MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º Exame de freqüência — 25 de Fevereiro de 1944.**

1940 — Seja S um sistema de n equações a n incógnitas, em cuja solução (única) x_1 é diferente de zero. Troquem-se ordenadamente os coeficientes de x_1 com os têrmos conhecidos. Que relações ligam a solução de S à de S'? R: *Seja*

$a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \cdots + a_i^h x_h + \cdots + a_i^n x_n = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

o sistema S *e*

$b_i x_1 + a_i^2 x_2 + \cdots + a_i^h x_h + \cdots + a_i^n x_n = a_i^1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

o sistema S'. *A solução de* S *é*

$$x_h = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots a_1^{h-1}\, b_1\, a_1^{h+1} \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots a_n^{h-1}\, b_n\, a_n^{h+1} \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_h}{\Delta} \quad (h=1,2,\cdots,n)$$

com $\Delta = |a_i^k|$. *Para o sistema* S' *temos*

$$x_1' = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots a_1^h \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots a_n^h \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1\, a_1^2 \cdots a_1^h \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n\, a_n^2 \cdots a_n^h \cdots a_n^n \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{1}{x_1}; \quad e,\ em\ geral$$

(*para* $h=2,3,\cdots n$)

$$x_h' = \frac{\begin{vmatrix} b_1\, a_1^2 \cdots a_1^{h-1}\, a_1^1\, a_1^{h+1} \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n\, a_n^2 \cdots a_n^{h-1}\, a_n^1\, a_n^{h+1} \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\Delta_1} =$$

$$= \frac{(-1)^{2h-3}\begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots a_1^{h-1}\, b_1\, a_1^{h+1} \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots a_n^{h-1}\, b_n\, a_n^{h+1} \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= -\frac{\Delta_h}{\Delta_1} = -\frac{\Delta_h}{\Delta}\cdot\frac{\Delta}{\Delta_1} = -x_h \cdot \frac{1}{x_1}.$$

As soluções de S' *e* S *estão pois ligadas pelas relações* $x_1' = 1/x_1$; $x_h' = -x_h/x_1$ $(h \neq 1)$.

1941 — Determinar os números característicos da quádrica $u^2+3v^2-2x^2-2uv-2ux+2uy+2vx+2vy+4xy$. R: *Por ser nulo o seu discriminante, a quádrica é degenerescente. Tomando* $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$ *para determinante principal, os seus números característicos serão os da quádrica em que ela se converte pelo anulamento da variável não principal* y. *A cadeia de menores principais (completada com a* u n i d a d e*)*: $\Delta_3 = -6$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $\Delta_1 = 1$; 1 *apresenta uma única variação de sinal e os números característicos serão* $q=1$, $p=2$, *isto é, a quádrica resolve-se numa soma de dois quadrados positivos e um negativo.*

1942 — Achar o ângulo do plano dos pontos $P(1,2,3)$, $Q(3,2,1)$ e $R(2,1,3)$ com a recta que passa pela origem e pelo meio do segmento PQ. R: *A equação do plano é* $x+y+z=6$ *e as da recta são* $x=y=z$ [*pois é definida pelos pontos* $(0,0,0)$ *e* $(2,2,2)$]. *o que mostra ser* 90° *o ângulo da recta com o plano (eixos coordenados rectangulares).*

1943 — Supondo A irracional, por que motivo $A\cdot\frac{1}{A}=1$? R: *Porque* $A\cdot\frac{1}{A}$ *é fecho comum de duas secções, uma de números* $a_1\cdot\frac{1}{a_2}$ *inferiores a* 1, *outra de números* $a_2\cdot\frac{1}{a_1}$ *superiores a* 1.

1944 — Por que construção geométrica se transforma a figura F dos pontos z na figura F' dos pontos $z'=\frac{1}{z-a}$? R: *Obtida a figura dos pontos* $z''=z-a$ *por uma translação paralela ao eixo dos* xx, *passa-se dum ponto* z'' *para o homólogo* z' *marcando sôbre um raio vector* OZ', *simétrico de* OZ'' *em relação a* OX, *um comprimento inverso de* $\overline{OZ''}$.

