ANO V - N.º 22 GAZETA DE MATEMATICA MARÇO 1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

NÚMERO EXTRAORDINÁRIO DEDICADO ÀS MATEMÁTICAS ELEMENTARES
Organizado por: *Bento Caraça, José da Silva Paulo, Manuel Zaluar* e *R. Quaresma Rosa*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

O NÚMERO π [1]

por **Bento Caraça**

1.º — Generalidades e história

O número π é, como todos sabem, definido como o *cociente do comprimento duma circunferência rectificada pelo seu diâmetro.*

Esta definição fundamenta-se no facto, a que todos os livros de geometria elementar fazem referência, de que *os comprimentos de duas circunferências quaisquer estão entre si como os seus diâmetros,* donde imediatamente resulta que *é constante o cociente do comprimento de qualquer circunferência pelo respectivo diâmetro.*

É essa constante que se representa pelo símbolo π e tem-se portanto, sendo C o comprimento da circunferência rectificada e r o seu raio

$$\pi=\frac{C}{2r}. \tag{1}$$

Sabe-se ainda, pelo menos desde *Arquimedes,* que a *área dum círculo é igual à de um triângulo rectângulo que tenha por base a circunferência respectiva rectificada e por altura o raio,* de modo que para essa área A se tem

$$A=\pi r^2. \tag{2}$$

Desde a mais alta antiguidade se têm procurado determinações de π. Foram, muito provàvelmente, problemas de cálculo de áreas que deram origem às primeiras determinações de π. Mas, desde que se acendeu o interesse à volta dêste número, iniciou-se um longo período de penosos esforços (que só vêm a terminar no final do século XIX) para, não só o determinar com a maior exactidão possível, como ainda prescrutar a sua natureza teórica e resolver os problemas que com ela andam ligados.

Vamos passar em rápida revista o desenrolar dêsses esforços que arrumaremos em três períodos: até *Arquimedes,* de *Arquimedes* a *Viète,* de *Viète* à actualidade.

1.º Período. — Até Arquimedes. — Período empírico.

São do Médio Oriente as mais antigas determinações aproximadas que se conhecem de π.

Em *Babilónia,* como entre os *hebreus,* tomava-se, simplesmente, $\pi=3$. É êste, com efeito, o valor que se deduz de uma passagem da Bíblia relativa à construção do templo de Salomão. Mas já antes, entre os *egípcios,* era conhecido um valor mais exacto. No célebre *Papiro de Rhind,* pertencente à colecção Rhind do *British Museum,* redigido certamente antes de 1.700 A. C., portanto há aproximadamente 4.000 anos, o sacerdote *Ahmes* dá a seguinte regra para determinar a área de um campo circular: «dividir o diâmetro em nove partes iguais, tirar-lhe uma dessas partes e quadrar». Obtém-se dêsse modo, para área do círculo (com os nossos símbolos de hoje)

$$A=\left(2r-\frac{2r}{9}\right)^2=\left(\frac{16}{9}\right)^2\cdot r^2$$

donde, por comparação com a fórmula (2),

$$\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3{,}16 \quad \textit{por defeito.} \tag{3}$$

2.º Período. — De Arquimedes a Viète. 1.º Período teórico.

Com *Euclides* e, sobretudo, *Arquimedes* inicia-se o segundo período na história das determinações de π, período a que podemos chamar *primeiro período teórico;* nêle se encontram com efeito, não apenas regras empíricas, mas o cuidado de justificar os resultados.

[1] O leitor não encontrará neste artigo nada de novo. Todos os problemas de carácter prático e teórico a que nêle se faz referência estão resolvidos há muito tempo. Trata-se apenas de uma compilação de resultados que, na sua maior parte, são do domínio das Matemáticas Elementares.

Arquimedes (287-212 A. C.) inscreve e circunscreve à circunferência polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, calcula os perímetros dêsses polígonos e obtém assim um limite superior e um limite inferior do comprimento da circunferência rectificada. Êste procedimento implica: *a)* admitir que o comprimento da circunferência existe; *b)* que êle é o *limite* comum dos perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos quando o seu número de lados tende para infinito. *Arquimedes* admitiu ambos os factos, sem que, no entanto, desse uma formulação rigorosa do segundo, o que estava fora das preocupações e dos recursos da Análise do seu tempo, mesmo para uma mentalidade da fôrça da sua.

