ANO V - N.º 21 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO - 1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Uma Teoria das Séries Duplas

por **J. Albuquerque** (Bolseiro em Roma do I. A. C.)

Foi *Arquimedes* o primeiro matemático a fazer uso de uma série infinita utilizando uma série geometrica para calcular a área de um segmento de parábola Mais tarde em 1668, *Mercator* e *Brouncker* empregaram uma série, chamada série logarítmica, no cálculo de áreas relativas à hipérbole.

O uso sistemático das séries começa sòmente com *Newton* (1669). No século XIX já eram conhecidos exemplos de séries divergentes e indeterminadas, e tais exemplos eram até já conhecidos antes, mas até ao fim do século XVIII as séries foram sempre empregadas como uma soma de infinitos termos que deveria ter sempre um sentido. *Jacob* e *João Bernoulli* (1689, 1705), *Leibniz* (1713), *Euler* (1734) empregaram as séries sem se preocuparem das suas eventuais convergências ou divergências. Mais tarde, matemáticos como *Nicolau* e *Daniel Bernoulli* (1743, 1771), e *D'Alembert* (1761), fizeram grandes reservas sôbre o seu emprêgo, mas as séries não convergentes continuavam a somar-se, e os resultados eram muitas vezes justos mas também algumas vezes injustos.

A série indeterminada $1-1+1-1+\cdots$, recebeu, por exemplo, de *J. Bernoulli* (1696), de *Grandi* (1710), e de *Leibniz* (1713), a soma $1/2$, justificada com argumentações metafísicas, recurso de que lança mão o sábio para não confessar a sua ignorância. *Grandi* abandona-se a grandes dissertações que o conduzem não só ao valor da soma série, como também à possibilidade da criação do Nada.

O conceito da soma de séries não convergentes toma pela primeira vez um aspecto correcto com *Cesàro* em 1890, com uma perfeita generalização de soma de de uma série, seguida de outras generalizações devidas a *Borel* (1901) e a *Sannia* (1916-20).

Uma primeira definição correcta de convergência de uma série foi dada por *Fourier* (1811). A definição plenamente rigorosa é de *Bolzano* (1817), de *Cauchy* (1821), e de *Abel* (1826).

A teoria das séries duplas foi iniciada por *Cauchy*, organizada de modo rigoroso por *Stolz* (1884), por *Bolzano*, por *Biermann* (1887, 1897), e por *Pringsheim* (1897). Têm uma grande aplicação na teoria das funções analíticas a duas variáveis complexas.

Consideremos o algorítomo:

$$
(1)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+\cdots \\
+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+\cdots \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}+\cdots \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Êste algorítomo chama-se uma *série dupla*.

A soma $S_{m,n}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}a_{rs}$ chama-se *reduzida* de índices m,n, e a uma soma qualquer de termos da série (1), chama-se uma *soma parcial*. As reduzidas são as somas dos termos contidos em rectângulos de vértice em a_{11} e são certas somas parciais finitas Dada uma reduzida existe uma soma parcial finita ou infinita (com uma infinidade de têrmos) que a contém, mas dada uma soma parcial, só se ela é finita, existe uma reduzida que a contém.

Se o limite $\lim_{(m,n)\to\infty} S_{m,n}$ é um número finito S, a série dupla diz-se convergente; se o limite existe mas infinito a série dupla diz-se divergente; nos restantes casos a série dupla diz-se indeterminada.

CRITÉRIO GERAL DE CONVERGÊNCIA. *É condição necessária e suficiente para a série dupla* (1) *ser convergente, que dado* $\varepsilon>0$ *se possam determinar dois inteiros positivos* μ,ν *tais que: para* $m,m'>\mu$ *e* $n,n'>\nu$ *resulte sempre:* $|S_{m,n}-S_{m',n'}|<\varepsilon$.

Dem. A condição é necessária. A série dupla tem um limite finito $S=\lim_{(m,n)\to\infty} S_{m,n}$ que é o extremo superior do conjunto C de todos os números $S_{m,n}$ onde se faz passar m,n por todos os inteiros positivos emparelhados de todos os modos possíveis.

O ponto S é ponto de acumulação do conjunto C no espaço dos números reais, e dada uma visinhança 2ε de S, isto é, o intervalo $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ existe pelo menos um ponto de C, $S_{m,n}$, contido na visinhança e portanto a distância entre $S_{m,n}$ e S é menor que ε: $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$.

