ANO VI-N.º 23 GAZETA DE MATEMÁTICA FEVEREIRO-1945

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Exemplo de álgebras que admitem um tipo de involução particular

por **Ruy Luís Gomes**

1. Consideremos uma álgebra linear $\mathfrak{A}$ ou sistema hipercomplexo de ordem n [1] e representemos por letras latinas minúsculas $(a, b, c, \cdots)$ os seus elementos e por letras gregas $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ os elementos do respectivo corpo fundamental $\mathfrak{K}$. É sabido que uma álgebra associativa pode ser considerada como um anel [2] que admite o corpo fundamental como domínio operatório. E todo o elemento a se pode escrever sob a forma

$$(1) \qquad a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n ,$$

sendo $e_1, \cdots, e_n$ n elementos linearmente independentes e $\alpha_i \in \mathfrak{K}$.

Ora, colocando-se no caso particular de uma álgebra associativa com elemento um, u, cujo corpo fundamental é o dos números reais, e interpretando os números $\{\alpha_i\}$ como coordenadas cartesianas homogéneas de um ponto de um espaço de $n-1$ dimensões, conseguiu o Doutor Manuel Gonçalves Miranda [3], caracterizar a multiplicação $a \cdot b$ (da álgebra, considerada como anel) por maneira que a correspondência

$$(2) \qquad a \rightleftarrows b, \quad \text{com} \quad a \cdot b = \lambda u,$$

defina uma *inversão pontual projectiva*. Neste artigo, a nossa intenção é retomar êste problema particular para o formular e resolver em termos puramente algébricos num plano mais geral — o das álgebras que admitem determinado tipo de involução.

2. Para isso, começamos por definir *involução*.

Considerada uma álgebra como grupo abeliano aditivo, uma involução J é um automorfismo

I) *operatório relativamente ao corpo fundamental:*

$$a \longrightarrow J(a), \quad b \longrightarrow J(b)$$

implica

$$(3) \qquad \begin{array}{l} a+b \longrightarrow J(a+b) \\ \lambda a \longrightarrow \lambda J(a); \end{array}$$

II) *inverso com relação ao produto*

$$(4) \qquad ab \longrightarrow J(ab) = J(b)\, J(a);$$

III) *de quadrado igual à identidade*

$$(5) \qquad J(J(a)) = a,$$

qualquer que seja $a \in \mathfrak{A}$.

Teorema: *Os elementos do corpo* (λu), *isomorfo do corpo fundamental, são simétricos, quere dizer, coincidem com os seus transformados.*

Na verdade, de

$$au = ua = a,$$

atendendo a II) (4), vem

$$J(u)\, J(a) = J(a)\, J(u) = J(a).$$

E como se trata de um automorfismo e, portanto, $J(a)$ percorre tôda a álgebra, tem-se

$$J(u) = u.$$

Em segundo lugar, de I) (3), tira-se

$$J(\lambda u) = \lambda J(u).$$

Logo,

$$(6) \qquad J(\lambda u) = \lambda\, J(u) = \lambda u, \qquad \text{c. q. d.}$$

Teorema: $aJ(a)$, $J(a)\,a$ *e* $a + J(a)$ *são elementos simétricos.*

Na verdade, de I) (3), III) (5) e de II) (4), III) (5), vem

$$\begin{aligned} J(a + J(a)) &= J(a) + J(J(a)) \\ &= J(a) + a = a + J(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J(aJ(a)) &= J(J(a))\, J(a) = aJ(a) \\ J(J(a)\,a) &= J(a)\, J(J(a)) = J(a)\,a, \quad \text{c. q. d.} \end{aligned}$$

Ora, deduzidos êstes teoremas, que são comuns a qualquer involução de uma álgebra com elemento um, vamos introduzir uma hipótese particular, quere dizer, fazer o estudo de *um certo tipo de involução*.

Assim, consideremos apenas as involuções que *não admitem como elementos simétricos senão os elementos do corpo* (λu), que é isomorfo do corpo fundamental.

Analìticamente,

$$a = J(a)\,,\ \textit{se, e só se,}\ a = \lambda u\,.$$

Mais tarde justificaremos esta hipótese, que ressalta imediatamente da interpretação geométrica do problema pôsto inicialmente pelo Doutor Manuel Miranda.

Agora, passemos ao estudo destas involuções.

TEOREMA: $a\,, J(a)$ *e* u *são linearmente dependentes.*

Na verdade, como $a + J(a)$ é simétrico, temos

$$a + J(a) = \lambda u\,, \qquad \text{c. q. d.} \tag{7}$$

TEOREMA: *é sempre possível determinar* $n-1$ *elementos anti-simétricos,* $e_i\,, i=2\cdots n$, *linearmente independentes de* u *e entre si.*

Na verdade, como se trata de uma álgebra de ordem n é sempre possível determinar $n-1$ elementos e'_i, linearmente independentes de u e entre si.

