Quere dizer: $J(a)$ *é um zero, direito e esquerdo de* a, *hipótese* $\lambda=0$, *ou* $\frac{J(a)}{\lambda}$ *um inverso, direito e esquerdo, de* a, *hipótese* $\lambda\neq 0$.

E como

$$a+J(a)+\lambda' u=0,$$

segue-se que os zeros ou inversos a, $J(a)$, são, na representação geométrica, colinearescom a origem, que é o elemento u da álgebra.

Fica assim completamente justificada a interpretação da involução J como «inversão pontual projectiva», nos casos $J(a)\neq 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] *A. Adrian Albert.* Structure of Algebras (Amer. Math. Soc. New-York, 1939) — Cap. I, § 3., pág. 3.

[2] Sôbre as noções fundamentais — Anel, Corpo, etc. consultar as publicações 1 e 7, de *A. Almeida Costa*, na colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto.

[3] Dissertação de Doutoramento—Multiplicações vectoriais, associativas e modulares — Representações geométricas». Pôrto, 1944 - pág. 97-102.

[4] *A. A. Albert.* Loc. cit. — Cap. X, pág. 151 e 152.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

Breves considerações a propósito de uma demonstração

por **Vergílio S. Barroso** (Bolseiro em Roma do I. A. C.)

1. Ao folhear uma obra [1] de um conhecido matemático italiano, depara-se-me um teorema que é bastante familiar ao aluno de um curso de Análise Superior e, terminada a leitura do enunciado e demonstração do mesmo, não posso deixar de me preguntar por qual motivo o autor terá preferido apresentá-lo sob uma forma que não parece ser a mais apropriada a elucidar o leitor e a despertar o seu interêsse. E esta pregunta, que surge a propósito de um caso particular, pode igualmente ser feita em relação ao modo por que, em geral, é ministrado o ensino da Matemática na maioria dos cursos superiores que conheço.

Antes de prosseguir, porém, transcreverei o enunciado do teorema a que me refiro, tal como se encontra na citada obra, para dar ao leitor a possibilidade de, por si, constatar se são, ou não, justas as observações que depois faço. Abramos pois o livro a páginas 6 e aí encontraremos, no parágrafo 3, n.º 1, o enunciado do «teorema da existência e unicidade do sistema de integrais de um sistema de equações diferenciais ordinárias», como segue:

Seja dado um sistema de equações diferenciais sob a forma normal

$$y_i'=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_m) \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

e suponhamos que, num rectângulo R *de centro* $(\alpha;\beta_1,\beta_2,\cdot\cdot,\beta_m)$ *definido pelas limitações*

$$|x-\alpha|\leq a \qquad |y_i-\beta_i|\leq b \qquad (i=1,2,\cdot\cdot,m) \tag{2}$$

onde a *e* b *são constantes positivas, as funções* $f_i(x;y_1,\cdots,y_m)$ *são unívocas e contínuas.*

Como conseqüência, temos que as funções f_i são limitadas em R e existe portanto um número M tal que, qualquer que seja o ponto $(x;y_1,\cdot\cdot,y_m)$ de R, se tem

$$|f_i(x;y_1,\cdots,y_m)|\leq M \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

Suponhamos, além disso, que as funções f_i são lipschitzianas de 1.ª ordem em relação às variáveis y_i, isto é, que existem m constantes $L_1,L_2,\cdots,L_m$ para as quais se tenha

$$\begin{aligned}|f_i(x;y_1,\cdot\cdot,y_k+h,\cdot\cdot,y_m)-\\-f_i(x;y_1,\cdots,y_k,\cdot\cdot,y_m)|\leq hL_i\end{aligned} \qquad (k,i=1,2,\cdots,m) \tag{4}$$

Segue-se que, quaisquer que sejam os pontos

$$(x;y_1,\cdots,y_m) \quad \text{e} \quad (x;\bar{y}_1,\cdot\cdot,\bar{y}_m)$$

de R, se tem, para $i=1,\cdots,m$,

$$|f_i(x;\bar{y}_1,\cdot\cdot,\bar{y}_m)-f_i(x;y_1,\cdot\cdot,y_m)|\leq L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k-y_k| \tag{5}$$

onde L indica a maior das constantes L_i.

