A. E. Hornbrook. Laboratory methods of teaching mathematics. New-York.

Hoefer. Histoire des Mathématiques. Hachette, Paris.

Boyer. Histoire des Mathématiques. Gauthier-Villars, Paris.

W. Rousse-Ball. Histoire des Mathématiques (trad. francaise). Hermann, Paris.

F. Cajori. History of mathematics. Macmillann, New--York.

G. Loria. Guida allo studio della storia della mathematiche. Hoepli, Milano.

A. Schultze. The teaching of mathematic in the secondary schools, Macmillann, New-York.

D. E. Smith. History of mathematics (2 vol). Ginn & C.º, Boston.

Conférences du Musée Pedagogique (varios auctores). (2 vol.). A. Collin, Paris.

Stuyvaert. Introduction á la methodologie mathématique. Van Rysselberghe & Rombaut, Gand.

Felix Klein. Conferences sur les mathématiques. Hermann & Fils, Paris.

Laissant. La Mathématique. Sa philosophie et son enseignement. G. Villars.

Rébiére. Mathematiques et mathematiciens. Vuibert, Paris.

G. Maupin. Opinions et curiosités touchant la mathematique. G. Villars.

L. Brunschvigc. Les étapes de la philosophie mathématique. F. Alcan, Paris.

Bustelli. Elementi di filosofia della matematica. Societá editrice Dante Alighieri, Roma.

j) — DIVERSOS

Enzyklopädie der Elementar-mathematik (3 vol.). H. Weber & H. Wellstein. B. G. Teubner, Leipzig.

Felix Klein. Vorträge uber den Mathematischen Unterricht and den höheren Shulen. B. G. Teubner, Leipzig — (compreende duas partes) : 1.ª Teil — Von der Organisations des Mathematischen Unterrichts. 2.ª Teil — Elementarmathematik vom höheren Standpunkteaus (2 vol.).

Feliw Muller. Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français (2 vol.). Gauthier Villards, Paris.

É também aconselhado, para um maior desenvolvimento dos alunos, e como um útil incentivo para a sua cultura matemática, que o «laboratório» faça a assinatura de um ou dois jornais ou revistas elementares e de acôrdo com o nível dos alunos. Nestas condições, poderão ser indicadas como correspondendo ao fim que se tem em vista, as duas seguintes:

L'Éducation Mathématique (para os alunos até à 5.ª classe). Vuibert, Paris.

Le Journal de Mathématiques élémentaires (para os alunos das 6.ª e 7.ª classes). Vuibert, Paris.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Nos actuais programas de matemática dos liceus, não são incluídos certos capítulos como, propriedades dos polinómios, equações transcendentes, aproximações numéricas, e outros, cuja necessidade é evidente, quer sob o ponto de vista de cultura geral, quer para a continuação de estudos superiores. A reforma dos programas prevendo a criação de um oitavo ano no curso liceal, deve ter deixado para inclusão nos seus programas, estas matérias. E porque o seu ensino no primeiro ano universitário acarretaria perdas de tempo em prejuízo de outros assuntos, entende-se que o seu estudo deve ser feito como preparação para a entrada nas Universidades. É assim que nos exames de aptidão aparecem questões sôbre aquêles capítulos. E porque assim é, e porque os candidatos necessitam preparação para êsses exames, a «Gazeta de Matemática», com o intuito de fornecer elementos de preparação nesse sentido, decidiu publicar nesta secção, a par de outros, artigos sôbre aquelas matérias, que já em tempo pertenceram ao ensino liceal. É dêste tipo o artigo seguinte.

ESTUDO DE ALGUMAS PROPRIEDADES DOS POLINÓMIOS INTEIROS

por ***J. J. Rodrigues dos Santos***

0 — Definições.

Vamos fazer o estudo de algumas propriedades dos polinómios inteiros em x para o que representaremos por $y_n(x)$ o polinómio inteiro do grau n de coeficientes reais

$$(1) \qquad y_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n .$$

Teorema I — *Um polinómio inteiro em* x *toma um único valor por cada valor atribuido à variável* x .

Se na expressão (1) substituirmos a variável x por um valor particular, qualquer, o valor que o polinómio toma é único, visto que o conjunto das operações a efectuar para calcular êsse valor, só pode conduzir a um único resultado por se tratar de operações uniformes. Se designarmos por x_i o valor particular atribuído a x designaremos por $y_n(x_i)$ o valor correspondente de $y_n(x)$.

Definição I — Diz-se que α é *raiz* ou *zero* dum polinómio inteiro em x, quando êste se anula para o valor α atribuído à variável. Isto é: se α é raiz do polinómio (1) ter-se-á: $y_n(\alpha)=0$.

1 — Condição de divisibilidade dum polinómio inteiro em x por $x-\alpha$.

Suponhamos efectuada a divisão do polinómio (1), do grau n, pelo binómio $x-\alpha$, onde α designa um número qualquer. O cociente será um polinómio do grau $n-1$, visto o divisor ser do 1.º grau, em x, e o resto, se o houver, não conterá x. Podemos escrever:

$$y_n(x)=y_{n-1}(x)(x-\alpha)+R$$

igualdade que é verdadeira qualquer que seja o valor atribuído a x. Então, ela será verdadeira para $x=\alpha$ o que se traduz por:

$$y_n(\alpha)=y_{n-1}(\alpha)(\alpha-\alpha)+R.$$

A primeira parcela do segundo membro da igualdade anterior, é nula, visto um dos factores ser nulo e $y_{n-1}(\alpha)$ não ser infinito. [1]

A igualdade reduz-se pois a $y_n(\alpha)=R$ o que, atendendo ao significado de $y_n(\alpha)$ e de R, nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema II — *O resto da divisão dum polinómio inteiro em* x *por* $x-\alpha$ *é o valor numérico que se obtém substituindo no polinómio* x *por* α.

Em particular, se fôr $R=0$, o polinómio será divisível por $x-\alpha$, e como $y_n(\alpha)=0$, em virtude da definição I, α é raiz do polinómio (1). Podemos então enunciar o

Teorema III — *Se* α *é raiz ou zero dum polinómio inteiro em* x *êsse polinómio é divisível por* $x-\alpha$.

Recìprocamente, se o polinómio (1) é divisível por $x-\alpha$, α é raiz dêsse polinómio. Com efeito, por hipótese $R=0$, donde:

$$y_n(\alpha)=y_{n-1}(\alpha)(\alpha-\alpha)=0$$

e α é raiz do polinómio.

O teorema III e o seu recíproco podem resumir-se no seguinte enunciado:

Teorema IV — *A condição necessária e suficiente para que* α *seja raiz dum polinómio inteiro em* x *é que êste seja divisível por* $x-\alpha$.

[1] Um polinómio inteiro em x toma valores finitos para valores finitos da variável, visto o grau do polinómio e os coeficientes serem números finitos. O produto $0\times\infty$ é como se sabe um símbolo de indeterminação, indeterminação esta que é muitas vezes aparente.

2 — Condição de identidade de dois polinómios.

Definição II — Dois polinómios inteiros em x dizem-se *idênticos* quando tomam o mesmo valor para qualquer valor atribuído à variável x.

Definição III — Um polinómio inteiro em x diz-se *idênticamente nulo* quando é nulo qualquer que seja o valor atribuído à variável.

Vamos agora determinar quais as condições que se devem verificar para que um polinómio inteiro em x seja identicamente nulo e, depois, as condições de identidade de dois polinómios.

Teorema V — *Quando um polinómio inteiro em* x *do grau* n *se anula para mais de* n *valores distintos atribuídos à variável, êle é identicamente nulo.*

Suponhamos que, conforme a hipótese do teorema, o polinómio (1) se anula para qualquer dos valores

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots\alpha_l \qquad l>n$$

da variável x. Em virtude do teorema III, visto α_1 ser zero do polinómio, podemos escrever:

$$y_n(x)=y_{n-1}(x)(x-\alpha_1).$$

Mas anulando-se $y_n(x)$ para $x=\alpha_2$, o mesmo deverá acontecer ao segundo membro da igualdade anterior, visto que ela é válida qualquer que seja x. Ora $x-\alpha_1$ è diferente de zero para $x=\alpha_2$ (a menos que $\alpha_1=\alpha_2$ o que contraria a hipótese dos valores $\alpha_1\alpha_2\cdots$ serem todos distintos); logo deverá ser $y_{n-1}(x)=0$ para $x=\alpha_2$ ou $y_{n-1}(\alpha_2)=0$. Nestas condições poderemos escrever, como anteriormente:

$$y_{n-1}(x)=y_{n-2}(x)(x-\alpha_2).$$

Substituindo êste valor de $y_{n-1}(x)$ na expressão de $y_n(x)$ vem:

$$y_n(x)=y_{n-2}(x)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1).$$

A repetição do raciocínio feito, para os valores $\alpha_3\,\alpha_4\cdots\alpha_n$ levar-nos-ia a escrever:

$$y_n(x)=y_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \tag{2}$$

onde y_0 é uma constante. Mas o polinómio $y_n(x)$ anula-se por mais de n valores atribuídos a x; designando por α_{n+1} um dos valores, diferente de $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, o primeiro membro de (2) deverá ser nulo para $x=\alpha_{n+1}$ e o mesmo se deve verificar com o segundo membro daquela igualdade. Como os factores binómios que nêle figuram não se anulam para $x=\alpha_{n+1}$ deverá ser $y_0=0$. Mas o facto de y_0 ser nulo implica que $y_n(x)$ seja nulo qualquer que seja o valor atribuído a x.