Dos seus cálculos, deduz *Arquimedes* que «o perímetro da circunferência excede três vezes o seu diâmetro por uma parte que é menor que a sétima parte do diâmetro e maior que 10 dividido por 71», o que traduzimos escrevendo a dupla desigualdade

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7} \tag{4}$$

ou, em escrita decimal

$$3{,}1408<\pi<3{,}1429\,.$$

Durante muito tempo, esta aproximação dada por *Arquimedes* não foi ultrapassada, mas no século III p. C. o matemático chinês *Liu Hui*, calculando perímetros de polígonos regulares inscritos até 192 lados, encontrou

$$\pi=3{,}14 \textit{ por defeito} \tag{5}$$

(que concorda com a determinação arquimedeana) e no século V p. C. o chinês *Tsu Ch'ung-chih* obteve a determinação muito mais exacta

$$3{,}1415926<\pi<3{,}1415927 \tag{6}$$

da qual tirou os valores aproximados $\frac{355}{113}$ e $\frac{22}{7}$ êste, como vimos, já usado por Arquimedes. Na viragem do século V para o VI p. C. o astrónomo hindú *Aryabhata* encontra o valor notàvelmente aproximado

$$\pi=\frac{3927}{1250}=3{,}1416 \tag{7}$$

mas os hindús não fizeram grande uso dêle; tomavam habitualmente ou $\pi=3$ ou $\pi=\sqrt{10}$.

No século XII, o matemático hindú *Bhaskara* dá o valor arquemediano 22/7 e também o valor (7) 3927/1250, êste parece que obtido pelo método arquimedeano com polígonos até 384 lados!

O mesmo valor (7) se encontra também mencionado pelo matemático árabe *Al-khowarizmi* (séc. IX), mas parece que os árabes posteriormente o esqueceram e continuaram a tomar nas aplicações $\pi=\sqrt{10}$.

Entretanto, na Europa não se encontram sinais de novas determinações que se pudessem pôr a par das dos hindús e árabes, antes do século XVI. Nessa altura porém os cálculos numéricos receberam, na Europa do Ocidente e do Noroeste, um impulso extraordinário, devido principalmente às necessidades da navegação que originaram também uma completa renovação na Astronomia e na concepção do mundo.

Adrianus Romanus (1561-1615) um matemático dos Países Baixos, calculou π com 15 decimais usando o método arquimedeano, e um seu contemporâneo, também dos Países Baixos, *Ludolph van Ceulen* (1540-1610) levou, pelo mesmo método, o cálculo até 35 decimais!

James Gregory (1638-1675) e *Christian Huyghens* (1629-1685) ocuparam-se também do mesmo cálculo.

Mas, por muito extraordinária que a todos tenha parecido a proeza de *Van Ceulen* (e foi-o a tal ponto que o valor por êle determinado foi gravado no seu túmulo e a π se deu o nome de *número de Ludolph*) ela devia ser brevemente eclipsada por novas determinações feitas por um método novo.

3.º Período. — De Viète à actualidade.
2.º Período teórico.

Êsse método novo é o *método dos limites* que começa a despontar pela segunda metade do século XVI e toma corpo ao longo do século XVII. Caracteriza-o, como todos sabem, o recurso aos processos infinitos de cálculo, isto é, ao manuseamento de expressões em que figura uma infinidade de operações, o que era inteiramente estranho aos matemáticos da Antiguidade.

A primeira expressão de π por um algorítmo infinito é devida a *Viète* (1540-1603)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}\,. \tag{8}$$

Aberto o caminho, dentro em pouco é uma verdadeira explosão de algorítmos infinitos — séries, fracções contínuas, produtos infinitos — a servirem para exprimir π.

Assim, pouco depois, *John Wallis* (1616-1703), um dos principais obreiros do método dos limites, deu a expressão

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots \tag{9}$$

e *Lord William Brouncker* (1620-1684) a seguinte

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}}} \tag{10}$$

que é uma das primeiras da teoria das fracções contínuas.

Na segunda metade do século XVII, *James Gregory* (1638-1675) e *W. G. Leibniz* (1646-1716) encontraram, quási ao mesmo tempo (*Gregory* com alguns anos de antecedência?) o desenvolvimento em série da função *arc tg x*

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \tag{11}$$

donde haviam de vir a sair os métodos mais expeditos para o cálculo de π com um grande número de decimais. Essa série dá, para $x=1$, a relação

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{12}$$

(encontrada quási ao mesmo tempo também por *Huygens*) que, no entanto, não é própria para o cálculo numérico de π por ser muito lentamente convergente (para ter, a partir dela, π com *dez* casas dècimais, seria preciso tomar cêrca de 5.000 milhões de termos da série!). Mas não é difícil deduzir relações em que figure a função *arc tg x* e que fornecem processos muito ràpidamente convergentes.

Citaremos, de entre elas, a que deu *Leonhard Euler* (1707-1783) na sua *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\,, \tag{13}$$ [2]

e a que deduziu o matemático vienense *L. Schultz von Strassnitzky* (1803-1852)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} \tag{14}$$

a partir da qual o calculador *Dase* determinou, após dois meses de trabalho, π com 200 decimais, em 1844.