Mas não existe só o ponto $S_{m,n}$ mas sim uma infinidade dêles contidos na visinhança e o conjunto dos inteiros m, n que correspondem a êsses pontos é limitado inferiormente por μ, ν, qualquer que seja ε, isto é, para cada ε, existem números inteiros $\mu(\varepsilon)$ e $\nu(\varepsilon)$ tais que se verifica sempre: $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$ para $m>\mu(\varepsilon)$ e $n>\nu(\varepsilon)$.

Então para $m, m'>\mu(\varepsilon)$ e $n, n'>\nu(\varepsilon)$ teremos: $d(S_{mn}, S)=|S_{m,n}-S|<\varepsilon$ e também $d(S_{m',n'}, S)=$ $=|S_{m',n'}-S|<\varepsilon$, e pela desigualdade triangular da distância, vem: $d(S_{m,n}, S_{m',n'})\leq d(S_{m,n}, S)+d(S_{m',n'}, S)$ ou $|S_{m,n}-S_{m',n'}|\leq|S_{m,n}-S|+|S_{m',n'}-S|<2\varepsilon$.

A condição é suficiente. Seja uma série dupla para a qual dado $\varepsilon>0$ existem $\mu(\varepsilon)$ e $\nu(\varepsilon)$ tais que para $m, m'>\mu(\varepsilon)$ se tem: $|S_{m,n}-S_{m',n'}|<\varepsilon$.

Representemos por $C(\varepsilon)$ o fecho de conjunto de todos os $S_{m,n}$ com $m>\mu(\varepsilon)$ e $n>\nu(\varepsilon)$; será para $\varepsilon<\varepsilon'$: $C(\varepsilon)\subset C(\varepsilon')$.

O produto de todos os $C(\varepsilon)$ contêm um ponto, pelo teorema de *Cantor* (Durchschnittssatz), e se fôr S êsse ponto, S é finito porque os $C(\varepsilon)$ são conjuntos fechados. Dado $\varepsilon>0$ tem-se: $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$ para $m>\mu(\varepsilon)$ e $n>\nu(\varepsilon)$.

Então a série tem S como limite e é portanto convergente. c. q. d.

Corolário. *Para a convergência da série* (1), *é necessário que:* $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} a_{m,n}=0$.

Com efeito, tomando os módulos à identidade

$$a_{m,n}=(S_{m,n}-S_{m,n-1})-(S_{m-1,n}-S_{m-1,n-1}),$$

vem: $|a_{m,n}|\leq|S_{m,n}-S_{m,n-1}|+|S_{m-1,n}-S_{m-1,n-1}|<2\varepsilon$ e portanto: $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} a_{m,n}=0$. c. q. d.

Comparação de séries. Dadas duas séries, se existe entre os têrmos da primeira e da segunda uma correspondência biunívoca tal que cada têrmo da primeira é igual ou inferior ao têrmo correspondente da segunda, diremos que a primeira série é *majorada* pela segunda ou é uma *minorante* da segunda, e que a segunda série é *minorada* pela primeira ou é uma *majorante* da primeira.

Duas séries cada uma das quais é majorada pela outra, dizem-se *equivalentes*.

Se a majorante de uma série é convergente a série majorada é também convergente, se a majorada é divergente a majorante é também divergente.

As séries equivalentes são da mesma espécie.

Uma série dupla pode ser comparada com uma série simples e ser majorante ou majorada por ela, e portanto uma série dupla majorante de uma série simples divergente é divergente, e uma série dupla majorada por uma série simples convergente é convergente.

Uma série dupla é *absolutamente convergente* (absolutamente divergente) se cada série dupla equivalente fôr convergente (divergente).

Séries de têrmos positivos. Uma série de têrmos positivos não pode ser indeterminada; ou é convergente ou divergente e em ambos os casos absolutamente. A soma da série que é o extremo superior do conjunto das somas parciais e também do conjunto das reduzidas, é independente da ordem dos têrmos.

Com efeito, a série dupla de têrmos positivos ou é convergente ou divergente a $+\infty$, não podendo ser indeterminada. A soma finita ou infinita é o extremo superior das somas parciais, e se a série é divergente a soma é também extremo superior das reduzidas. A adição de uma série de têrmos positivos goza da propriedade comutativa, e portanto a série é absolutamente convergente ou absolutamente divergente, ou por outras palavras, a soma è independente da ordem dos têrmos.

Cada série simples de têrmos positivos equivalente a uma série dupla de têrmos positivos, tem a mesma soma (finita ou infinita) *da série dupla.* Em particular a série: $a_{1,1}+a_{2,1}+a_{1,2}+a_{3,1}+a_{2,2}+a_{1,3}+\cdots$, chama-se a *soma por diagonais* da série dupla (1).