Teorema VI — *Se* y (x) *é nulo qualquer que seja* x *então os coeficientes são todos nulos.*

GEOMETRIA

a) GEOMETRIA PLANA

Triângulos e Quadriláteros. Angulos, áreas, etc.: 1123 (**12**); 1221 (**13**); 1279 (**14**); 1562, 1566 (**18**).
Medidas angulares. Angulos ao centro e excêntricos: 1271 (**14**); 1514 (**17**).
Proporcionalidade de segmentos: 1372 (**15**); 1467 (**16**).
Homotetia e semelhança. Conseqüências numéricas: 1114, 1123, 1126 (**12**); 1215, 1220 (**13**); 1355, 1372 (**15**); 1567 (**18**).
Polígonos regulares (inscritos e circunscritos à circunferência). Angulos internos e externos. Áreas, etc.: 1105 (**12**); 1214 (**13**); 1354, 1378, 1379 (**15**).
Ciclometria: 1023 (**11**); 1123, 1125 (**12**); 1271 (**14**); 1378 (**15**).
Métodos geométricos. Problemas de construção: 1018, 1025 (**11**); 1122, 1126 (**12**); 1259 (**14**); 1362, 1372 (**15**); 1454 (**16**); 1518, 1526 (**17**).
Demonstrações várias: 1098, 1113 (**12**); 1202, 1209 (**13**); 1267 (**14**); 1349, 1367 (**15**); 1448, 1461 (**16**); 1525, 1534 (**17**); 1561 (**18**).

b) GEOMETRIA NO ESPAÇO

Rectas e planos: 1115 (**12**); 1562 (**18**).
Angulos sólidos. Triedro: 1106 (**12**); 1513 (**17**); 1575 (**18**).
Poliedros regulares: 1214 (**13**); 1272 (**14**); 1355, 1380 (**15**).
Superfícies prismáticas e piramidais: 1450 (**16**).
Prismas e pirâmides (paralelipípedo e cubo): 1104, 1126 (**12**); 1210 (**13**); 1358 (**15**); 1468 (**16**).
Superfícies e sólidos de revolução: 1030 (**11**); 1104 (**12**); 1210, 1211, 1222 (**13**); 1258, 1268, 1280 (**14**); 1368, 1374 (**15**); 1462 (**16**); 1533 (**17**); 1568, 1574 (**18**).

Trabalho executado pelo cooperador Fernando R. Dias Agudo.

NOTA — Os números que antecedem os que vão destacados referem-se à ordem de publicação dos problemas, enquanto que os números destacados entre parêntesis se referem aos respectivos números da «Gazeta de Matemática» em que êsses problemas foram publicados. Exemplo: *Ciclometria* ... 1123 ... (12) indica o problema n.º 1123 publicado no n.º 12 da «Gazeta de Matemática».

Quadro de distribuïção, por assuntos, dos problemas dos pontos de

Exame de Aptidão às Escolas Superiores,

publicados na «Gazeta de Matemática» n.^{os} 11 a 18

ARITMÉTICA

Operações fundamentais: 1107 (12).
Sistemas de numeração: 1361 (15),
Divisibilidade: 1121 (12); 1373 (15); 1453 (16).
Números primos. Decomposição factorial. M. d. c. e m. m. c. 1026 (11); 1097 (12); 1216 (13); 1516, 1517 (17).
Números fraccionários. Dízimas: 1116 (12); 1201 (13); 1348, 1356 (15); 1447 (16); 1521 (17).
Divisão em partes proporcionais: 1032 (11); 1275 (14).

ÁLGEBRA

Decomposição em factores. Divisão de polinómios: 1028 (11); 1119 (12).
Potências e radicais: 1021 (11); 1110 (12); 1346, 1351, 1359 (15); 1558 (18).
Problemas do 1.º e 2.º graus: 1217 (13); 1275 (14); 1375 (15); 1463 (16); 1570 (18).
Sucessões. Limites. Progressões aritméticas e geométricas: 1128 (12); 1263, 1274 (14); 1529 (17); 1571 (18).
Funções. Sua classificação e representação gráfica: 1015 (11); 1124 (12); 1464 (16).
Funções inversas, exponencial e logarítmica: 1457 (16).
Função logarítmica. Definição e propriedades dos laritmos: 1101 (12); 1205 (13); 1364 (15).
Cálculo logarítmico: 1213 (13); 1256, 1270 (14); 1371 (15).
Análise indeterminada do 1.º grau. Equação de Diofanto: 1022 (11); 1093, 1100 (12); 1195, 1203 1218 (13); 1260 (14); 1556 (18).
Equação do 2.º grau a 1 incógnita. Discussão e relações entre os coeficientes e as raízes: 1020 (11); 1092, 1108 (12); 1204, 1212 (11); 1261, 1269 (14); 1441 (16); 1519 (17); 1557 (18).
Propriedades do trinómio do 2.º grau: 1345, 1359, 1376 (15); 1520, 1527 (17).
Desigualdades do 2.º grau: 1013 (11); 1091, 1099 (12); 1196 (13); 1269, 1276 (14); 1350, 1363 (15); 1451 (16); 1512, 1532 (17); 1565 (18).
Equação biquadrada: 1197 (13); 1255 (14); 1344, 1351, 1370 (15); 1456 (16); 1556 (18).
Arranjos, permutações e combinações: 1014, 1019 (11); 1109, 1120 (12); 1360, 1364 (15); 1443 (16); 1528 (17).
Binómio de Newton: 1262 (14); 1370 (15); 1441, 1452, 1455 (16); 1511 (17).

TRIGONOMETRIA

Funções circulares. Sua variação e representação gráfica: 1027 (11); 1118 (12); 1266 (14); 1369 (15); 1465 (16).
Relações entre as funções dalguns arcos. Redução ao 1.º quadrante: 1112 (12); 1366, 1369 (15); 1445 (16); 1531 (17); 1560 (18).
Funções circulares inversas: 1200, 1208 (13); 1315, 1353, 1357 (15); 1459 (16); 1532 (17).
Relações entre as funções dum mesmo arco. Fórmulas fundamentais: 1031 (11); 1095, 1103, 1119 (12); 1207 (13); 1265 (14); 1460 (16).
Verificação de identidades: 1094, 1127 (12); 1198 (13); 1347, 1366 (15); 1444 (16); 1522 (17); 1572 (18).
Adição e subtracção de arcos: 1199, 1219 (13); 1523 (17); 1569 (18).
Cálculo logarítmico com funções circulares: 1016, 1024, 1029 (11); 1449 (16); 1511 (17).
Relação entre os elementos dum triângulo rectângulo: 1277 (14), 1377 (15).
Resolução de triângulos rectângulos. Sua aplicação a outros problemas: 1017 (11); 1096, 1102, 1111, 1117 (12); 1206 (13); 1257, 1264, 1273, 1278 (14); 1346, 1352, 1365, 1369 (15); 1446, 1458, 1466 (16); 1524, 1530 (17); 1559, 1573 (18).

Consideremos o polinómio (1) que supomos nulo para qualquer valor de x, será também $y_n(0)=0$ e portanto $a_n=0$. O polinómio $y_n(x)$ pode então escrever-se com a forma

$$y_n(x)=x\,(a_0\,x^{n-1}+a_1\,x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}).$$

Mas, tendo $y_n(x)$ nulo qualquer que seja x, o mesmo deve suceder ao parêntesis que figura no segundo membro da igualdade anterior. Concluímos assim que deve ser $a_{n-1}=0$ e, anàlogamente,

$$a_{n-2}=0\cdots a_1=0\,,\quad a_0=0\,.$$

A expressão (2) permite-nos afirmar:

Teorema VII — *Se um polinómio inteiro em* x *do grau* n *se anula para* n *valores distintos atribuídos à variável* x, $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n$ *êle é decomponível num produto de factores lineares da forma:*

$$y_n(x)=y_0\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\,.$$

É fácil verificar que $y_0=a_0$, sendo a_0 o coeficiente da maior potência de x, ou seja, visto que supomos o polinómio ordenado segundo as potências decrescentes de x, o coeficiente do seu primeiro têrmo. É o que resulta da maneira como se obtém o primeiro têrmo do cociente da divisão de dois polinómios e de ser a unidade o coeficiente de x nos binómios $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.

Teorema VIII — *Quando dois polinómios inteiros em* x *dos graus* m *e* n $(m>n)$ *são iguais para mais de* m *valores distintos atribuídos à variável* x, *estes dois polinómios são idênticos, isto é, tomam o mesmo valor qualquer que seja* x.