Postas estas hipóteses sôbre as f_i, demonstremos o seguinte terema:

Seja δ *o menor dos números* a, b/4M; x_0 *um ponto do intervalo* $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$; $y_1^0,\cdots,y_m^0$ *um sistema de* m *valores iniciais que difiram em valor absoluto das correspondentes constantes* $\beta_1,\cdot\cdot,\beta_m$ *menos de* b/2, *isto é, tais que*

$$|x_0-\alpha|\leq\delta \qquad |y_i^0-\beta_i|\leq b/2 \tag{6}$$

[1] G. Sansone — Equazioni Differenziali nel Campo Reale — Parte prima. Monografie di Matematica Applicata — Ed. Zanichelli, Bologna 1941.

Existe então um, e um só, sistema de funções

$$y_1 = y_1(x)\,;\cdots;\, y_m = y_m(x)$$

tendo por campo de existência o intervalo $(\alpha - \delta\,,\,\alpha + \delta)$

(7) $$|x-\alpha| \leq \delta$$

que satisfaz ao sistema (1) *e às condições iniciais*

(8) $$y_i(x_0) = y_i^0 \qquad (i = 1\,,2\,,\cdots,m)$$

ou, como se diz, o *problema de Cauchy* para o sistema (1) [e condições iniciais (8)] admite uma, e uma só, solução, chamada *solução de Cauchy*.

2. Tenho a impressão de que, na maioria dos casos, o aluno que acaba êste longo enunciado se sentirá um pouco desorientado, não ficando a ver com nitidez o problema que se lhe põe. Êste facto é conseqüência, em parte, da fadiga proveniente do prolongado esfôrço de atenção empregado na leitura, e em parte de uma certa perplexidade que nêle surgirá perante algumas das condições postas, cuja razão de ser não pode ver imediatamente e que lhe aparecerão por conseguinte com um aspecto pouco natural.

Ora vejamos quais são as condições postas no enunciado: *a)* «As funções f_i são unívocas e contínuas no domínio R» — esta é uma restrição bastante fraca imposta às f_i, que não parece ser estranho fazer logo de início. Mas já não aparecem tão naturalmente as seguintes: *b)* «as funções f_i são lipschitzianas em relação às variáveis y_k»; *c)* «seja δ o menor dos números a e $b/4M$ ···»; *d)* «seja $y_1^0, \cdots, y_m^0$ um sistema de *valores iniciais* tais que $|y_i^0 - \beta_i| \leq b/2$ ···» Aqui o aluno preguntará, certamente: «mas... valores iniciais de quê? E porquê $b/2$ e não b?

É verdade que, depois, na demonstração do teorema, cada uma destas condições irá encontrar a sua justificação na altura em que fôr introduzida. Mas existe o perigo de que um aluno menos atento não se aperceba de *como* e *onde* cada condição intervém na demonstração. E êle chegará, dêste modo, ao fim sem ter compreendido, o que, com certeza, irá aumentar o desinterêsse que porventura se tenha criado no seu espírito, em conseqüência de um ensino defeituoso anteriormente recebido (devemos confessar que é êste, infelizmente, o caso mais corrente). Ora é êste desinterêsse do aluno que o professor deve procurar evitar, pois êle significa o insucesso de tôda a sua actividade de mestre. Deve, para o conseguir, procurar imprimir ao seu ensino um certo calor, uma certa vida, de modo a tirar à Matemática aquêle aspecto frio e árido com que, em geral, ela aparece aos olhos do aluno.

Creio que êste objectivo poderá ser atingido desde que, em vez de fazer um uso quási exclusivo do *método dedutivo* na sua exposição, o professor adopte de vez em quando — e sempre a propósito de questões fundamentais — o *método genético,* aquêle que foi, de facto, o método seguido pela investigador na descoberta da proposição a demonstrar. Com isto, além de familiarizar o aluno com a «técnica» da investigação, conseguirá fazê-lo interessar-se pela sua exposição, dando-lhe a sensação de «colaborar» como o mestre num trabalho construtivo. Estou certo de que êste facto contribuïrá também para fazer aparecer ao aluno a actividade de um investigador sob um aspecto mais humano e portanto mais próxima de si, mais ao seu alcance.