1945 — Desenvolver a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{bmatrix}.$$

R: $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\ x + b\ y + c\ z \\ a'\ x + b'\ y + c'\ z \\ a''\ x + b''\ y + c''\ z \end{bmatrix}$$

e portanto $$\begin{aligned} a\ x + b\ y + c\ z &= d \\ a'\ x + b'\ y + c'\ z &= d' \\ a''\ x + b''\ y + c''\ z &= d'' \end{aligned}.$$

1946 — Como se há-de formar o quadrado de um determinante para que fique com a matriz simétrica? Justifique a resposta. R: *Deve fazer-se a multiplicação por filas do mesmo nome. Com efeito,*

$$c_{hk}=\sum_{i=1}^{n} a_h^i a_k^i=\sum_{i=1}^{n} a_k^i a_h^i=c_{kh} \quad \textit{(por linhas)};$$

$$e \quad c_{hk}=\sum_{i=1}^{n} a_i^h a_i^k=\sum_{i=1}^{n} a_i^k a_i^h=c_{kh} \quad \textit{(por colunas)}.$$

1947 — Defina determinante hemi-simétrico e enuncie algumas das suas propriedades. R: *Um determinante diz-se hemi-simétrico quando* $a_i^k=-a_k^i$, $a_i^i=0$.

1948 Que relações ligam os complementos algébricos de duas filas paralelas em determinante nulo? e qual a origem de tais relações? R: *São proporcionais, como resulta da igualdade*

$$\begin{vmatrix} A_i^1 & A_i^2 \\ A_j^1 & A_j^2 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} A_i^1 & A_i^3 \\ A_j^1 & A_j^3 \end{vmatrix}=0;\cdots;\ \begin{vmatrix} A_i^1 & A_i^n \\ A_j^1 & A_j^n \end{vmatrix}=0$$

cujos primeiros membros são menores de 2.ª ordem do adjunto de Δ *(suposto nulo).*

1949 — Que são quádricas equivalentes? e por que têm igual característica? R: *São aquelas que se convertem uma na outra por uma transformação linear. Têm igual característica porque, se fôr* Δ_μ *o determinante principal duma, terá de haver no discriminante da outra um menor não nulo de ordem* μ *e atendendo a que os papéis das duas são permutáveis.*

1950 — Que é equação normal de uma recta? e que significam os coeficientes de tal equação? R: *É a equação* $x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=p$, *onde* p *é o comprimento e* α *o ângulo com* OX *do segmento da perpendicular baixada da origem para a recta.*

1951 — É a recta $x/A=y/B=z/C$ sempre ortogonal ao plano $Ax+By+Cz+D=0$? R: *Só em eixos rectângulares.*

1952 — Escrever a equação do plano definido pelo ponto $M(1,1,1)$ e pela recta $r\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.
R: $x-2y+z=0$.

Soluções dos n.os 1940 a 1952 de F. Roldão Dias Agudo (aluno do 2. ano da F. C. L.)

I. S. C. E. F. — I.ª cadeira — I.º Exame de freqüência ordinário, Prova prática, 3-2-944.

1953 — Dados $X=a+bi$ e $\overline{X}=a-bi$, calcular:

$$X^n+\overline{X}^n,\quad X^n\cdot\overline{X}^n,\quad \frac{X^n}{\overline{X}^n}+\frac{\overline{X}^n}{X^n},\quad X^n-\overline{X}^n \quad e \quad \frac{X^n+\overline{X}^n}{X^n-\overline{X}^n}$$

(n inteiro e positivo)

e mostrar que as três primeiras expressões são reais e as duas últimas imaginários puros. R: *Seja* $X^n=A+Bi$ e $\overline{X}^n=A-Bi$ *onde, como se sabe:*

$$A=a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4-\cdots$$

e

$$B=\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$$

então:

$$X^n+\overline{X}^n=A+Bi+A-Bi=2A$$

$$X^n\cdot\overline{X}^n=(A+Bi)(A-Bi)=A^2+B^2$$

$$\frac{X^n}{\overline{X}^n}+\frac{\overline{X}^n}{X^n}=\frac{A+Bi}{A-Bi}+\frac{A-Bi}{A+Bi}=\frac{2(A^2-B^2)}{A^2+B^2}$$

$$X^n-\overline{X}^n=A+Bi-(A-Bi)=2Bi$$

$$\frac{X^n+\overline{X}_n}{X^n-\overline{X}^n}=\frac{2A}{2Bi}=-\frac{A}{B}i.$$

1954 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} iz+(1+i)\,\omega=3+i & z=x+iy \\ (1+i)\,\overline{z}-(6+i)\,\overline{\omega}=4 & \omega=u+iv \end{cases}.$$