Na hipótese do teorema, podemos mesmo afirmar que os polinómios são iguais: têm o mesmo grau e os têrmos semelhantes têm os mesmos coeficientes.

Êste teorema é conhecido por *Princípio das Identidades*. Sejam os dois polinómios

$$P=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots+a_n\,x^n+\cdots+a_m\,x^m$$
$$Q=b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+\cdots+b_n\,x^n\,.$$

Formemos a diferença

$$P-Q=a_0-b_0+(a_1-b_1)\,x+\cdots+(a_n-b_n)\,x^n+ \\ +a_{n+1}\,x^{n+1}+\cdots+a_m\,x^m\,.$$

Como P e Q são por hipótese iguais para mais de m valores distintos atribuídos à variável x, a diferença $P-Q$ será nula para mais de m valores de x, e como é do grau m, os teoremas V e VI permitem-nos escrever:

$$a_0-b_0=0\quad a_1-b_1=0\cdots a_n-b_n=0\quad a_{n+1}=0\cdots a_m=0$$

ou

$$a_0=b_0\quad a_1=b_1\cdots a_n=b_n\quad a_{n+1}=0\cdots a_m=0\,.$$

Note-se que êstes teoremas são verdadeiros se nos polinómios entrarem duas ou mais variáveis. Neste caso dir-se-ia:

Um polinómio inteiro a mais duma variável que se anula para qualquer sistema de valores atribuídos às variáveis é idênticamente nulo, isto é, são nulos todos os seus coeficientes.

Bastaria mesmo que o polinómio se anulasse para mais de m sistemas de valores distintos atribuídos às variáveis, sendo m o grau do polinómio em relação à variável que nêle figura com maior expoente. E o teorema VIII enunciar-se-ia assim:

Se dois polinómios dos graus m *e* n *são iguais para mais de* m $(m>n)$ *sistemas de valores distintos atribuídos às variáveis êles são idênticos, isto é, tomam o mesmo valor para qualquer sistema de valores atribuídos às variáveis.*

Em face dos teoremas I e VIII podemos afirmar que

Definição IV — Dois polinómios inteiros dizem-se *idênticos* quando, e só quando, os coeficientes dos respectivos têrmos semelhantes são iguais.

3 — Método dos coeficientes indeterminados.

O método dos coeficientes indeterminados, que é devido a Descartes, é de uso constante em matemática e a sua simplicidade é paralela à sua importância. Consiste o método numa aplicação do teorema VIII. Quando pretendemos determinar os coeficientes dum polinómio inteiro, cuja forma é conhecida e de que se conhecem certas propriedades, em número suficiente, a aplicação do princípio das identidades permite calcular os coeficientes do polinómio procurado, que são as incógnitas dum sistema de equações que traduz as condições ou propriedades a que aquela função inteira deve satisfazer. Para a aplicação dêste método é fundamental conhecer a forma da função inteira procurada e por vezes pretende-se também determinar o grau do polinómio.

Vamos fazer uma aplicação dos métodos de coeficientes indeterminados no cálculo do cociente e resto da divisão dum polinómio inteira em x, do grau n, por $x-\alpha$.

O cociente será um polinómio de grau $n-1$, inteiro e o resto uma constante. Então podemos escrever idênticamente:

$$a_0\,x^n+a_1\,x^{n-1}+\cdots+a_n= \\ =(x-\alpha)\,(b_0\,x^{n-1}+b_1\,x^{n-2}+\cdots+b_{n-1})+R$$

sendo $b_0, b_1\cdots b_{n-1}$ e R as constantes a determinar.

Efectuando as operações indicadas no 2.º membro e ordenando o resultado segundo as potências decrescentes de x, teremos:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = b_0 x^n + (b_1 - \alpha b_0) x^{n-1} + \\ + (b_2 - \alpha b_1) x^{n-2} + \cdots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2}) x + (R - \alpha b_{n-1}).$$

Como esta igualdade é verdadeira qualquer que seja x, o princípio das identidades permite-nos escrever:

$$a_0 = b_0 \quad a_1 = b_1 - \alpha b_0 \quad a_2 = b_2 - \alpha b_1 \cdots$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2} \quad \text{e} \quad a_n = R - \alpha b_{n-1}$$

ou:

$$a_0 = b_0 \quad b_1 = a_1 + \alpha b_0 \cdots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2} \quad R = a_n + \alpha b_{n-1}.$$

Destas igualdades resulta a regra de Rufini que se enuncia do seguinte modo: *o primeiro coeficiente do cociente é igual ao primeiro coeficiente do dividendo e cada um dos outros obtém-se do anterior, multiplicando êste por* α *e adicionando-lhe o coeficiente do mesmo índice do dividendo. O último valor obtido é o resto.*

Vejamos a maneira prática de dispor o cálculo num problema desta natureza. Seja, por exemplo, calcular o cociente e o resto de divisão do polinómio $2x^5 - 3x^3 + x^2 - 7$ por $x - 3$. Numa linha escrevem-se os coeficientes do polinómio dividendo, completando com zeros as faltas de termos de certos graus. Por baixo de cada coeficiente escrevem-se os produtos por $+3$ dos coeficientes do cociente que se vão obtendo, notando que o primeiro dêstes é igual ao primeiro coeficiente do dividendo, suposto êste ordenado segundo as potências decrescentes de x.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & -7 \\ & 6 & 18 & 45 & 138 & 414 \\ \hline 2 & 6 & 15 & 46 & 138 & 407. \end{array}$$

O cociente será, portanto, $2x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 46x + 138$ e o resto 407.

Vamos dar exemplos doutros problemas cuja solução se obtém fàcilmente pelo uso do método dos coeficientes indeterminados.

Seja, por exemplo, determinar os coeficientes dum polinómio do 4.º grau para que êle seja o quadrado do trinómio $b_0 x^2 + b_1 x + b_2$. O polinómio procurado será

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = (b_0 x^2 + b_1 x + b_2)^2$$

ou:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = b_0^2 x^4 + 2 b_0 b_1 x^3 + \\ + (b_1^2 + 2 b_0 b_1) x^2 + 2 b_1 b_2 x + b_2^2$$

igualdade que deverá verificar-se qualquer que seja x. Então pelo teorema VIII:

$$a_0 = b_0^2 \quad a_1 = 2 b_0 b_1 \quad a_2 = b_1^2 + 2 b_0 b_1 \quad a_3 = 2 b_1 b_2 \quad \text{e} \quad a_4 = b_2^2$$

Pelo problema inverso podemos extrair a raiz quadrada dum polinómio, suposto quadrado perfeito.

Seja agora resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$ que se sabe admitir a raiz $+1$. Em virtude dêste conhecimento podemos baixar o grau da equação dividindo-a por $x - 1$. (Teorema III).

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x-1)\,(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)$$

os coeficientes a_0, a_1 e a_2 podem ser calculados pela regra de Rufini. O resto deverá ser zero.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -6 \\ & 1 & 3 & +6 \\ \hline 1 & 3 & 6 & \lfloor 0 \end{array}$$

Resolvendo agora a equação $x^2 + 3x + 6 = 0$ obêm-se as restantes raízes da equação proposta.

Faremos ainda uma aplicação do método dos coeficientes indeterminados na resolução do seguinte problema:

Decompor em fracções simples a fracção algébrica $\dfrac{2x+3}{(x-1)\,(x+2)^2}$. Êste problema consiste em transformar a fracção dada numa soma de fracções cujos denominadores são os factores binómios que resultam da decomposição do denominador da fracção dada. No exemplo presente os factores binómios são $x-1$, $x+2$ e $(x+2)^2$. No caso do denominador não estar escrito com a forma de produto de factores binómios, é necessário determinar os seus zeros, para se conhecerem os factores binómios que são os denominadores das fracções pedidas. No caso presente pretende-se determinar A, B e C com a condição de ser:

$$\frac{2x+3}{(x-1)\,(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Desembaracemos de denominadores:

$$2x + 3 = A\,(x+2)^2 + B\,(x+2)\,(x-1) + C\,(x-1)$$

ou

$$2x + 3 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx - C.$$

Vamos agora ordenar o 2.º membro da igualdade anterior e, em seguida, identificar os coeficientes dos termos do mesmo grau, visto esta igualdade dever ser verdadeira qualquer que seja x.

$$2x + 3 = (A+B)\,x^2 + (4A + B + C)\,x + 4A - 2B - C$$

e

$$A + B = 0; \quad 4A + B + C = 2; \quad 4A - 2B - C = 3$$

donde

$$B = -5/9, \quad C = 1/3 \quad \text{e} \quad A = 5/9.$$

4 — Problemas propostos de aplicação do método dos coeficientes indeterminados.

— Achar o cociente e o resto da divisão

$$(3x^4-5x^2+6x+1):(x^2-3x+4)\,.$$

R: $\quad Q=3x^2+9x+10\,,\ R=-39\,.$

— Determinar m e n de modo que o polinómio x^4-3x^3+mx+n seja divisível por x^2-2x+4.

