III — Figuras de equilibrio de una masa heterogénea en rotación: Condiciones generales de equilibrio hidrodinámico. Evolución de las figuras de equilibrio. La figura de la Tierra. Problemas de Clairaut y de Poincaré. Cálculos en segunda aproximación.

Curso sobre Teoria de grupos y Algebra lineal, por el prof. D. Juan Augé Farreras

Ideas generales sobre teoría de conjuntos. Potencia, número cardinal, ordenación.

Teoría de grupos. Subgrupos, divisores normales, clases adjuntas. Isomorfismo y homomorfismo. Grupo factor.

Estruturas algebraicas: Anillos, campos de integridad, hemicuerpos, cuerpos, espacios vectoriales, sistemas hipercomplejos. Homomorfismos e isomorfismos. Ideales, clases de restos. Campo de polinomios.

Grupos con operadores. Series normales y series de composición. Producto directo.

Algebra lineal. Módulo de formas lineales. Matrices. Módulo con relación a un hemicuerpo. Ecuaciones lineales. Módulos en anillos euclídeos Divisores elementales de Weierstrass. Teorema fundamental sobre grupos abelianos. Forma normal para una matriz en um cuerpo conmutativo. Formas cuadráticas y hermitianas. Teoría general de la representación de grupos.

Escuela especial de ingenieros industriales

Por D. Damián Aragonés Puig, Ingeniero Industrial y Profesor titular de dicha Escuela, fué desarrolado un curso de seis conferencias sobre los seguientes temas: 1. Funciones de variable compleja. — 2. Derivación. — 3. Integración. — 4. Integral de Cauchy.—5. Desarrollo en serie.—6. Representación conforme.

Ingreso del Prof. Dr. D. José M. Orts Aracil en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

A mediados del curso pasado, tuvo lugar el ingreso en dicha corporatión, del Académico electo Dr. D. José M.ª Orts y Aracil, Profesor de Análisis matemático en la Universidad de Barcelona y Miembro del Consejo Superior de Investigaciones Cientificas.

El trabajo del recipiendario versó sobre el tema: «Convergencia de variables aleatorias» que constituye uno de los capítulos centrales de la moderna teoría de dichas variables, no solo en el orden puramente especulativo, sino también por sus repercusiones en los problemas de la física actual.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

Licenciaturas em ciências fisico-quimicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo — I.ª prova — Julho de 1944 — Ponto n.º 4.

1926 — Determine m de modo que a equação $(2m-1)\,x^2+2\,(1-m)\,x+3m=0$ tenha a soma dos quadrados das raízes igual a 4. R: *Designemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação. Pelo enunciado do problema é* $x_1^2+x_2^2=4$. *Por outro lado é* $x_1+x_2=-2\,(1-m):(2m-1)$ *e* $x_1\,x_2=3m:(2m-1)$. *Da igualdade* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\,x_2$, *deduz-se, por substituïção, que,* $4\,(1-m)^2:(2m-1)^2-2\;\;3m:(2m-1)=4$ *ou seja* $12m^2-7m=0$, *equação cujas raízes,* $m_1=0$ *e* $m_2=7/12$, *são as soluções do problema.*

1927 — Indique o número de soluções inteiras e positivas de cada uma das equacões seguintes: 1.ª $2x-4y=7$; 2.ª, $2x-4y=6$. Justifique a resposta. R: *A primeira não tem soluções inteiras por os coeficientes das incógnitas admitirem um divisor comum que não divide o termo independente. A segunda tem uma infinidade de soluções inteiras e positivas porque, admitindo soluções inteiras, os coeficientes das incógnitas são de sinais contrários.*

1928 — Determine dois números ímpares consecutivos tais que a diferença dos seus quadrados seja 8.000. R: *Sejam* $2x-1$ *e* $2x+1$ *os dois inteiros ímpares consecutivos. Será, pelo enunciado,* $(2x+1)^2-(2x-1)^2=8000$ *ou* $8x=8000$ *e* $x=1000$, *e os inteiros são* 1999 *e* 2001.