R: *Substituindo e simplificando:*

$$\begin{cases} -y+u-v+i\,(x+u+v)=3+i \\ x+y-6u-v+i\,(x-y-u+6v)=4 \end{cases}$$

que, por definição de igualdade para números complexos, se desdobra em:

$$\begin{cases} -y+u-v=3 \\ x+u+v=1 \\ x+y-6u-v=4 \\ x-y-u+6v=0 \end{cases}$$

que resolvido, fornece:

$$z=\frac{37}{15}-\frac{13}{15}i \quad e \quad \omega=-\frac{8}{15}-\frac{14}{15}i.$$

1955 — Estudar o sistema:

$$\begin{cases} u=x+y\operatorname{sen}\alpha+z\operatorname{sen}\beta \\ v=x\operatorname{sen}\alpha+y+z\operatorname{sen}\gamma \\ w=x\operatorname{sen}\beta+y\operatorname{sen}\gamma+z \end{cases}$$

onde α, β e γ são os ângulos interiores dum triângulo rectângulo. Podem exprimir-se x, y e z em funções lineares de u, v e w? Justificar a resposta. R: *Pode tomar-se* $\alpha=\pi/2$ *e* $\gamma=\pi/2-\beta$, *donde,* $\operatorname{sen}\alpha=1$ *e* $\operatorname{sen}\gamma=\cos\beta$ *e então o sistema pode escrever-se*

$$\begin{cases} x+y+z\operatorname{sen}\beta-u=0 \\ x+y+z\cos\beta-v=0 \\ x\operatorname{sen}\beta+y\cos\beta+z-w=0 \end{cases}$$

cuja matriz é:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \operatorname{sen}\beta & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cos\beta & 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

onde o determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

mostra que o sistema é triplamente indeterminado.

x, y *e* z *podem exprimir-se linearmente em* u, v *e* w *se fôr diferente de zero o determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \operatorname{sen}\beta \\ 1 & 1 & \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$$

o que se verifica se $\beta \neq \pi/4$, *isto é, se o triângulo não fôr isósceles.*

Soluções dos n.os 1953 a 1955 de J. Rémy T. Freire.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 1.º Exame de freqüência ordinário. Prova teórica, 4-2-944.

1956 — A operação de divisão; seu estudo através dos vários campos numéricos; suas relações com o conceito de campo. ¿É o conjunto

$$\cdots 1/2^n, \cdots, 1/2, 0, 1, 2, \cdots, 2^n, \cdots$$

um campo? ¿É um domínio inteiro? Justifique as respostas.

1957 — Conceito de monotonicidade; sua importância na teoria dos números reais e na das funções.

1958 — A função $y=\operatorname{sen} 1/x$ é invertível no intervalo $(-\pi/4, \pi\,4)$? e no intervalo $(\pi/4, \pi/2)$? Justifique as respostas.

1959 Seja no plano Oxy uma circunferência de centro na origem e raio 1 e o conjunto (E) dos números complexos $r+is$ com r e s racionais e tais que os seus afixos estão dentro dessa circunferência. Determinar os pontos de acumulação do conjunto (E).