R: $\quad m=8\,,\ n=-24\,.$

— Achar a raiz quadrada do polinómio $4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$. R: $2x^2+3x-1$.

— Achar a condição necessária e suficiente para que a expressão $\dfrac{ay+bx+c}{a'y+b'x+c'}$ seja independente de x.

R: $a/a'=b/b'=c/c'$.

— Achar a condição necessária e suficiente para que o trinómio ax^2+bx+c, seja um quadrado perfeito.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo — 4 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 4.

I

1 — Determine m de modo que a equação: $(m-5)\,x^4-4mx^2+m-2=0$ tenha tôdas as raízes reais. R: *A resolvente deverá ter duas raízes positivas, devendo* m *satisfazer às condições seguintes:* $4m^2-(m-2)(m-5)\geq 0$; $4m/(m-5)>0$; $(m-2)/(m-5)>0$. *Destas relações se deduz* $m\leq -10/3$; $m>5$. *Podemos ainda procurar valores de* m *para os quais fôssem nulas as quatro raízes ou duas apenas (na resolvente, duas nulas ou uma nula e outra positiva, respectivamente); mas, no problema presente, para nenhum valor de* m *se verificaria qualquer dêstes casos.*

2 — Enuncie os teoremas que relacionam os coeficientes de uma equação do 2.º grau com as suas raízes e o teorema que permite decompor um trinómio do 2.º grau em factores binómios.

3 — Um grupo de pessoas alugou um carro por 210$00. No momento da partida apareceram mais 2 passageiros. Repartindo por todos o preço do aluguer, cada um dos passageiros do primeiro grupo pagou menos 12$00. ¿Quantas pessoas tinha o grupo inicial? R: *Da equação* $\dfrac{210}{x}=\dfrac{210}{x+2}+12$ *ou* $x^2+2x-35=0$ *se conclue que, inicialmente, o grupo tinha 5 pessoas.*

II

4 — Verifique a identidade:

$$\operatorname{sen} 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}\,.$$

$$\text{R}:\ \frac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}=\frac{1-\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}=\frac{4\operatorname{tg}x}{2\,(1+\operatorname{tg}^2x)}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}x}{\sec^2x}=2\operatorname{tg}x\cos^2x=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x\,.$$

5 — Escreva a expressão geral dos ângulos cujo coseno é 1/2 e as expressões dos ângulos cuja tangente é -1. R: $2n\pi\pm\pi/3$; $n\pi+3\pi/4$.

6 — Um triângulo isósceles tem de base 27,12 metros e de perímetro 103,75 metros. Usando o cálculo logarítmico, determine o ângulo oposto à base. R: *Designando por* 2α *o ângulo oposto à base temos:*

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{27{,}12/2}{(103{,}75-27{,}12)/2}=\frac{27{,}12}{76{,}63}\,.$$

Aplicando logaritmos: $\log\operatorname{sen}\alpha=\log 27{,}12+\operatorname{colog} 76{,}63=1{,}43329+\bar{2}{,}11560=\bar{1}{,}54889$; $\alpha=20^\circ\,43'\,53'',3$ *ou* $2\alpha=41^\circ\,27'\,10'',6$.

III

7 — Figure uma circunferência de centro O e um diâmetro AB da circunferência. Trace duas perpendiculares ao diâmetro nos seus extremos A e B. Uma tangente à circunferência num ponto qualquer M desta linha corta as perpendiculares respectivamente nos pontos P e Q. Demonstre que: 1.º $\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{BQ}$, 2.º O ângulo POQ é recto. R: *Por ser* $[AOP]=[MOP]$ *e* $[BOQ]=[MOQ]$ *temos:* 1.º $\overline{PA}=\overline{PM}$, $\overline{QB}=\overline{QM}$. *Donde:* $\overline{PA}+\overline{QB}=\overline{PM}+\overline{QM}$ *ou* $\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{BQ}$, q.e.d. 2.º $P\hat{O}Q=90^\circ$ *por serem os seus lados as bissectrizes dos ângulos adjacentes suplementares* $A\hat{O}M$ *e* $M\hat{O}B$.

8 — Numa circunferência de raio r está inscrito um quadrado $[ABCD]$. Supõe-se que a figura experimenta uma rotação de 180º em tôrno de um eixo EE' paralelo a BC e passando pelo centro O da circunferência. Deduza, em função de r, a expressão do volume limitado exteriormente pela superfície esférica gerada pela circunferência e interiormente pela superfície gerada pelo quadrado. R: *Gerando a circunferência uma superfície esférica de raio* r *e o quadrado uma superfície cilíndrica de raio da base igual a* $r/\sqrt{2}$ *e altura dupla, tem-se:* $V=V_e-V_c=4/3\cdot\pi r^3-\pi r^2/2\cdot r\sqrt{2}=\pi r^3\,(8-3\sqrt{2})/6$.

Soluções dos n.os 1 a 8 de Fernando Dias Agudo, aluno do 1.º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus — Outubro de 1943. — Ponto n.º 3.

9 — Resolva a inequação $(x^2+2x):(3-2x-x^2)<0$. R: *As raizes do numerador são* $x_1=0$ *e* $x_2=-2$ *e as do denominador* $x_1=1$ *e* $x_2=-3$. *Por isso o numerador será positivo (sinal do coeficiente do têrmo em* x^2*) para valores de* x *superiores a* 0 *ou inferiores a* -2; *e negativo para os valores de* x *compreendidos entre* -2 *e* 0. *O denominador será negativo (sinal do coeficiente de* x^2*) para valores interiores ao intervalo das raizes, isto é, tais que* $-3<x<1$, *e positivo para os valores de* x *tais que ou* $x<-3$ *ou* $x>1$. *A fracção será negativa para os valores de* x *que dão ao numerador o sinal contrário ao do denominador, que pela análise anteriormente feita se vê serem os valores de* x *tais que* $x>1$, $x<-3$ *e* $-2<x<0$.

10 — Defina combinações de m objectos p a p e escreva a fórmula que permite calcular o seu número. R: ${}^mC_p=m(m-1)(m-2)\cdots(m-p+1):p!$

11 — Determine o logarítmo no sistema de base 4 de um número cujo logarítmo no sistema de base 2 é 12. R: *Como* $\log_b a=\log_c a:\log_c b$ *e como* $\log_2 4=2$ *pois é* $2^2=4$ *e* $\log_2 x=12$ *vem* $\log_4 x=12:2=6$.

12 — Determine a medida de um dos ângulos iguais de um triângulo isósceles cujo perímetro mede 58,6 metros e cuja base mede 17 metros. R: *Um dos lados iguais tem por medida* $(58{,}6-17):2=20{,}8\,\mathrm{m}$ *e metade da base* $8{,}5\,\mathrm{m}$. *Se considerarmos o triângulo rectângulo de hipotenusa igual a um dos lados iguais do triângulo dado e por um dos catetos metade do lado da base, e se designarmos por* α *o ângulo da base pedido será* $\cos\alpha=8{,}5:20{,}8$ *e por isso* $\log\cos\alpha=\log 8{,}5+\mathrm{colg}\,20{,}8=0{,}92942+\bar{2}{,}68194=\bar{1}{,}61136$ *e* $\alpha=65°\,52'\,45'',5$.

13 — Determine o valor de $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$ sabendo que $\mathrm{cotg}\,\beta=3\,\mathrm{cotg}\,\alpha=\sqrt{3}$. R: *Como* $\mathrm{cotg}\,\beta=\sqrt{3}$ *é* $\mathrm{tg}\,\beta=\sqrt{3}/3$ *e* $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$ *donde* $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=(\sqrt{3}-\sqrt{3}/3):(1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/3)=\sqrt{3}/3$.

14 — Deduza a relação que existe entre a área de um octaedro regular e a do círculo circunscrito a uma das suas faces. R: *No octaedro regular as faces são triângulos equiláteros e a área do triângulo equilátero em função do raio do circulo circunscrito é* $3R^2\sqrt{3}:4$ *e a do octaedro será* $6R^2\sqrt{3}$; *como a área do círculo é* πR^2 *a relação entre as duas áreas é* $6R^2\sqrt{3}:\pi R^2=6\sqrt{3}:\pi$.

15 — Desenhe um ângulo agudo inscrito num arco $\overline{AB}$ de uma circunferência e o diâmetro que passa pelo vértice do ângulo. Indique: como varia a medida do ângulo quando, continuando os seus lados a passar por A e B, o vértice percorre o diâmetro em que existe; qual a posição que ocupa o vértice quando a medida do ângulo fôr dupla do seu valor primitivo, e qual a relação que existe entre êste valor e o da medida do ângulo quando o seu vértice coincide com a extremidade do diâmetro considerado. R: *O ângulo cresce desde um valor inicial* α *igual a metade da medida do ângulo ao centro cujos lados passam pelo ponto* A *e* B *até atingir, quando o vértice atinge o centro da circunferência, o valor* 2α; *continua a crescer até o valor* π, *qunndo os lados se tornam perpendiculares ao diâmetro sôbre que existe o vértice; daí por diante diminui até o vértice atingir novamente a circunferência momento em que atinge o valor* $\pi-\alpha$.