Ora, pelo teorema anterior, temos

$$e'_i + J(e'_i) + \lambda_i u = 0\,.$$

E, considerando $\alpha'_i e'_i + \beta_i u$, quando não seja $\lambda_i = 0$, vem

$$\begin{aligned} J(\alpha'_i e'_i + \beta_i u) &= \alpha'_i J(e'_i) + \beta_i u \\ &= -\alpha'_i e'_i - \alpha'_i \lambda_i u + \beta_i u \\ &= -(\alpha'_i e'_i + \beta_i u) + (-\alpha'_i \lambda_i + 2\beta_i)\, u\,. \end{aligned}$$

Temos, pois,

$$\begin{aligned} &J(e'_i) = -e'_i\,, \quad \text{para}\ \lambda_i = 0 \\ &J(\alpha'_i e'_i + \beta_i u) = -(\alpha'_i e'_i + \beta_i u)\,, \\ \text{para}\quad &\lambda_i \neq 0 \quad \text{e} \quad -\alpha'_i \lambda_i + 2\beta_i = 0\,. \end{aligned}$$

O sistema

$$\begin{aligned} e_i &= e'_i\,, & \lambda_i &= 0 \\ e_i &= \alpha_i e'_i + \beta_i u\,, & \lambda_i &\neq 0 \end{aligned}\,, \tag{8}$$

é anti-simétrico

$$J(e_i) = -e_i\,, \tag{9}$$

e satisfaz manifestamente às outras condições de independência, c. q. d.

Na base,

$$u\,, e_2\,, \cdots, e_n\,,$$

temos

$$a = \alpha_1 u + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

e

$$J(a) = \alpha_1 u - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_n e_n\,.$$

Geomètricamente, o ponto $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ é transformado em $(\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_n)$: *a involução coincide com a simetria em relação ao ponto-imagem do elemento* u *da álgebra.* A inversa é igualmente verdadeira, como o leitor pode verificar imediatamente.

Estudemos agora o reflexo desta involução no produto ab da álgebra, considerada como um anel, calculando a tabela

$$e_i e_k = \alpha'_{ik} u + \alpha^r_{ik} e_r\,, \tag{10}$$

isto é, os coeficientes α'_{ik} e α^r_{ik}.

Ora, em virtude de I) (3), combinada com a anti-simetria dos e_i, temos

$$J(e_i e_k) = \alpha'_{ik} u - \alpha^r_{ik} e_r\,. \tag{11}$$

Por outro lado, de II) (4), combinada ainda com a anti-simetria dos e_i, vem

$$\begin{aligned} J(e_i e_k) &= J(e_k)\, J(e_i) = e_k e_i \\ &= \alpha'_{ki} u + \alpha^r_{ki} e_r\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Comparando agora (11) com (12), vem

$$\alpha'_{ik} u - \alpha^r_{ik} e_r = \alpha'_{ki} u + \alpha^r_{ki} e_r$$

donde

$$\alpha'_{ik} = \alpha'_{ki}\,, \quad \alpha^r_{ik} = -\alpha^r_{ki}\,. \tag{13}$$

Quere dizer, *uma involução do tipo considerado, quando a representação da álgebra se faz numa base constituída pelo elemento* u *e por* $n-1$ *elementos anti-simétricos* $e_2, \cdots, e_n$, *reflecte-se na tabela de multiplicação pela simetria dos coeficientes* α'_{ik} *e pela anti-simetria dos coeficientes* α^r_{ik}. *E, inversamente, uma álgebra com esta propriedade admite aquele tipo de involução.*

Estão, portanto, caracterizadas as álgebras que admitem êste tipo de involução e deve assinalar-se a circunstância de que, em tôda a análise anterior, *não se recorreu à propriedade associativa da multiplicação.* Ora, introduzamos essa propriedade e vejamos como dela resulta um novo aspecto algébrico da involução J.

Na verdade, como $aJ(a)$ e $J(a)\,a$ são simétricos, temos

$$\begin{aligned} aJ(a) &= \lambda u \\ J(a)\,a &= \mu u \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira destas igualdades, à esquerda, por $J(a)$, e recorrendo *à propriedade associativa da multiplicação,* vem

$$J(a)\,a \cdot J(a) = \lambda J(a)\,,$$

ou

$$\mu J(a) = \lambda J(a)\,,$$

o que exige, $J(a) = 0$ e, portanto, $\lambda = \mu = 0$; ou, então, $\lambda = \mu$. Em qualquer dos casos se tem, pois,

$$aJ(a) = J(a)\,a = \lambda u\,.$$

Quere dizer: $J(a)$ *é um zero, direito e esquerdo de* a, *hipótese* $\lambda=0$, *ou* $\frac{J(a)}{\lambda}$ *um inverso, direito e esquerdo, de* a, *hipótese* $\lambda\neq 0$.

