o raio de curvatura nêsse ponto.

**2026** — Integrar a equação $y\,(x-1)=\Phi\,x^2\,(p=y')$ pelo método da dualidade.

**I. S. T. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 1944 — 1.ª chamada — (exame teórico).**

**2027** — Representação conforme duma superfície sôbre outra. Relações dêste conceito com o de função analítica. Superfícies aplicáveis. Mostrar que a representação conforme é, em geral, possível de infinitas maneiras. Mostrar que a aplicação é, em geral, impossível.

**2028** — Relações entre as duas curvaturas duma curva torsa. Equações intrínsecas.

**F. C. P. — Análise Superior — 1.º Exame de frequência, Março, 1944.**

**2029** — a) Integrar a equação $pq=2yz$; b) Determinar a superfície integral que passa pela linha $z=0, y^2=x$; c) Do integral completo deduzir a solução $z=(x+y^2)^2/4$.

R: a) *O sistema* $\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\frac{dz}{2pq}=\frac{dp}{2py}=\frac{dq}{2qy+2z}$ *admite a solução* $y^2+c_1=p$; *da equação proposta deduz-se, então,* $q=\frac{2yz}{y^2+c_1}$, *e tem-se* $dz=(y^2+c_1)\,dx+\frac{2yz}{y^2+c_1}\,dy$. *Integrando, obtém-se finalmente* $z=(x+c_2)(y^2+c_1)$. b) *Eliminando* y *e* z *entre as equações* $y^2=x$, $z=0$, $z=(x+c_2)(y^2+c_1)$, *vem* $(x+c_2)(x+c_1)=0$; *obrigando esta equação a ter uma raíz dupla, obtém-se a relação* $c_2=c_1$, *que define uma sub-família das superfícies representadas pelo integral completo, a que a linha dada é tangente em cada um dos seus pontos:* $z=(x+c_1)(y^2+c_1)$. *A superfície integral pedida é a envolvente desta sub-família:* $z=-(x-y)^2/4$. c) *Igualando as derivadas parciais de z obtidas do integral completo e da solução dada, obtém-se:* $c_1=(x-y^2)/2$, $c_2=(y^2-x)/2$.

**2030** — Calcular $\int_S \frac{e^{\pi z}}{z^2(z^2+1)}\,dz$ em que $S$ é uma circunferência com o centro na origem e raio $R\neq 1$. R: a) $R<1$; *o único polo interior ao contôrno* S *é* $z_1=0$, *e o respectivo resíduo* $A_1=\pi$; *o valor do integral é, portanto,* $I=2i\pi^2$. b) $R>1$; *além de* $z_1$ *há a considerar os polos* $z_2=i$, $z_3=-i$, *cujos resíduos são, respectivamente,* $A_2=-i/2$, $A_3=i/2$. *A soma dos resíduos é* $\pi$ *e, portanto,* $I=2i\pi^2$.

**2031** — Determinar pelo cálculo simbólico uma solução da equação $y'''-\int_0^x y\,dx+1=0$, tal que $y_0=y'_0=y''_0=1$. R: *Tomando as imagens, teremos* $p^3\bar{y}-p^2y_0-py'_0-y''_0-\frac{1}{p}\bar{y}+\frac{1}{p}=0$ *ou* $\bar{y}=\frac{p^3}{p^4-1}+\frac{p^2}{p^4-1}+\frac{p}{p^4-1}-\frac{1}{p^4-1}$, *onde* $\bar{y}$ *é a imagem de* y, $\bar{y}\doteqdot y$. *Ora* $\frac{1}{p^4-1}=\frac{1/4}{p-1}-\frac{1/4}{p+1}-\frac{1/2}{p^2+1}$; *portanto,* $\frac{1}{p^4-1}\doteqdot\frac{e^x}{4}-\frac{e^{-x}}{4}-\frac{\operatorname{sen} x}{2}$. *Notando que se* $\bar{\varphi}(p)\doteqdot\varphi(x)$ *e* $\varphi(0)=0$, *é* $p\bar{\varphi}(p)\doteqdot\varphi'(x)$, *vem no nosso caso:* $\frac{p}{p^4-1}\doteqdot\frac{e^x}{4}+\frac{e^{-x}}{4}-\frac{\cos x}{2}$; $\frac{p^2}{p^4-1}\doteqdot\frac{e^x}{4}-\frac{e^{-x}}{4}-\frac{\operatorname{sen} x}{2}$; $\frac{p^3}{p^4-1}\doteqdot\frac{e^x}{4}+\frac{e^{-x}}{4}+\frac{\cos x}{2}$; *donde* $\bar{y}\doteqdot\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}+\operatorname{sen} x$. *A solução pedida é, pois,* $y=e^x/2+e^{-x}/2+\operatorname{sen} x$.

**F. C. P. — Análise Superior — 2.º Exame de freqüência — Maio 1944.**

**2032** — Calcular, pela teoria dos integrais eulerianos, $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt[3]{tg\,x}\,dx$. R: $I=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{1/3}x\cos^{-1/3}x\,dx$; *pondo* $\operatorname{sen}^2 x=y$, *vem:* $I=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{-2/3}\,dy=$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(1/3)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi/3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

**2033** — Pelo teorema de Mittag-Leffler, obter o desenvolvimento de $\operatorname{cosec} z$.

R: *Polos:* $a_k=\pm k\pi$, $k=0,1,2,\cdots$;

*resíduos:* $r_k=\lim_{z=\pm k\pi}\frac{1}{\cos z}=(-1)^k$

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z\mp k\pi}+\frac{(-1)^k}{\pm k\pi}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2z}{z^2-k^2\pi^2}.$$

**2034** — Calcular $I=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ ao longo do caminho seguinte: de $0$ *a* $-2-2i$, $y=x$; de $-2-2i$ a $1-2i$, $y=-2$; de $1-2i$ a $1$, $x=1$.

$$\text{R: } I=\int_0^1\frac{dx}{1+x}+2i\int_{-1}^{0}\frac{dy}{\sqrt{1-y}}=-\log(\sqrt{2}-1)+i\pi.$$

**2035** — Calcular, com as funções de Weierstrass, $I=\int\frac{dz}{z^2\sqrt{z^3+3z^2-4z-12}}$. R: *Tem-se* $I=2J_2$, *onde* $J_2=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{4x^3-28x-24}}$.

*Obtém-se* $2J_2=\frac{\sqrt{4x^3-28x-24}}{24(x-1)}-\frac{1}{3}J_1-\frac{1}{12}(I_1-I_0)$

*Pondo* $x=\wp(u)$, *onde* $g_2=28$, $g_3=24$, *e sendo* v *tal que* $\wp(v)=1$, *vem:* $I=2J_2=\frac{\wp'(u)}{24[\wp(u)-\wp(v)]}+$

$+\frac{1}{3\wp'(v)}[\log\sigma(u+v)-\log\sigma(u-v)-2\zeta(v).u]+$

$+1/12.[\zeta(u)+u]+u_0$ *onde* $u_0$ *é uma constante arbitrária.*

Soluções dos n.os 2029 a 2035 de A. Pereira Gomes.