Seguindo o *método genético,* ao apresentar ao aluno um teorema, dever-se-á começar por fazer-lhe um esbôço do problema que se pretende resolver sôbre um dado ente matemático, delineando-lhe a conclusão a que se pretende chegar (*tese do teorema,* cujo enunciado surgirá só no fim), impondo de início a êste ente matemático o menor número possível de condições restritivas (aquelas que se apresentarem mais naturalmente) e dizendo-lhe depois que o problema consistirá em determinar as restantes condições a que deverá satisfazer o referido ente para que se verifique a conclusão indicada. Estas condições a determinar irão depois constituir, juntamente com as condições postas de início, a *hipótese do teorema.*

Feita esta apresentação do problema, adopta-se o caminho que fôra seguido pelo investigador (ou outro que tenha sido ulteriormente proposto como preferível) e as condições procuradas irão depois surgindo naturalmente, na altura precisa em que se vir a necessidade de introduzi-las.

Concretizemos agora esta idéia, exemplificando com o teorema cujo enunciado transcrevi de início. Vejamos, pois, como êle poderia ser apresentado e demonstrado, de acôrdo com êste projecto.

3. É dado um sistema de equações diferenciais ordinárias sob a forma normal

(I) $$y_i' = f_i(x\,;y_1\,,\cdots,y_m) \qquad (i = 1\,,2\,,\cdots,m)$$

onde as funções f_i são definidas numa região R *fechada* do espaço S_{m+1} dos pontos $P(x\,;y_1\,,\cdots,y_m)$, definida pelas limitações

(II) $$|x-\alpha| \leq a \qquad |y_i - \beta_i| \leq b$$

onde a e b são duas constantes positivas.

Ponhamos às f_i sòmente a restrição de serem *unívocas* e *contínuas* em R. A continuïdade na região fechada R traz como conseqüência a limitação das f_i

em R, isto é, a existência de um número positivo M tal que, para todo o ponto $P \in R$, se tenha

$$\text{(III)} \qquad |f_i(x; y_1, \cdots, y_m)| \leq M \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

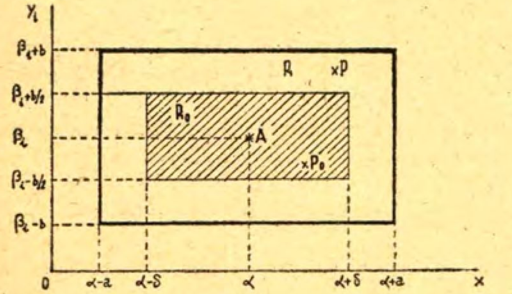
Propomo-nos resolver o seguinte problema:

«1.º — Determinar as restantes condições a que devem satisfazer as f_i para que exista um, e um só, sistema de m funções $y_i(x)$ $[i=1, 2, \cdots, m]$ definidas no intervalo $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ (ou num intervalo contido nêste) e tomando num dado ponto x_0 do mesmo um sistema de m valores prèestabelecidos y_i^0

$$\text{(IV)} \qquad y_i(x_0)=y_i^0 \text{ sujeitos às condições}$$

$$\text{(V)} \qquad |y_i^0-\beta_i| \leq b$$

isto é, de modo que o ponto $P_0(x_0; y_1^0, \cdots, y_m^0)$ pertença a R (vidé representação simbólica da figura, que convém seguir por uma questão de comodidade);



2.º — Encontrar o modo de determinar essas funções $y_i(x)$.»

É fácil provar que um sistema de m funções $y_i(x)$ que satisfaçam ao sistema (I) e às condições (IV), satisfaz também ao sistema de m equações integrais

$$\text{(VI)} \qquad y_i=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x; y_1, \cdots, y_m)\, dx \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

e recìprocamente.

Procuraremos, pois, resolver o problema para o sistema (VI).

Notemos, primeiro que, se as funções f_i não dependem das variáveis y_i, isto é, se o sistema (I) tem a forma

$$\text{(Ia)} \qquad y_i'=f_i(x)$$

o sistema (VI) toma a forma

$$\text{(VIa)} \qquad y_i(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

o que nos dá, neste caso, imediatamente os integrais de (I) por meio de quadraturas, sem mais condições a impôr às f_i.