I. S. C. E. F. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.ª Prova extraordinária, 15-2-944** — Exame prático.

1960 — Provar, a partir da fórmula de Moivre generalizada, que o produto das n determinações de $\sqrt[n]{\alpha}$ (α real ou complexo) é igual a $-\alpha$ ou a $+\alpha$ conforme n é par ou ímpar. R: *Seja* $\alpha=\rho(\cos\Theta+i\operatorname{sen}\Theta)$. *Portanto:*

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\Theta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\Theta+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0,1,\cdots,n-1).$$

O produto P *das* n *determinações é:* $P=\rho(\cos\beta+i\operatorname{sen}\beta)$ *com* $\beta=\sum_{k=0}^{n-1}(\Theta+2k\pi)/n=\Theta+(n-1)\pi$. *Atendendo a que* $\cos[\Theta+(n-1)\pi]=(-1)^{n-1}\cos\Theta$ *e* $\operatorname{sen}[\Theta+(n-1)\pi]=(-1)^{n-1}\operatorname{sen}\Theta$, *tem-se:* $P=(-1)^{n-1}\cdot\alpha$, *como se pretendia.*

1961 — Determinar o complexo $z=x+iy$ de modo tal que $\dfrac{1+iz}{1+i\bar z}=1+i$. R: *Efectuando as operações indicadas tem-se:* $x-2y-i(1+y)=0$ *ou* $x-2y=0$ *e* $1+y=0$, *donde* $x=-2$ *e* $y=-1$ *e, portanto,* $z=-2-i$.

1962 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y+4z+u=2 \\ -x+3z+2u=2 \\ 5x-2y-2z-3u=-2 \\ -4x+2y-z+u=0. \end{cases}$$

¿Qual é o número máximo de valores nulos que pode aparecer numa solução? Justifique a resposta.

R: *A 2.ª equação obtem-se somando ordenadamente a 1.ª com a 4.ª, e a 3.ª obtem-se multiplicando a 1.ª equação por* -1, *a 4.ª por* -2 *e somando. O sistema proposto é pois equivalente a* $\begin{matrix} 3x-2y+4z+u=2 \\ -4x+2y-z+u=0 \end{matrix}$ *em que* $\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ *que resolvido dará:* $\begin{cases} x=2u+3z-2 \\ y=(13z+7u-8)/2. \end{cases}$ *Não se trata dum sistema homogéneo o que exclui a possibilidade de figurarem 4 valores nulos numa solução. Como o sistema é duplamente indeterminado e atendendo a que nem* x *nem* y *estão expressos em funções lineares e homogéneas de* u *e* z, *só poderão aparecer dois valores nulos.*

Soluções dos n.os 1960 a 1962 de Orlando Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — CÁLCULO — **1.º Exame de frequência — 1943-44** — Ponto n.º 1.

I

1963 — Calcular $I=\int x\cos^2 x\,dx$.

R: $I=\int x(\cos 2x+1)/2\cdot dx=x/4\cdot\operatorname{sen}2x+1/8\cdot\cos 2x+x^2/4+C$.

1964 — Dada a equação $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0$ mudar as variáveis independentes sendo $u=(y-e^x)/2$, $v=e^x$. R: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+e^{2x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$.

1965 — Determinar os máximos e mínimos de z definida pela equação $2z^4+(y-1)^2+2(x-1)^2-2=0$. R:

Temos $x=1$, $y=1$, $z=\pm 1$ *e* $r=\mp 1/2$, $s=0$, $t=\mp 1/4$. *Para* $(1,1,1)$ *vem* $s^2-rt<0$ *e* $t<0$ — *máximo e para* $(1,1,-1)$ *vem* $s^2-rt<0$ *e* $t>0$ — *mínimo.*

II

1966 — Calcular $\int_2^{\infty} \frac{dx}{4x^2-5}$. R: $\frac{1}{4\sqrt{5}} \log \frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}$.

1967 — Determinar o verdadeiro valor de $y=x^3 \log x$ para $x=0$. R: $\lim_{x=0} y=0$.

1968 — Calcular $I=\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

R: $I=1/2 . \operatorname{arc\,sen} a^2$.

Nota — O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios, um dos quais do grupo I.

F. C. P. — CÁLCULO — **1.º Exame de frequência — 1943-44** — Ponto n.º 2.

I

1969 — Calcular $I=\int \frac{4x^3+2x^2-x+1}{x(2x^2+1)(2x-1)}\,dx$.

R: $\frac{4x^3+2x^2-x+1}{x(2x^2+1)(2x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2x+1}{2x^2+1}+\frac{2}{2x-1}$

$I=-\log x+\frac{1}{2}\log(2x^2+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}x+$

$+\log(2x-1)+C=\log\frac{(2x-1)\sqrt{2x^2+1}}{x}+$

$+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}x+C$.