1929 — Verifique a identidade $\operatorname{tg} a=\dfrac{\operatorname{tg} 2a}{1+\sec 2a}$

R: $\operatorname{tg} 2a:(1+\sec 2a)=(\operatorname{sen} 2a/\cos 2a):(1+1/\cos 2a)=\operatorname{sen} 2a:(1+\cos 2a)=2\operatorname{sen} a\cos a:(1+\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a)=2\operatorname{sen} a\cos a:2\cos^2 a=\operatorname{tg} a$.

1930 — Numa circunferência cujo diâmetro mede 35,43 m está traçada uma corda cujo comprimento é 13,25 m. Calcule, por logarítmos, o ângulo que a corda faz com a semi-recta tirada de um dos seus extremos para o centro. R: *Como se sabe, se fôr* 1 *a corda,* R *o raio do circulo e* $\alpha/2$ *a medida de metade do arco que* *subtende a corda, é* $l=2R \operatorname{sen} \alpha/2$, *e como o ângulo pedido,* β, *é complementar da metade do ângulo ao centro correspondente ao arco* α, *será* $l=2R\cos\beta$. *No nosso caso teremos* $\log\cos\beta=\log l+\operatorname{colog} 2R=\log 13{,}25+$ $+\operatorname{colog} 3{,}43=1{,}12222+\bar{2}{,}45063=\bar{1}{,}57285$ *e portanto,* $\beta=68^{\circ}\,2'\,20''$.

1931 — Notando que $75=30+45$, calcule, sem recorrer às tábuas de logarítmos, os valores de $\operatorname{sen} 75^{\circ}$ e de $\cos 75^{\circ}$. R: *Como* $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ *e* $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, *e como* $\operatorname{sen} 45^{\circ}=$ $=\cos 45^{\circ}=\sqrt{2}/2$ *e* $\operatorname{sen} 30^{\circ}=1/2$ *e* $\cos 30^{\circ}=\sqrt{3}/2$, *será* $\operatorname{sen} 75^{\circ}=\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2+\sqrt{2}/2\cdot 1/2=\sqrt{2}/4(\sqrt{3}+1)$ *e* $\cos 75^{\circ}=\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2-\sqrt{2}/2\cdot 1/2=\sqrt{2}/4(\sqrt{3}-1)$

1932 — Figure um quadrilatero convexo e as bissectrizes dos seus ângulos. Os pontos comuns às bissectrises dos ângulos consecutivos são os vértices de um novo quadrilátero. Demonstre que os ângulos opostos dêste segundo quadrilátero são suplementares. R: *Para que, como se diz no enunciado, se forme um novo quadrilátero, é necessário que o primitivo quadrilátero convexo não seja nem um quadradro nem um losango. Consideremos então o quadrilátero* [ABCD] *convexo nestas condições e seja* [A′ B′ C′ D′] *o novo quadrilátero. Consideremos o ângulo interno em* A′ *dêste último e o ângulo interno em* C′; *e sejam* α, β, γ *e* δ *os ângulos internos do quadrilátero* [ABCD]. *Do triângulo* [ABA′] *tira-se* $\hat{A}'=180^{\circ}-(\alpha+\beta):2$ *e do triângulo* [C′ DC], $\hat{C}'=180^{\circ}-(\gamma+\delta):2$ *e destas duas igualdades se conclue que* $\hat{A}+\hat{C}=360^{\circ}-(\alpha+\beta+\gamma+\delta):2$; *ora sendo* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^{\circ}$ *vem* $\hat{A}'+\hat{C}'=180^{\circ}$, c. q. d. *De modo análogo se demonstra que* $\hat{D}'+\hat{B}'=180^{\circ}$.