E como

$$a+J(a)+\lambda' u=0,$$

segue-se que os zeros ou inversos a, $J(a)$, são, na representação geométrica, colinearescom a origem, que é o elemento u da álgebra.

Fica assim completamente justificada a interpretação da involução J como «inversão pontual projectiva», nos casos $J(a)\neq 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] *A. Adrian Albert.* **Structure of Algebras (Amer. Math. Soc. New-York, 1939) — Cap. I, § 3., pág. 3.**

[2] Sôbre as noções fundamentais — Anel, Corpo, etc. consultar as publicações 1 e 7, de *A. Almeida Costa*, na colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto.

[3] Dissertação de Doutoramento—Multiplicações vectoriais, associativas e modulares — Representações geométricas». Pôrto, 1944 - pág. 97-102.

[4] *A. A. Albert.* Loc. cit. — Cap. X, pág. 151 e 152.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

Breves considerações a propósito de uma demonstração

por **Vergílio S. Barroso** (Bolseiro em Roma do I. A. C.)

1. Ao folhear uma obra [1] de um conhecido matemático italiano, depara-se-me um teorema que é bastante familiar ao aluno de um curso de Análise Superior e, terminada a leitura do enunciado e demonstração do mesmo, não posso deixar de me preguntar por qual motivo o autor terá preferido apresentá-lo sob uma forma que não parece ser a mais apropriada a elucidar o leitor e a despertar o seu interêsse. E esta pregunta, que surge a propósito de um caso particular, pode igualmente ser feita em relação ao modo por que, em geral, é ministrado o ensino da Matemática na maioria dos cursos superiores que conheço.

Antes de prosseguir, porém, transcreverei o enunciado do teorema a que me refiro, tal como se encontra na citada obra, para dar ao leitor a possibilidade de, por si, constatar se são, ou não, justas as observações que depois faço. Abramos pois o livro a páginas 6 e aí encontraremos, no parágrafo 3, n.º 1, o enunciado do «teorema da existência e unicidade do sistema de integrais de um sistema de equações diferenciais ordinárias», como segue:

Seja dado um sistema de equações diferenciais sob a forma normal

$$y_i'=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_m) \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

e suponhamos que, num rectângulo R *de centro* $(\alpha;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ *definido pelas limitações*

$$|x-\alpha|\leq a \qquad |y_i-\beta_i|\leq b \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{2}$$

onde a *e* b *são constantes positivas, as funções* $f_i(x;y_1,\cdots,y_m)$ *são unívocas e contínuas.*

Como consequência, temos que as funções f_i são limitadas em R e existe portanto um número M tal que, qualquer que seja o ponto $(x;y_1,\cdots,y_m)$ de R, se tem

$$|f_i(x;y_1,\cdots,y_m)|\leq M \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

Suponhamos, além disso, que as funções f_i são lipschitzianas de 1.ª ordem em relação às variáveis y_i, isto é, que existem m constantes $L_1, L_2,\cdots,L_m$ para as quais se tenha

$$\begin{aligned}&|f_i(x;y_1,\cdots,y_k+h,\cdots,y_m)-\\&-f_i(x;y_1,\cdots,y_k,\cdots,y_m)|\leq hL_i\\&\qquad (k,i=1,2,\cdots,m)\end{aligned} \tag{4}$$

Segue-se que, quaisquer que sejam os pontos

$$(x;y_1,\cdots,y_m) \quad \text{e} \quad (x;\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m)$$

de R, se tem, para $i=1,\cdots,m$,

$$|f_i(x;\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m)-f_i(x;y_1,\cdots,y_m)|\leq L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k-y_k| \tag{5}$$

onde L indica a maior das constantes L_i.

Postas estas hipóteses sôbre as f_i, demonstremos o seguinte terema:

Seja δ *o menor dos números* a, b/4M; x_0 *um ponto do intervalo* $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$; $y_1^0,\cdots,y_m^0$ *um sistema de* m *valores iniciais que difiram em valor absoluto das correspondentes constantes* $\beta_1,\cdots,\beta_m$ *menos de* b/2, *isto é, tais que*

$$|x_0-\alpha|\leq\delta \qquad |y_i^0-\beta_i|\leq b/2 \tag{6}$$

[1] **G. Sansone — Equazioni Differenziali nel Campo Reale — Parte prima. Monografie di Matematica Applicata — Ed. Zanichelli, Bologna 1941.**