1970 — Dada a equação $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-4=0$, mudar de variáveis, sendo $y=2z+3t$ e $x=e^t$, em que t é a nova variável dependente.

R: $\frac{dy}{dx}=e^{-t}\left(2\frac{dz}{dt}+3\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(2\frac{d^2z}{dt^2}-2\frac{dz}{dt}-3\right)$.

Substituindo vem: $\frac{d^2z}{dt^2}-2=0$.

1971 — Determinar os máximos e mínimos de y dado pela equação $y^3+3y^2-(x-2)^2(x+1)=0$.

R: $\begin{cases} y^3+3y^2-(x-2)^2(x+1)=0 \\ -2(x-2)(x+1)-(x-2)^2=0, \end{cases}$ *donde* $x=2, y=0$; $x=2, y=-3$; *e* $x=0, y=1$.

Derivando duas vezes a equação dada:

$-2(x+1)-4(x-2)+(6y+6)y'^2+(3y^2+6y)y''=0$.

Em $(2,0)$ *tem-se* $-6+6y'^2=0$ $y'=\pm 1$ *ponto duplo*

$(2,-3)$ $-6+9y''=0$ $y''>0$ *mínimo*

$(0,1)$ $6+9y''=0$ $y''<0$ *máximo*

II

1972 — Calcular $\int_0^{\sqrt{7/3}} \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$. R: $I=\pi\sqrt{3}/6$.

1973 — Determinar o verdadeiro valor de $y=\sqrt{4x^2+3x+1}-2x$ para $x=\infty$. R: $\lim_{x=\infty} y=3/4$.

1974 — Calcular $I=\int_{\pi/4}^{0} \operatorname{cotg}^2 x\,dx$.

R: $I=1-a+\pi/4-\operatorname{cotg} a$.

Nota — O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios, um dos quais do grupo I.

Soluções dos n.os 1965 a 1974 de J. Rios de Souza.

I. S. C. E. F. — 2.ª cadeira — 1.º Exame de freqüência — Fevereiro, 1944.

1975 — Mostrar que o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n+k}\right)e^{\frac{x}{n}}\right]$$

é absolutamente convergente, qualquer que seja x. [k é uma contante que não é um número inteiro negativo]. R: *O têrmo geral da série a estudar é:*

$$u_n=\left[\left(1-\frac{x}{n+k}\right)\ e^{\frac{x}{n}}-1\right]=\frac{2k\,x-x^2}{2n(n+k)}+T$$

em que T *representa os têrmos da ordem de* $\frac{1}{n^3}$. *(Desenvolveu-se em série* $e^{\frac{x}{n}}$ *e efectuaram-se as operações). Por comparação, com a série de Derichlet,* $v_n=\frac{1}{n^2}$, *conclui-se que* (u_n) *converge absolutamente, qualquer qu seja* x, *o mesmo sucedendo ao produto infinito.*

1976 — Calcular o integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x^n)\,(2x^n-1)^{\frac{1}{2n}}}\ (n \text{ inteiro}).$$

R: *Fazendo* $x^n=t$ *virá:*

$$I=\frac{1}{n}\int\frac{t^{\frac{1-n}{n}-\frac{1}{2n}}}{(1-t)(2t-1)^{\frac{1}{2n}}}\,dt=\frac{1}{n}\int\left(\frac{t}{2t-1}\right)^{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{dt}{t(1-t)}$$

Fazendo agora: $\frac{t}{2t-1}=z^{2n}$ *ter-se-à* $I=2\int\frac{dz}{1-z^{2n}}$ *que é um integral duma função racional.*

1977 — Estudar a convergência do integral impróprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1-2 \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)^{1-a}}.$$

R: *Fazendo* $\operatorname{sen} x = u$, *tem-se*: $I = \int \frac{du}{(1-2u)\, u^{1-a}}$, *integral impróprio de Cauchy nos pontos* $u=0$ (*com* $a<1$) *e* $u=1/2$. *Por ser*:

$$\lim_{u \to 1/2} (u-1/2)^k \cdot \frac{1}{(1-2u)\, u^{1-a}} = \frac{-1}{2^a} \neq 0 \quad com \quad k=1,$$

o integral diverge.