Mas, em rapidez de convergência, sobreleva a todas a fórmula dada em 1706 por *John Machin* (1680-1751)

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}\,. \tag{15}$$

Dela se serviu em 1874 *William Shanks* (1812-1882) para calcular π com 707 (!) decimais, proeza até agora não ultrapassada. Por uma questão de curiosidade, damos a seguir êsse valor

$$\pi = 3{\cdot}\begin{array}{l}
14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\\
58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\\
82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384\ 46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128\\
48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211\ 05559\ 64462\ 29489\ 54930\ 38196\\
44288\ 10975\ 66593\ 34461\ 28475\ 64823\ 37867\ 83165\ 27120\ 19091\\
45648\ 56692\ 34603\ 48610\ 45432\ 66482\ 13393\ 60726\ 02491\ 41273\\
72458\ 70066\ 06315\ 58817\ 48815\ 20920\ 96282\ 92540\ 91715\ 36436\\
78925\ 90360\ 01133\ 05305\ 48820\ 46652\ 13841\ 46951\ 94151\ 16094\\
33057\ 27036\ 57595\ 91953\ 09218\ 61173\ 81932\ 61179\ 31051\ 18548\\
07446\ 23799\ 62749\ 56735\ 18857\ 52724\ 89122\ 79381\ 83011\ 94912\\
98336\ 73362\ 44065\ 66430\ 86021\ 39501\ 60924\ 48077\ 23094\ 36285\\
53096\ 62027\ 55693\ 97986\ 95022\ 24749\ 96206\ 07497\ 03041\ 23668\\
86199\ 51100\ 89202\ 38377\ 02131\ 41694\ 11902\ 98858\ 25446\ 81639\\
79990\ 46597\ 00081\ 70029\ 63123\ 77387\ 34208\ 41307\ 91451\ 18398\\
05709\ 85\ldots
\end{array} \tag{16}$$ [3]

Repare o leitor nisto que é curioso — os métodos mais poderosos para o cálculo de π (definido por uma relação geométrica) são métodos puramente analíticos. Ao longo da história da Matemática, não foi esta a menor razão do interêsse despertado à volta dêste número.

2.º — Natureza teórica de π

Poderá o leitor preguntar qual é o interêsse que pode existir no cálculo de centenas de casas decimais de π. ¿ Interêsse prático? nenhum! «Dez casas decimais bastam para dar o comprimento do meridiano terrestre com um êrro inferior a uma polegada, e trinta decimais dariam a circunferência do universo visível a menos de um segmento imperceptível com o mais poderoso telescópio». [4]

¿ Interêsse teórico? Sim, até certa altura pelo menos. É que o número π guardou ciosamente o segrêdo da sua natureza teórica durante muitos séculos, e a incerteza sôbre essa natureza andou ligada desde a antiguïdade clássica a um problema célebre — o da quadratura do círculo.

¿ π é racional ou irracional? esta pregunta só teve resposta no final do século XVIII quando *Lambert* (1728-1777) demonstrou que π *é irracional*, e por isso se justifica, pelo menos até essa altura, o afã de encontrar um número cada vez maior de decimais, à procura de qualquer lei na dízima que ainda se não descortinava...

Mas não está tudo dito com a asserção de que π é irracional — ¿ a que classe de irracionalidade pertence? é algébrico? ou transcendente?

Ao leitor menos versado neste assunto, diremos que *se chama número algébrico a todo aquêle que é raiz de uma equação algébrica de coeficientes racionais*; uma tal equação pode sempre evidentemente reduzir-se a uma outra de coeficientes inteiros com as mesmas raízes.

Assim, são algébricos os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, i, $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}}$ porque são, respectivamente, raízes das equações $x^2-2=0$, $x^3-5=0$, $x^2+1=0$, $2x^8+x^4+1=0$.

São, em particular, algébricos todos os números racionais m/n, $n\neq 0$, visto serem raízes de equações da forma $nx-m=0$.

Sabe-se que o conjunto dos números algébricos constitui um *campo* e que, por conseqüência, somas

---

(2) **O leitor deduz fàcilmente esta fórmula e as duas seguintes, tomando as tangentes de ambos os membros e notando que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\alpha)=\alpha$.**

(3) **Reproduzido de *Calcolo Numerico* por *Ugo Cassina*, pág. 512.**

(4) ***Simon Newcomb*, matemático e astrónomo americano, citado de *Mathematics and the Imagination* por E. Kasner e J. Newman, pág. 78.**

(algébricas) produtos e cocientes (de divisor não nulo) de números algébricos são ainda números algébricos.