Soluções dos n.os 9 a 15 de J. da Silva Paulo.

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto — Outubro de 1943. — Ponto n.º 4.

16 — Simplifique a expressão: $(a^{-1}b^{3/2}x)^{1/3}:\sqrt{a^3by}$. R: $1/a\cdot\sqrt[6]{x^2:a^5y^3}$.

17 — Resolva a inequação

$$(x^2-4x-6):(x^2+7x+7)>0\,.$$

R: *Consideremos a hipótese de serem positivos ambos os termos da fracção. As raizes dos trinómios que figuram no numerador e no denominador são, respectivamente,* $x=-2\pm\sqrt{10}$ *e* $x=(-7\pm\sqrt{21}):2$. *Assim, o numerador será positivo para os valores de* x *que são dados por* $x>-2+\sqrt{10}$ *e* $x<-2-\sqrt{10}$, *e o denominador para os valores de* x *que verificam as desigualdades* $x>(-7+\sqrt{21}):2$ *e* $x<(-7-\sqrt{21}):2$ *e, portanto, a fracção será positiva para os valores* $x>-2+\sqrt{10}$ *e* $x<(-7-\sqrt{21}):2$.

Consideremos agora a hipótese de serem negativos ambos os termos da fracção. O numerador será negativo para os valores de x *que verifiquem a dupla desigualdade* $-2-\sqrt{10}<x<-2+\sqrt{10}$, *e o denominador para os valores de* x *que satisfaçam a* $(-7-\sqrt{21}):2<x<(-7+\sqrt{21}):2$, *e a fracção será positiva para os valores de* x *que verifiquem a dupla desigualdade:* $-2-\sqrt{10}<x<(-7+\sqrt{21}):2$.

18 — Determine o ângulo que faz com a base qualquer das faces laterais duma pirâmide recta de base quadrada, com tôdas as arestas iguais. R: *Como as arestas da pirâmide são tôdas iguais, as faces laterais são triângulos equiláteros. Se fizermos passar pelo vértice* V *da pirâmide um plano perpendicular a uma aresta da base e, se designarmos por* M *o pé desta aresta nesse plano, ter-se-á, sendo* O *o pé da perpendicular baixada de* V *sôbre a base:* $\cos\alpha=\overline{OM}:\overline{VM}$ *sendo* α *o rectilíneo do diedro formado pela base da pirâmide* *com cada uma das faces. Mas* $\overline{OM}=1/2$ *e* $\overline{VM}=1\sqrt{3}/2$ *donde* $\cos\alpha=1/2:1\sqrt{3}/2=1/\sqrt{3}$ *e* $\alpha=\text{arc}\cos 1/\sqrt{3}$.

19 — Determine por logaritmos com 5 decimais e com a aproximação que êstes permitem, os valores de x que satisfazem à equação

$$\operatorname{tg} x=-\sqrt{0{,}0014752\times\cos 300^\circ\, 12'\, 50''}.$$

R: $\operatorname{tg}(-x)=\sqrt{0{,}0014752\cdot\cos 59^\circ\, 47'\, 10''}$,
$\log\operatorname{tg}(-x)=1/2\cdot(\log 0{,}0014752+\log\cos 59^\circ\, 47'\, 10'')$,
$\log\operatorname{tg}(-x)=1/2\cdot(\bar{3}{,}16885+\bar{1}{,}70176)=\bar{2}{,}43531$
donde $x=-1^\circ\, 33'\, 38''$.

A expressão geral dos arcos é

$$x=-1^\circ\, 33'\, 38''\pm K\cdot 180^\circ.$$

20 — Defina poliedro. Diga a que condições tem de satisfazer para ser regular e dêstes enumere os que conhece.

21 — Faça o desenvolvimento de $(1-1/x)^5$.
R: $1-5/x+10/x^2-10/x^3+5/x^4-1/x^5$.

22 — Diga sem efectuar a operação quais os restos da divisão do número 8257 por 4 e por 11. R: *Por* 4: $8257=\dot{4}+5\times 10+7=\dot{4}+5(\dot{4}+2)+7=\dot{4}+17=\dot{4}+1$. *Por* 11: $8257=8\cdot 1000+2\times 100+5\times 10+7=8(\dot{11}-1)+2(\dot{11}+1)+5(\dot{11}-1)+7=\dot{11}-8+2-5+7=\dot{11}-13+9=\dot{11}+20-13=\dot{11}+7$
Os restos são respectivamente 1 *e* 7 *e no cálculo está indicada a maneira como se obtêm.*

23 — A fórmula que determina a área dum triângulo mostra que as alturas dêste são inversamente proporcionais às respectivas bases. Partindo desta relação, como é que, com a régua e o compasso, construia o triângulo, dadas as três alturas? Qual o método ou métodos geométricos que empregou na resolução do problema? R: *Sejam* h_1, h_2 *e* h_3 *as alturas dadas e* b_1, b_2 *e* b_3 *os lados do triângulo procurado correspondentes àquelas alturas. De* $b_1 h_1=b_2 h_2=b_3 h_3$ *deduz-se* $b_1/b_2=h_2/h_1$. *Construamos um triângulo* [ABC] *de lados iguais a* h_1, h_2 *e* h_3. *Nêste triângulo verifica-se a seguinte relação entre os lados* h_1 *e* h_2 *e as alturas correspondentes* h_1' *e* h_2': $h_1/h_2=h_2'/h_1'$ *ou* $h_1'/h_2=h_2'/h_1$. *Construamos o triângulo homotético do triângulo* [ABC] *de razão igual a* h_2/h_1', *em relação ao ponto* D *pé da altura relativa ao lado* $\overline{AC}$. *Êste triângulo é o triângulo pedido. O homotético do ponto* C *é o ponto* C′ *tal que* $\overline{DC'}=h_2$. *Com efeito, dos triângulos* [ABC] *e* [A′ B′ C′] *serem homotéticos conclue-se que* $b_2/h_1=h_2/h_1'$ *e* $b_1/h_2=h_2/h_1'$ *visto a razão ser* h_2/h_1' *e portanto* $b_2/h_1=b_1/h_2$ *e* $b_2 h_2=b_1 h_1$. *O problema foi resolvido pelo emprêgo do método de transformação de figuras por homotética.*

Soluções dos n.os 16 a 23 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Escola Superior Colonial — Agôsto de 1943. — 1.ª prova.

Álgebra

24 — Determine os valores de x que verificam simultâneamente as desigualdades: $3x-\dfrac{1-6x}{4}<2$ e $x-\dfrac{3x-1}{2}<1$. R: *A 1.ª desigualdade é equivalente a* $x<1/2$ *e a segunda a* $-x<1$; *logo os valores que simultâneamente as verificam são os que satisfazem à dupla desigualdade* $-1<x<1/2$.

25 — Determine a função inversa da função $y=\log_a x+1$. R: $x=a^{y-1}$.

26 — Calcule $\log(\log 4{,}56)$. R: $\log 4{,}56=0{,}65896$ *e* $\log 0{,}65896=\bar{1}{,}81886$.

27 — Enuncie o teorema que permite escrever:

$$\sqrt[12]{a^2 x^2 y^6}=\sqrt[6]{axy^3}.$$

Trigonometria

28 — Sabendo que $\operatorname{tg} x=\sqrt{2}$, calcule o valor de $\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$. R: $\cos^2 x=(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-1}=(1+2)^{-1}$ *e por isso* $\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x=1-1/3=2/3$.

29 — Reduza ao 1.º quadrante o cálculo de $\cos 1943^\circ\, 32'$. R: $\cos 1943^\circ\, 32'=-\cos 36^\circ\, 28'$.

Geometria

30 — O triângulo $[ABC]$ tem a base e a altura duplas da base e da altura do triângulo $[A'\,B'\,C']$. Calcule a razão entre as áreas do primeiro e do segundo. R: Ar [ABC] : Ar [A′ B′ C′] $=1/2\cdot 2b\times 2h:1/2\, bh=4$.

31 — Existe o triedro em que os três ângulos medem respectivamente 65°, 105° e 185°? Justifique a resposta. R: *Se se trata dos ângulos das faces existe, pois a soma dêstes deve estar compreendida entre* 0° *e* 360°. *Se trata dos ângulos diedros não poderá existir tal triedro, pois a soma daquêles diedros deve ser maior que* 2 *e menor que* 6 *rectos, e qualquer ângulo maior que a diferença dos outros dois e menor que a sua soma.*

Soluções dos n.os 24 a 31 de J. da Silva Paulo.

Licenciatura em Ciências Geográficas — Ponto n.º 3

32 — Discuta a natureza das raizes da equação $x^2-x=\sqrt{2}$. R: *Aplicando a fórmula resolvente tem-se:* $\alpha=1/2\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}/2$. *As raizes são reais e, mais particularmente, irracionais.*

Obs. — No enunciado em vez da palavra «discuta» deve ler-se «determine» porque, uma vez que os coeficientes da equação não dependem de parâmetros, não há que discutir a natureza das raizes.