Tal não é, porém, o caso geral, em que seguiremos o processo das aproximações sucessivas de Picard-Peano. Procuraremos definir cada uma das funções $y_i(x)$ como limite de uma sucessão convergente de funções

$$\text{(VII)} \qquad y_i^{(1)}(x), y_i^{(2)}(x), \cdots, y_i^{(r)}(x), y_i^{(r+1)}(x), \cdots$$

obtidas do seguinte modo:

As $y_i^{(1)}(x)$ são dadas pelos 2.^{os} membros de (VI) onde os m variáveis y_i são substituídas ou pelos m valores iniciais y_i^0 ou por m *funções conhecidas* $u_i(x)$ definidas e contínuas em $(\alpha-a, \alpha+a)$ e satisfazendo a

$$\text{(Va)} \qquad |u_i(x)-\beta_i| \leq b \quad \text{para} \quad |x-\alpha| \leq a$$

ou seja $P(x; u_1, \cdots, u_m) \in R$ pois que, sendo R a região em que são definidas as f_i, só assim terão sentido as expressões $f_i(x; u_1, \cdots, u_m)$. Teremos pois

$$\text{(VIII)} \qquad y_i^{(1)}(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x; u_1(x), \cdots u_m(x))\, dx$$

Depois, para $r=1, 2, \cdots$,

$$\text{(IX)} \qquad y_i^{(r+1)}(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x; y_1^{(r)}(x), \cdots, y_m^{(r)}(x))\, dx$$

o que exige que $P^{(r)}(x; y_1^{(r)}, \cdots, y_m^{(r)}) \in R$ ou seja que

$$\text{(X)} \qquad |y_i^{(r)}(x)-\beta_i| \leq b \quad \text{para} \quad |x-\alpha| \leq a \quad (r, i=1, 2, \cdots)$$

Determinemos, antes de prosseguir, as condições a impor aos dados do problema para que se verifiquem as (X).

Para $r=1$: De (VIII) conclui-se:

$$|y_i^{(1)}(x)-\beta_i| \leq |y_i^0-\beta_i| + \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x; u_1, \cdots, u_m)\, dx\right|$$

$$\leq |y_i^0-\beta_i| + M|x-x_0|$$

A condição $|y_i^{(1)}(x)-\beta_i| \leq b$ será pois satisfeita se se puzer

$$|y_i^0-\beta_i| + M|x-x_0| \leq b$$

e esta sê-lo-á pondo

$$|y_i^0-\beta_i| \leq b/2; \quad M|x-x_0| \leq b/2.$$

A 2.ª limitação verificar-se-á pondo

$$M|x-\alpha| \leq b/4 \quad \text{ou} \quad |x-\alpha| \leq b/4M$$

$$M|x_0-a| \leq b/4 \quad \text{ou} \quad |x_0-\alpha| \leq b/4M$$

pois que $M|x-x_0| \leq M(|x-\alpha|+|\alpha-x_0|)$.

Devem portanto verificar-se as condições

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} |y_i^0-\beta_i| \leq b/2 \\ |x_0-\alpha| \leq \delta \\ |x-\alpha| \leq \delta \end{cases}$$

chamando δ ao menor dos números a e $b/4M$, pois que x e x_0 devem satisfazer também a

$$|x-\alpha| \leq a\,; \quad |x_0-\alpha| \leq a\,.$$

Supondo agora que $P^{(r)} \in R$, isto é, que $|x-\alpha| \leq a$; $|y_i^{(r)}-\beta_i| \leq b$, um raciocínio análogo feito sôbre (IX) mostra que, *verificadas as* (XI), se tem $P^{(r+1)} \in R$.

Conclusão: as condições (XI) são suficientes para que o 2.º membro da igualdade (IX) tenha um sentido para *todos os valores naturais de* r, e esta igualdade permite assim *dar a sucessão* (VII).

O que nos dizem as condições (XI) agora encontradas? *a)* Que o ponto inicial (chamemos-lhe assim) $P_0(x_0\,; y_1^0, \cdots, y_m^0)$ deve ser tomado na região $R_0 \subset R$ (figura). *b)* Que as funções $y_i^{(r)}(x)$ vêm definidas no intervalo fechado $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ e não necessàriamente em $(\alpha-a, \alpha+a)$ quando $\delta < a$. E notemos que tais funções *são contínuas nêste intervalo,* atendendo ao modo como são obtidas.

Voltemos à sucessão (VII). Pretende-se que, *quando* $r \to \infty$, *para* x *variável em* $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$, *as funções* $y_i^{(r)}(x)$, *convirjam uniformemente*[2] *para respectivas funções limites* $y_i(x)$ *que satisfaçam ao sistema* (VI), *isto é, ao sistema* (I) *e condições* (IV).