Soluções dos n.os 1975 a 1977 de O. Morbey Rodrigues.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

43 — KENDALL, M. G. — **The Advanced Theory Of Statistics** — vol. I, pp. XII + 457 — Charles Griffin and Co., London, 1943. 42 s.

Será um verdadeiro prazer para qualquer estatístico matemático possuir um volume tão bem acabado como êste. Deve realmente felicitar-se o Sr. Kendall pela energia e firme preseverança necessárias à realização da sua pesada tarefa e insuflar-lhe ainda a inflexível energia que será necessária para escrever o segundo volume. Até à altura em que levou a cabo o seu trabalho, fêz certamente qualquer coisa para manter o crédito da Inglaterra no campo do ensino da matemática.

No prefácio o autor explica que a intenção original era escrever o livro em cooperação com outros quatro distintos estatísticos. Felicitemo-nos entretanto pelo afortunado facto de que a intervenção da guerra o obrigou a realizar o trabalho segundo o seu próprio plano e sem a ajuda e complicações resultantes de tal colaboração.

Nas muitas ocasiões em que tenho sido consultado sôbre a possibilidade e conveniência de publicar um trabalho em grande escala sôbre estatística matemática tenho frizado a circunstância desalentadora de que os progressos das recentes décadas têm sido tão revolucionários, não sòmente em relação aos métodos, mas também em relação aos pontos de vista sob os quais são encarados os problemas estatísticos, que qualquer exposição, contendo material esperado e aceitado pelos orientadores de uma geração anterior, corre o risco de em breve ser considerada obsoleta e sem finalidade. O Sr. Kendall rodeia esta dificuldade habilidosamente sem todavia a resolver completamente. Assim à primeira vista presta pelo menos respeito formal à velha convenção de expôr os métodos estatísticos subordinando-os aos títulos: medidas de posição, medidas de dispersão e finalmente, coroando o arco, medidas de correlação. Os últimos quatro dos dezasseis capítulos dêste volume são destinados a vários coeficientes de correlação, não totalmente, é verdade, no velho estilo porque os assuntos são tratados como uma competência matemática, baseada numa larga familiariedade com a literatura, muito para além de tudo prèviamente tentado, mas, é-se tentado a dizer, também para além do interêsse intrínseco ou utilidade prática dos métodos discutidos. Porque razão desejaria hoje qualquer pessoa calcular uma correlação ordenada ou um coeficiente de contingência?

O leitor moderno, por outro lado, gostaria de ver o Capítulo 10 sôbre as distribuïções exactas em amostras casuais mais completamente desenvolvido e uma exposição mais extensa e variada dos usos da distribuïção de χ^2, do que a dada no Capítulo 12. Em ambos os capítulos, cujos assuntos são da maior importância para o leitor especializado em estatística, o estudo é dificultado por uma introdução algébrica de complexidade completamente desnecessária. O tratamento negligente do χ^2 sugere que o Sr. Kendall não é imune à fraqueza dos autores sobrecarregados de trabalho, de desprezar as partes da matéria em que não estão particularmente interessados.

A mesma atitude perfunctória emerge a páginas 59 numa curta secção destinada ao cálculo dos momentos factoriais por adição sucessiva. O autor diz: «O uso do método na prática reside no facto de que para certas máquinas de calcular a adição progressiva é mais fácil de efectuar do que os processos envolvidos no método do Exemplo 3.1».

Entre estatísticos perfeitamente equipados com a maquinaria necessária, isto pode ser um tanto verdadeiro, embora seja com certeza depreciativo para um método qne substitui um grande número de multiplicações por igual número de adições. O trabalho poupado é evidentemente muito importante quando não se dispõe de máquina alguma, condição em que, mesmo o mais bem equipado de entre nós, é ocasionalmente obrigado a trabalhar. O método de abreviar ainda mais o processo somando a partir das extremidades para uma origem escolhida não é dado de modo que o leitor, a menos que possua informação independente, não está em posição de julgar da valia real do método.