33 — Escreva na base 3 os números 23 e 24 da base 10. R: *São respectivamente os números* 212 *e* 220.

34 — Num triângulo rectângulo, cujo cateto tem 16,3 metros e a hipotenusa 33,5, calcule o ângulo oposto ao cateto dado. R: $16{,}3=33{,}5 \operatorname{sen} \widehat{C}$, $\log \operatorname{sen} \widehat{C}= =\log 16{,}3+\operatorname{colog} 33{,}5=1{,}21219+\bar{2}{,}47496=\bar{1}{,}68715$, $\widehat{C}=29^{\circ}\,6'\,57''{,}7$.

Soluções dos n.os 32 a 34 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Instituto Superior de Agronomia — 2 de Agôsto de 1943 — Ponto n.º 3.

I

35 — Um joalheiro prepara uma liga de ouro e cobre com o intuito de obter 250 gramas de ouro com o toque de 0,900. ¿Que pêso de ouro e cobre deverá tomar, sabendo que durante a fusão daqueles metais se perde 1 % de ouro e 2 % de cobre? R: *Para ter o toque desejado,* 250 gr *da liga conterão* $250\times 0{,}9= =225$ gr *de ouro e* $250\times 0{,}1=25$ gr *de cobre. Designando por* x *e por* y, *respectivamente, os pesos de ouro e de cobre pedidos ter-se-á* $x-x/100=225$ *e* $y-2y/100= =25$ *donde* $x=\frac{225\times 100}{99}\sim 227{,}27$ gr *e* $y=\frac{25\times 100}{98}= =25{,}51$ gr.

36 — ¿Que valor se deve atribuir a m para que a equação $(m-1)\,x^2-(2m-1)\,x+4=0$ admita raízes de sinais contrários, sendo negativa a de maior valor absoluto? R: *Os valores de* m *devem tornar negativos o produto e a soma das raízes, isto é:* $\frac{4}{m-1}<0\rightarrow m<1$ *e* $\frac{2m-1}{m-1}<0\rightarrow 1/2<m<1$, *sendo pois* $1/2<m<1$.

b) Dada a função $x=\frac{2^y-1}{3}$ escreva y, explicitamente, como função de x e determine em seguida os valores da variável x que tornam a função y negativa. R: $y=\log_2(3x+1)$. *É* $y<0$ *para* $0<3x+1<1$ *ou* $-1/3<x<0$.

II

37 — Calcule todos os ângulos α compreendidos entre 2π e 5π radianos que satisfazem à relação $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}875$. (Utilize as tábuas de valores naturais). R: *As tábuas de valores naturais dão-nos para* $\operatorname{sen}\alpha_1= =0{,}875\rightarrow\alpha_1=61^{\circ}$. *Os arcos* α *tais que* $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}875$ *são:* $180^{\circ}+61^{\circ}+k\,360^{\circ}$ *e* $360^{\circ}-61^{\circ}+k\,360^{\circ}$. *Entre* 360° *e* 900° *há as determinações* 601° *e* 659°.

38 — *a)* Sendo $\operatorname{colog}\sqrt[5]{\operatorname{tg}\alpha}=0{,}06796$ calcule α, supondo que α é um ângulo do 3.º quadrante. (Utilize a tábua de logarítmos). R: *De* $\operatorname{colog}\sqrt[5]{\operatorname{tg}\alpha}=0{,}06796$ *deduz-se* $\operatorname{colog}\operatorname{tg}\alpha=5\times 0{,}06796=0{,}33980=\log\operatorname{cotg}\alpha$. *Das tábuas tira-se:* $\alpha_1=24^{\circ}\,34'\,28''{,}2$ *e portanto* $\alpha=180^{\circ}+\alpha_1=204^{\circ}\,34'\,28''{,}2$.

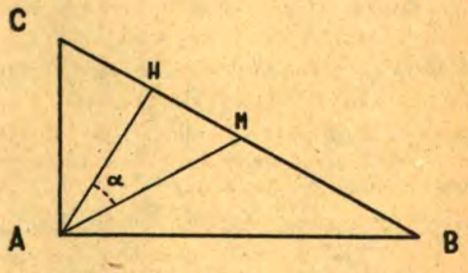
b) Sendo dado o triângulo $[ABC]$ de que se conhecem os lados a e b e o ângulo que êles formam $\hat{C}$, deduza a expressão da área do triângulo em função daqueles três elementos a, b e C. R: *A expressão da área* S *do triângulo é* $S=1/2\cdot ab \operatorname{sen} C$. *Basta notar, por exemplo, que a altura relativa ao lado* a *é* b sen C.

III

39 — Um plano secante determina numa superfície esférica de raio R duas calotes cujas áreas estão entre si como 1 está para 2. Exprima, em função de R, a distância do plano ao centro da esfera. R: *Área da calote* $S=2\pi Rh$. *Uma calote tem por altura* $R-d$ *e outra* $R+d$ *sendo* d *a distância referida.*

$$\frac{2\pi R\,(R+d)}{2\pi R\,(R-d)}=2,\quad R+d=2\,(R-d),\quad 3d=R,\quad d=R/3.$$

40 — Demonstre que, em qualquer triângulo rectângulo, a diferença entre os ângulos agudos é igual ao



ângulo formado pela altura e a mediana tiradas do vértice do ângulo recto. R: *Tese* $\hat{C}-\hat{B}=\alpha$. *Basta notar que* $H\hat{A}B=\hat{C}$ *(agudos e de lados perpendiculares),* $M\hat{A}B=\hat{B}$ *(visto ser isósceles o triângulo* [AMB]*) e finalmente que* $\alpha=H\hat{A}B-M\hat{A}B=\hat{C}-\hat{B}$, q. e. d.

Nota — Em cada um dos grupos I e II são de resposta obrigatória o problema n.º 1 e uma das questões do n.º 2. É também de resposta obrigatória uma das questões do grupo III.

Soluções dos n.os 35 a 40 de Manuel Zaluar.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras 9 de Outubro de 1943. — Ponto n.º 3.

Aritmética

41 — Simplifique a fracção $\frac{n\,!\;p\,!}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n\;2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2p}$ e determine todos os valores possíveis, inteiros e positivos, de n e p tais que a fracção esteja compreendida entre $\frac{1}{1000}$ e $\frac{1}{2000}$. R: *A fracção dada pode escre-*

ver-se $\dfrac{n!\,p!}{2^n\cdot n!\,2^p\cdot p!}=\dfrac{1}{2^{n+p}}$ *e, portanto, terá que ser* $1000<2^{n+p}<2000$ *ou, como fàcilmente se vê,* $n+p=10$, *donde*

$$n=1,2,3,4,5,6,7,8 \text{ e } 9$$
$$p=9,8,7,6,5,4,3,2 \text{ e } 1.$$

Álgebra

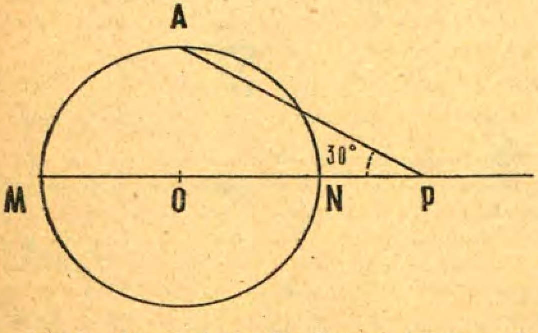
42 — Calcule os termos duma proporção contínua sabendo que a soma dos extremos é a e a soma dos quadrados dos extremos é b. R: *Seja a proporção* $x:y=y:z$. *Entre os seus têrmos verificar-se-ão as relações* $xz=y^2$, $x+z=a$ e $x^2+z^2=b$. *Desta última relação, conclui-se, fàcilmente, que* $(x+z)^2-2xz=b\rightarrow$ $\rightarrow a^2-2y^2=b\rightarrow y=\pm\sqrt{(a^2-b)/2}$. *Tendo em conta êste resultado, as duas primeiras relações:* $xz=(a^2-b)/2$ *e* $x+z=a$ *conduzirão à equação* $X^2-aX+(a^2-b)/2=0$ *cujas soluções são:* $X_1=x=\left[a+\sqrt{2b-a^2}\right]/2$ *e* $X_2=z=\left[a-\sqrt{2b-a^2}\right]/2$.

Cálculo Numérico

43 — Calcule o volume da esfera circunscrita ao cubo de aresta 22,01 metros. R: *Como a diagonal dum cubo inscrito numa esfera é o diâmetro desta, é fácil ver que* $R=a\sqrt{3}/2$, *sendo* R *o raio da esfera e* a *a aresta do cubo. Portanto:* $V=4/3\cdot\pi R^3=\pi a^3\sqrt{3}/2=$ $=\pi\cdot(22{,}01)^3\cdot\sqrt{3}/2$. *Tomando logaritmos:* $\log V=$ $=\log\pi+3\log 22{,}01+1/2\cdot\log 3+\operatorname{colog} 2=0{,}49715+$ $+4{,}02786+0{,}23856+\bar{1}{,}69897=4{,}46254$ *donde* $V=290{,}093\ m^3$.