1933 — Determine o lugar geométrico dos meios das cordas que passam por um ponto A de uma circunferência de centro C. R: *Veja* Gazeta de Matetica, *n.º 2, pág. 5, problema n.º 130.*

Soluções dos n.ºs 1926 a 1933 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia — 1.ª prova escrita — 4 de Agosto de 1944 — Ponto n.º *2.*

1934 — Determine os números inteiros, de módulo superior a 4, tais que o seu quadrado seja menor que a diferença entre 21 e o seu quádruplo. R: *Os números a determinar têm de satisfazer, simultâneamente, às condições:* $|x|>4$ *e* $x^2<21-4x$. *A 2.ª inequação* $x^2+4x-21<0$ *ou* $(x-3)(x+7)<0$ *é satisfeita para* $-7<x<3$. *Atendendo a* $|x|>4$ *conclue-se que os únicos números inteiros que convêm são* -5 *e* -6.

1935 — Determine os valores de m e n para os quais a equação $6x^4-7x^3+mx^2+14x+n=0$ admita as raizes $x_1=-3$ e $x_2=2/3$. R: m *e* n *são solução do sistema de equações* $9m+n=-633$ *e* $4m+9n=-76$, *resultado da substituição na equação dada de* x *por* x_1, *e* x_2, *respectivamente. Resolvendo obtém-se* $m=-73$ *e* $n=24$.

1936 — Considere dois planos paralelos que determinam sôbre a superfície de uma esfera circunferências iguais com 8,5118 metros de diâmetro. Um diâmetro da esfera com os extremos situados sôbre os planos secantes faz com êstes um ângulo $\alpha=38^{\circ}\,27',8$. Determine a distância d entre os dois planos secantes. R: *Considerando uma secção meridiana deduz-se* $d=8{,}5118\cdot\operatorname{tg} 38^{\circ}\,27'\,48''$, *donde* $\log d=0{,}93002+$ $+\bar{1}{,}90004=0{,}83006$ *ou* $d=6{,}7617$ m.

1937 — Calcule $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ sendo $\operatorname{sen} x=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

R: *Tem-se* $\dfrac{2\operatorname{tg} x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ *donde* $ab\operatorname{tg}^2 x/2-$ $-(a^2+b^2)\operatorname{tg} x/2+ab=0$ *ou, supondo* $ab\neq 0$, $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1=0$, *equação cujas raízes são* a/b *e* b/a.

Observ. — Note-se que a função dada pode escrever-se, dividindo ambos os têrmos por a^2 ou b^2, sob as formas $\dfrac{2\,b/a}{1+(b/a)^2}$ *e* $\dfrac{2\,a/b}{1+(a/b)^2}$ e o resultado é então imediato.

1938 — Demonstre que o volume V de um cone circunscrito a uma esfera é igual ao produto da área total A do cone multiplicada pelo têrço do raio r da esfera. R: *Tem-se* $V=\pi R^2 H/3$ *e* $A=\pi R(G+R)=$ $=\pi R(\sqrt{H^2+R^2}+R)$ *designado por* H, G *e* R *as medidas da altura, geratriz e raio da base do cone. Duma secção meridiana deduz-se fàcilmente:*

$$\frac{r}{R}=\frac{H-r}{\sqrt{H^2+R^2}}=\frac{H}{R+\sqrt{H^2+R^2}}\quad ou\quad R+\sqrt{H^2+R^2}=\frac{HR}{r}.$$

Vem pois $A=\pi R^2 H/r$ *e* $V=\dfrac{\pi R^2 H}{r}\cdot\dfrac{r}{3}=A\cdot r/3$, c.q.p.

1939 — Demonstre que em todo o triângulo o ângulo compreendido entre uma altura e uma bissectriz interior tiradas de um mesmo vértice é igual à semi-diferença dos ângulos do triângulo relativos aos outros dois vértices. R: *Seja* [ABC] *o triângulo,* α *o ângulo formado pela bissectriz e altura relativas ao vértice* A, *por exemplo, e* E *o ponto de encontro da bissectriz com o lado* BC. *Dos triângulos* [ABE] *e* [AEC] *deduz-se:* $A/2+B+90^{\circ}+\alpha=180^{\circ}$ *e* $A/2+C+90^{\circ}-\alpha=180^{\circ}$ *donde* $C-B=2\alpha$, c. q. p.

Soluções dos n.ºs 1934 a 1939 de Manuel Zaluar.