A todo o número não algébrico chama-se *transcendente.*

A questão de se saber se π é ou não algébrico equivale portanto a esta outra — saber se existe ou não alguma equação algébrica de coeficientes inteiros que o tenha como raiz — e esta questão tem uma grande importância para o problema da quadratura, como veremos adiante.

Os esforços para resolver esta questão da algebricidade de π culminaram na demonstração que *Lindemann* fêz em 1882 de que — *π não é algébrico.*

Êsse facto resulta de um corolário que se tira do teorema fundamental de *Lindemann* e que diz: *se* x *é um número algébrico não nulo qualquer,* e^x *não é racional.*

Ora, da bem conhecida *fórmula de Euler*

(17) $$e^{ix}=\cos x+i \operatorname{sen} x\,,$$

resulta para $x=\pi$,

(18) $$e^{i\pi}=-1$$

donde se conclue, em face do resultado de *Lindemann,* que *$i\pi$ não é algébrico.* Mas i é algébrico, logo π não o pode ser, aliás seria algébrico o seu produto.

3.º — O problema da constructibilidade

Ocupemo-nos agora, para terminar, dêste problema — o da *constructibilidade* de π.

Antes de mais, precisemos o significado do problema. É o seguinte: escolhida uma unidade de medida, isto é, um segmento $\overline{OA}=1$, construir, *com a ajuda apenas da régua e do compasso,* um segmento $\overline{OB}$ tal que $\overline{OB}/\overline{OA}=\pi$.

A exigência de usar apenas êstes dois instrumentos resulta das condições históricas do problema. Êle surgiu na Grécia clássica e, para a maioria dos geómetras gregos, uma boa, uma verdadeira solução geométrica não devia exigir mais que régua e compasso. Mas, note-se bem, *régua não graduada,* (ou, melhor, régua usada *exclusivamente* para traçar rectas) pois um dos problemas célebres postos na geometria grega e que vieram sem solução até ao século XIX, o da *trissecção do ângulo*, resolve-se com uma régua *graduada* e um compasso. [5]

O problema da constructibilidade de π, está ligado directamente ao da *quadratura do círculo* que consiste, como todos sabem, em, dado um círculo qualquer, construir um quadrado cuja área lhe seja igual (inútil acrescentar que se trata de uma construção teòricamente rigorosa e não apenas aproximada).

Se fôr r o raio do círculo, como a sua área é πr^2, deverá encontrar-se um quadrado de lado l, tal que $l^2=\pi r^2$, isto é, tal que

(19) $$l=r\cdot\sqrt{\pi}\,.$$

Ora, em qualquer livro de geometria elementar se aprende a fazer (entre outras) as seguintes construções — dados segmentos de comprimentos a e b, construir segmentos de comprimentos $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, a/b e $\sqrt{a}$ — e se verifica que tais construções não exigem mais que régua não graduada e compasso.

De modo que, se se souber construir π, sabe-se construir $\sqrt{\pi}$ e depois $r\cdot\sqrt{\pi}$, e o problema da quadratura reduz-se, afinal, ao da constructibilidade de π.

Partamos de um segmento unidade (que, no nosso caso, pode ser o próprio raio do círculo). Com as construções acima mencionadas, podemos, em primeiro lugar, construir todos os números racionais e tôdas as raízes quadradas de números racionais e, em seguida, como é óbvio, *tôda a combinação finita de raízes quadradas e de números racionais.*

Ponhamos agora a questão — *¿ que outros números são construíveis ?* Demonstra-se que mais nenhuns !

Com efeito, um resultado essencial da teoria da constructibilidade é o seguinte [6] — *são construíveis com régua não graduada e compasso aquêles números algébricos (e só êles !) que são combinações finitas de números racionais e raízes quadradas* (é, por exemplo, construível $\sqrt[2^n]{2}$, pela efectivação sucessiva de n raízes quadradas, mas não $\sqrt[3]{2}$).

Ora como o número π não é algébrico, resulta daqui imediatamente que êle não é construível e que, portanto, é impossível a quadratura só com régua não graduada e compasso.

Assim se fechou, há pouco mais de sessenta anos, um capítulo da História da Matemática, vélho de muito mais de vinte séculos !

Com a demonstração de *Lindemann,* π entregou-nos o seu último segrêdo — o da sua não algebricidade. Nesse dia, extinguiu-se virtualmente a legião dos quadradores. Se essa extinção não foi, em todos os casos, efectiva, o facto deve atribuir-se a um fenómeno de longevidade que é, talvez, do domínio das ciências bio-psicológicas, mas que nada tem que ver com a Matemática.

---

[5] Vide por ex. *What is Mathematics?* por *R. Courant* e *H. Robbins,* pg. 138.

[6] Para a demonstração, que não exige conhecimentos além dos rudimentos da Geometria Analítica, pode ver-se, por ex., o já citado *What is Mathematics?* pg. 120 e seg.