Geometria Plana

44 — *a)* Definição de lugar geométrico; exemplos de alguns lugares geométricos importantes no plano e no espaço. *b)* Dada a circunferência de raio $\overline{OM}=r$ da figura junta, determinar a distância $\overline{OP}$ de modo tal que o segmento $\overline{PA}$ seja igual ao diâmetro da circunferência.



R: *Como o ângulo em* P *é de* 30° *e* $\overline{PA}=2r$, *baixando de* A *uma perpendicular sôbre* $\overline{MN}$, *o triângulo rectângulo resultante pode ser considerado como metade dum triângulo equilátero de lado* 2r *e portanto será* O *o pé dessa perpendicular e* $\overline{OA}=r$. *Em tal triângulo rectângulo ter-se-á:* $\overline{OP}=r\sqrt{3}$.

Geometria no Espaço

45 — É dado um triedro trirectângulo de vértice O e um segmento de recta $\overline{OM}$, sendo M um ponto no interior do triedro. Calcule, em função do comprimento a do segmento $\overline{OM}$, a soma dos quadrados das projecções de $\overline{OM}$ sôbre as três faces do triedro. R: *Qualquer que seja o ponto M no interior do triedro trirectângulo considerado,* $\overline{OM}=a$ *pode ser considerado como a diagonal dum paralelipípedo rectângulo cujas faces são respectivamente paralelas às faces do triedro. As projecções de* $\overline{OM}$ *sôbre estas não são mais que as diagonais das faces do paralelipípedo. Designando por* x, y *e* z *três arestas do paralelipípedo concorrentes no vértice* O *e por* d_1, d_2 *e* d_3 *as diagonais das suas faces definidas repectivamente pelas arestas* (x, y), (y, z) *e* (z, x), *que, como dissemos, são afinal as projecções de* $\overline{OM}$ *sôbre as três faces do triedro, teremos as relações seguintes:* $x^2+y^2=d_1^2$, $y^2+z^2=d_2^2$ *e* $z^2+x^2=d_3^2$ *que somadas ordenadamente, darão:* $2(x^2+y^2+z^2)=$ $=d_1^2+d_2^2+d_3^2$. *Tendo em conta que, num paralelipípedo rectângulo de arestas* x, y *e* z *concorrentes no mesmo vértice, é* $x^2+y^2+z^2=a^2$ *(sendo* a *o comprimento da sua diagonal), virá:* $d_1^2+d_2^2+d_3^2=2a^2$.

Trigonometria

46 — Mostre que o produto

$$P=(\operatorname{sen} x+\operatorname{cosec} x)\cdot(\cos x+\sec x)\cdot(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)$$

é positivo, qualquer que seja x real. R: *Com efeito,*

$$P=\frac{\operatorname{sen}^2 x+1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\cos^2 x+1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg} x}=$$
$$=\frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1+\cos^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}>0,$$

qualquer que seja x *real.*

NOTA — São obrigados quatro pontos, entre os quais o n.º 4.

Soluções dos n.ºs 41 a 46 de Orlando Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Outubro de 1943 — Ponto n.º 4.

47 — Um campo de forma rectangular tem o comprimento triplo da largura. Para facilidade de exploração, foi o campo dividido em talhões iguais. Mais tarde, o número de talhões diminuíu de 2, o que fêz aumentar de 20 ares a superfície de cada talhão. Anos depois, houve que abrir três valas da mesma largura, uma paralela ao comprimento do campo e duas paralelas à largura, que cobriram uma superfície de 2.982 metros quadrados. Calcule as dimensões do campo antes da abertura das valas e a largura destas, sabendo que o número de talhões em que o campo foi inicialmente dividido é 3/5 do número que exprime, em decâmetros, a largura do campo. R: *Seja* x *a largura do campo expressa em decâmetros. A área do campo é* $3x^2$. *Por outro lado o número de talhões que havia inicialmente é* $3x/5$ *e como a diminuição de* 2 *talhões fêz aumentar de* 20 *ares a área de cada talhão, a área total do campo é* $3x^2=(3x/5-2)\times(3x^2:3x/5+20)$ *o que dá* $x=20$ dam. *Por outro lado se fôr* y *a largura das valas será* $3xy+2xy=2982$ *se exprimirmos* x *e* y *em metros o que dá* $1000\,y=2982$ *e* $y=2{,}982$ m.

48 — Determine os valores do ângulo α, positivos e inferiores a $360°$, pela condição das raízes da equação $x^4-\operatorname{sen}\alpha\, x^2+9/400=0$ ficarem em progressão aritmética. R: *Se duas das raízes forem* x_1 *e* x_2 *e tais que* $|x_1|\neq|x_2|$ *as outras duas serão* $-x_2$ e $-x_1$. *Podemos supor ser* x_1 *a maior das raízes e então será* $x_1>x_2>-x_2>-x_1$; *estando estas em progressão aritmética deverá ser* $x_2-x_1=-x_2-x_2$ *ou* $3x_2=x_1$; *por outro lado* $x_1^2+x_2^2=\operatorname{sen}\alpha$ *e* $x_1^2\,x_2^2=9/400$. *O sistema destas três equações resolvido dá:* $\operatorname{sen}\alpha=\pm1/2$ *e por isso* $\alpha=30°$ *ou* $150°$ *ou* $210°$ *ou* $330°$.

49 — Verifique a identidade: $\operatorname{tg}(\pi/4+a/2)+\operatorname{cotg}(\pi/4+a/2)=2\sec a$. R: *Como é* $\operatorname{tg}(\pi/4+a/2)=(1+\operatorname{tg}a/2):(1-\operatorname{tg}a/2)$ *e* $\operatorname{cotg}(\pi/4+a/2)=(1-\operatorname{tg}a/2):(1+\operatorname{tg}a/2)$ *o primeiro membro da identidade pode escrever-se* $[(1+\operatorname{tg}a/2)^2+(1-\operatorname{tg}a/2)^2]:(1-\operatorname{tg}^2a/2)=2\,(1+\operatorname{tg}^2a/2):(1-\operatorname{tg}^2a/2)=2\cdot(\cos^2a/2+\operatorname{sen}^2a/2):(\cos^2a/2-\operatorname{sen}^2a/2)=2\,\dfrac{1}{\cos a}=2\sec a$.

50 — O quadrilátero $[ABCD]$, em que o ângulo $B\widehat{C}D$ é recto e o vértice A projecta-se ortogonalmente sôbre $\overline{BC}$ no meio de $\overline{BC}$, está inscrito num círculo de raio R. Exprima em função de R e do lado $\overline{CD}$, os lados, as diagonais e a área dêste quadrilátero. R: *Como o ângulo* $B\widehat{C}D$ *é recto a diagonal* BD *é um diâmetro da circunferência e por isso a diagonal* $\overline{BD}=2R$ *e o lado* $\overline{BC}=\sqrt{4R^2-\overline{CD}^2}$. *Se fôr* M *o ponto médio de* $\overline{BC}$ *onde se projecta ortogonalmente o ponto* A, *o triângulo* $[AMB]$ *é recto em* M *e o lado* $\overline{MB}=\overline{BC}:2=\left(\sqrt{4R^2-\overline{CD}^2}\right):2$; *além disso neste triângulo o lado* $\overline{AM}$ *existe sôbre um diâmetro da circunferência visto ser perpendicular ao meio da corda* $\overline{BC}$, *e por isso se fôr* O *o centro da circunferência é* $\overline{AM}=R+\overline{OM}$ *e* $\overline{OM}=\overline{CD}:2$, *visto os triângulos* $[BOM]$ *e* $[BCD]$ *serem homotéticos e a razão de homotetia ser* 2. *Assim* $\overline{AM}=R+\overline{CD}:2$. *O lado* $\overline{BA}$, *hipotenusa do triângulo rectângulo* $[AMB]$, *é então dada por*

$$\overline{BA}=\sqrt{(4R^2-\overline{CD}^2):4+R^2+\overline{CD}^2:4+R\times\overline{CD}}=$$
$$=\sqrt{2R^2+R\times\overline{CD}}\,.$$

A diagonal $\overline{CA}$ *é evidentemente igual a* $\overline{BA}$, *e finalmente o lado* $\overline{AD}$, *cateto do triângulo rectângulo* $[DAB]$, *pois o ângulo em* A *é recto, tem por medida*

$$\overline{AD}=\sqrt{4R^2-(2R^2+R\times\overline{CD})}=\sqrt{2R^2-R\times\overline{CD}}\,.$$

A área pode escrever-se sob a forma:

$$a=1/2(\overline{CD}\times\overline{BC}+\overline{AD}\times\overline{AB})=1/2(\overline{CD}+R)\sqrt{4R^2-\overline{CD}^2}\,.$$