Tal facto dar-se-á se a série

$$\text{(XII)} \quad u_i(x) + [y_i^{(1)}(x) - u_i(x)] + [y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)] + \\ + \cdots + [y_i^{(r+1)}(x) - y_i^{(r)}(x)] + \cdots$$

onde $S_0 = u_i(x)$, $S_n = y_i^{(n)}(x)$, *fôr absoluta e uniformemente convergente em* $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. A maneira mais cómoda de o conseguir será a de fazer com que os seus termos sejam inferiores em valor absoluto aos termos correspondentes de uma série numérica convergente, e isto qualquer que seja $x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. Portanto, como primeira condição, os seus termos têm de ser limitados, o que realmente se verifica, pois todos êles são funções contínuas de x no intervalo fechado $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. Em particular existirão m números positivos C_i tais que $|y_i^{(1)}(x) - u_i(x)| \leq C_i$ para $x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. Consideremos o 3.º termo da série: atendendo a (VIII) e (IX) poderemos escrever:

$$\text{(XIII)} \quad |y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| \leq \Big| \int_{x_0}^{x} [f_i(x\,; y_1^{(1)}(x), \cdots, y_m^{(1)}(x) - \\ - f_i(x\,; u_1(x), \cdots, u_m(x))]\, dx\,.$$

A diferença entre colchetes é evidentemente inferior a M em valor absoluto, pois que os pontos $Q(x\,; u_1, \cdots, u_m)$ e $P^{(1)}(x\,; y_1^{(1)}, \cdots, y_m^{(1)})$ pertencem a R, mas esta condição não nos basta para encontrar uma série numérica majorante de (XII) pois que, com ela, apenas chegaríamos a provar que, a partir do 3.º, todos os seus termos são inferiores em valor absoluto a $M|x-x_0|$ e portanto a $2M\delta$, o que nada adianta. Introduzamos então uma outra condição, um pouco menos simples. É evidente que a diferença $f_i(P^{(1)}) - f_i(Q)$ depende de cada um dos acréscimos $y_j^{(1)}(x) - u_i(x)$ relativos a cada variável. Pois bem: admitamos que as f_i satisfazem à condição de existirem m números positivos $L_1, \cdots, L_m$ tais que

$$|f_i(x\,; y_1, \cdots, y_r+h, \cdots, y_m) - f_i(x\,; y_1, \cdots, y_r, \cdots, y_m)| \leq hL_i \\ (r, i = 1, 2, \cdots, m)$$

que são as *condições de Lipschitz de 1.ª ordem* em relação às y_i. Verificam-se, pois, as condições (5), e pondo $C = \sum_1^m C_i$ teremos, de (XIII),

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{m} |y_i^{(1)}(x) - u_i(x)|\, dx \right| \leq CL|x-x_0|$$

Repetindo o raciocínio para alguns termos seguintes, consegue-se provar, por indução, que

$$|y_i^{(r+1)}(x) - y_i^{(r)}(x)| \leq \frac{C}{m} \cdot \frac{[mL|x-x_0|]^r}{r!} \leq \frac{C}{m} \cdot \frac{[2mL\delta]^r}{r!}$$

e que portanto a série dos valores absolutos dos termos da (XII), excluídos os dois primeiros, é minorante da série cujo termo geral é $\dfrac{C}{m} \dfrac{[2mL\delta]^r}{r!}$ que converge e tem por soma $\dfrac{C}{m}[e^{2mL\delta} - 1]$, como sabemos. Existem, pois, as funções limites

$$y_i(x) = \lim_{r \to \infty} y_i^{(r)}(x)$$

que são contínuas em $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. E a demonstração prossegue, mostrando-se depois que tais funções satisfazem ao sistema (VI) e que o sistema de soluções $y_1(x), \cdots, y_m(x)$ é único. Mas esta parte final não interessa já para o fim que eu tinha em vista, que era o de mostrar como, e em que altura, se deveriam fazer aparecer as condições a impôr às funções f_i, além das inicialmente postas da uniformidade e continuïdade em R. De facto, com a aparição das condições de Lipschitz, agora em último lugar, esgotou-se o conjunto das condições que procurávamos. O resto da demonstração faz-se sem ser necessário introduzir mais restrições às f_i.

Roma, Março de 1944.

---

[2] **A convergência uniforme é necessária para a continuïdade das funções limites $y_i(x)$.**