51 — Um triângulo rectângulo isósceles $[ABC]$ faz uma rotação completa em tôrno de um eixo situado no seu plano, passando pelo vértice A do ângulo recto e exterior ao triângulo. Sabendo que o lado $\overline{AB}$ forma com o eixo o ângulo α, exprima em função de $\overline{AB}$ e de α o volume do sólido gerado. R: *O Teorema de Guldin diz-nos que: «quando uma figura plana gira em tôrno de um eixo contido no seu plano, eixo que não corte a figura, gera-se um sólido cujo volume é igual ao produto da área da figura geradora pelo perímetro da circunferência descrita pelo baricentro da dita figura». Ora como o baricentro do triângulo se encontra no ponto de encontro das medianas e êste está situado a dois terços de cada uma delas contados a partir do vértice, o baricentro* G *do triângulo dado dista de* A *de um comprimento* $\overline{GA}=\overline{AB}\sqrt{2}:3$. *Baixemos de* G *uma perpendicular sôbre o eixo* e *e seja* P *o pé dessa perpendicular em* e. *No triângulo rectângulo* $[APG]$ *é* $P\widehat{A}G=\alpha+45°$, *e o lado* $\overline{PG}$ *é o raio da circunferência descrita pelo baricentro, será por isso*

$$\overline{PG}=(\overline{AB}\sqrt{2}:3)\operatorname{sen}(\alpha+45°)\,.$$

A área do triângulo $[ABC]$ *é* $\overline{AB}^2/2$. *Temos pois todos os elementos que nos permitem calcular o volume pedido. Êste é assim dado pela expressão:*

$$V=1/2\ \overline{AB}^2\times2\pi\cdot(\overline{AB}\sqrt{2}:3)\operatorname{sen}(45°+\alpha)=$$
$$=\pi/3\cdot\overline{AB}^3\sqrt{2}\operatorname{sen}(45°+\alpha)=\pi/3\cdot\overline{AB}^3(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha).$$

52 — As faces de um octaedro convexo são triângulos cujos vértices são os centros das faces de um paralelipípedo rectângulo. Exprima em função das dimensões do paralelipípedo o volume do octaedro e a área da sua superfície. R: *Os três eixos do octaedro têm por medidas respectivamente* a, b, c *se forem estas as medidas das arestas e por isso o seu volume é* $V=abc:6$. *Para determinarmos a área do octaedro notemos que:* 1.°) *tôdas as faces do octaedro são triângulos isósceles* *iguais :* 2.º) *o plano que contém dois eixos do octaedro determina neste um losango ;* 3.º) *a altura dum dos triângulos isósceles forma com o segmento que une o centro do octaedro ao meio do lado base do triângulo, e com a metade do terceiro eixo, um triângulo rectângulo de que essa altura é a hipotenusa ;* 4.º) *que o segmento que une o centro do octaedro com o meio da base do triângulo face do octaedro, é igual a metade dessa base, a qual é o lado do losango a que já nos referimos. Assim se os dois eixos que definirem o plano forem os que têm por medida* a *e* b *terá o lado do losango por medida* $(\sqrt{a^2+b^2}):2$ *e o segmento que une o centro do octaedro com o meio do lado* $(\sqrt{a^2+b^2}):4$. *Se fôr* c *o terceiro eixo, terá a altura do triângulo por medida* $\sqrt{(a^2+b^2):16+c^2:4}=1/4\cdot\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$ *e a área de cada face será* $A=1/4\cdot(\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2+4c^2})$, *donde* $A'=2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$ *a área do octaedro.*

Soluções dos n.os 47 a 52 de J. da Silva Paulo.

PROBLEMAS

Para êste número, especialmente dedicado aos candidatos dos Exames de Aptidão às Escolas Superiores, decidiu a Redacção juntar aos pontos de exames uma colecção de outros problemas. A maioria dêstes é acompanhada ou pela resolução completa redigida porém duma forma propositadamente concisa, ou por simples sugestões, suficientes para a resolução, ou ainda só dos resultados. No final são indicadas as respectivas fontes.

53 — Considere-se dois números inteiros a e b, tais que a^2+2b seja um quadrado perfeito: $a^2+2b=c^2$. 1.º) Demonstrar que $2b$ é o produto de dois números pares. 2.º) Pôr a^2+b sob a forma duma soma de dois quadrados. R : 1.º) *De* $2b=c^2-a^2$, *tira-se que* c^2 *e* a^2 *são ambos pares ou ambos ímpares ; o mesmo se pode concluir para* c *e* a, *e, portanto* $c+a$ *e* $c-a$ *são pares ; a igualdade* $2b=(c+a)(c-a)$ *demonstra o que se pretende.* 2.º) *Se juntarmos* a^2 *aos dois membros da igualdade dada, teremos* $2(a^2+b)=c^2+a^2$; *mas* $c^2+a^2=1/2\,[(c+a)^2+(c-a)^2]$, *logo* $a^2+b=\left(\frac{c+a}{2}\right)^2+\left(\frac{c-a}{2}\right)^2$; *sendo* $c+a$ *e* $c-a$ *números pares,* $\frac{c+a}{2}$ *e* $\frac{c-a}{2}$ *são números inteiros e* a^2+b *fica sob a forma duma soma de quadrados.*

54 — Mostrar que um número da forma :

$$y=(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)^2-a^n$$

não é nunca primo para $n>1$. R : *Como* $1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ *então o número precedente pode escrever-se :* $y=\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)^2-a^n$. *Desenvolvendo e reduzindo ao mesmo denominador vem :*

$$y=\frac{a^{2(n+1)}-a^{n+2}+1-a^n}{(a-1)^2}=\frac{a^{n+2}(a^n-1)-(a^n-1)}{(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a^n-1)(a^{n+2}-1)}{(a-1)^2}=\frac{(a^n-1)}{(a-1)}\times\frac{(a^{n+2}-1)}{(a-1)}.$$

Efectuando a divisão de cada um dos factores por $(a-1)$, *obtém-se :*

$$y=(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)(a^{n+1}+a^n+\cdots+a+1)$$

que é um produto de dois factores e o número y *só pode ser primo se o primeiro, que é de menor valor, fôr igual a* 1. *Mas não se pode dar êsse caso pois ter-se-ia* $a^{n-1}=1$ *donde* $n=1$ *o que é contra a hipótese. Se* $n=1$ *então* $y=a^2+a+1$ *e pode ser primo ou não como é fácil de verificar com alguns exemplos.*

55 — São dadas as sucessões de têrmos gerais $A_n=a^n-1$ e $B_n=a^{-n}+1$. *a)* Verifique que $(A_n-B_n)^2-(A_n+B_n)^2+4=0$. *b)* ¿ Que valor deve ter a para que o têrmo de ordem p da primeira sucessão seja igual ao têrmo de ordem p da segunda ? *c)* Prove que a sucessão de têrmo geral $C_n=A_{n+s}-A_n$ é uma progressão geométrica. R : *a)* $(A_n-B_n)^2-(A_n+B_n)^2=[(a^n-1)-(a^{-n}+1)]^2-[(a^n-1)+(a^{-n}+1)]^2=(a^n-a^{-n})^2-(a^n+a^{-n})^2=(a^{2n}-2+a^{-2n})-(a^{2n}+2+a^{-2n})=-4$. *Assim fica verificado o que pretendiamos.* *b) Será* $a^p-1=a^{-p}+1$, *ou* $a^p-2-a^{-p}=0$, *isto é,* $(a^p)^2-2a^p-1=0$, *donde* $a^p=1\pm\sqrt{2}$. *Logo* $a=\sqrt[p]{1\pm\sqrt{2}}$. *c)* $c_n=A_{n+s}-A_n=(a^{n+s}-1)-(a^n-1)=a^{n+s}-a^n=a^{n-1}(a^{s+1}-a)$. *Como se sabe o n-ésimo têrmo duma progressão geométrica é igual a* $u_1\,r^{n-1}$ *sendo* u_1 *o primeiro têrmo e* r *a razão. Se fizermos* $u_1=(a^{s+1}-a)$ *e* $r=a$, *fica provado o que se deseja.*

56 — Sabendo-se que $x+y+z=a$; $x^2+y^2+z^2=b^2$; $x^3+y^3+z^3=c^3$, calcular o produto xyz. R : $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x(y^2+z^2)+3y(z^2+x^2)+3z(x^2+y^2)+6xyz$; *mas* $3x(y^2+z^2)+3y(z^2+x^2)+3z(x^2+y^2)=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)$. *Logo,* $(x+y+z)^3=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz$. *Tendo em conta as igualdades dadas, vem*

$$a^3=3a\,b^2-2c^3+6xyz \quad ou \quad xyz=\frac{a^3-3a\,b^2+2c^3}{6}.$$

57 — Achar os valores de λ para os quais o trinómio $(\lambda+1)x^2+(5\lambda-3)x+2\lambda+3$ é um quadrado perfeito. Escrever em cada caso as raízes do trinómio igualado a zero. R : *O trinómio será um quadrado perfeito se* $(5\lambda-3)^2-4(\lambda+1)(2\lambda+3)=0$, *isto é,* $17\lambda^2-50\lambda-3=0$. *Esta equação é satisfeita no caso de*