Cada linha ou coluna de uma série dupla de têrmos positivos convergente, constitui uma série simples convergente.

Com efeito, a soma por diagonais da série dupla é uma majorante de cada uma destas séries.

Uma série dupla de têrmos positivos de soma S *é somável por linhas (e anàlogamente por colunas) obtendo-se a mesma soma.*

Com efeito, seja $A_r=\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{r,s}$ uma das séries convergentes da linha s; será, $A_r\leq S$ e também $A_p+A_r\leq S$ $(p\neq r)$ porque A_p+A_r é o extremo superior das somas parciais $\sum\limits_{s=1}^{\infty}(a_{p,s}+a_{r,s})$ que são só algumas somas parciais da série dupla. O mesmo sucede portanto para uma soma finita de AA de índices diferentes. Considerando $A_1+A_2+A_3+\cdots$, teremos uma série de termos positivos majorada pela série dupla e que portanto terá uma soma $S'\leq S$.

Mas cada soma parcial da série dupla é ultrapassada por infinitas somas parciais desta série simples e portanto $S\leq S'$, donde resulta terem as duas séries uma mesma soma.

Para demonstrar a recíproca desta proposição, suponhamos que uma série dupla somada por linhas dá uma soma finita; então cada linha é uma série simples convergente e a série simples $A_1+A_2+A_3+\cdots$, é formada das suas somas. Cada soma parcial da série dupla distribui-se em somas parciais pelas diferentes linhas, e vê-se, portanto, que o conjunto das somas parciais da série dupla é limitado, e a série dupla convergente.

Exemplo:

$$(2)\qquad \begin{array}{l} 1\ +q\ \ +q^2\ \ +\cdots \\ +q'+qq'+q^2q'+\cdots \\ +q'^2+qq'^2+q^2q'^2+\cdots \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots \end{array}$$

Supondo $0<q<1$, $0<q'<1$, as linhas são séries geométricas simples de razão q portanto convergentes. A série simples formada pelas somas

$$\frac{1}{1-q}+\frac{q'}{1-q}+\frac{q'^2}{1-q}+\cdots$$

é uma série geométrica de razão q', que tem por soma:

$$S=\frac{1}{(1-q)\cdot(1-q')}$$

A série dupla (2) é chamada uma *série somável* pelo facto de a sua soma se poder obter somando as linhas ou colunas. A série (2) é conhecida pelo nome de *série geométrica dupla de razões* q *e* q'.

Se pelo menos uma das razões da série geométrica dupla fôr maior que a unidade, a série será divergente.

As condições suficientes de convergência, conhecidas com o nome de critérios de convergência, estendem-se com relativa facilidade às séries duplas; são por exemplo prováveis os seguintes teoremas, que em todo o caso necessitam de uma demonstração directa que se deixa ao cuidado do leitor:

A série dupla de termos positivos (1), *converge ou diverge conforme:*

$$\max.\lim.\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}<1 \quad ou \quad \min.\lim.\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}>1,$$

e para tal êstes limites deverão ser independentes de n.

Se dada a série dupla de termos positivos (1), *é possível determinar uma sucessão* , b_1, b_2, $b_3,\cdots$, *de números positivos, tal que existam um inteiro* $p>0$ *e um número* k *positivo, de modo que para* $m\geq p$ *resulte independente de* n *e maior que* k, *a diferença*

$$b_m\frac{a_{m,n}}{a_{m+1,n}}-b_{m+1}$$

a série é convergente; se ao contrário, é possível determinar a sucessão dos bb *de modo que seja divergente a série* $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots$ *e a referida diferença, para* $m>p$ *suficientemente grande, seja não positiva, a série dupla é divergente.*

Nêste teorema tomando os bb todos iguais à unidade, caímos no critério anterior; tomando os bb pela sucessão dos números naturais, caímos no critério seguinte:

A série dupla de têrmos positivos (1), *converge ou diverge conforme*

$$\min.\lim.m\left(\frac{a_{m,n}}{a_{m+1,n}}-1\right)>1 \ ou \ \max.\lim.m\left(\frac{a_{m,n}}{a_{m+1,n}}-1\right)<1,$$

e para tal êstes limites deverão ser independentes de n.

Demonstremos agora o seguinte teorema:

A série dupla de têrmos positivos (1), *converge ou diverge conforme* max. lim. $\sqrt[m+n]{a_{m,n}}$ *é maior ou menor que a unidade. Se êste* max. lim. *é a unidade nada se pode afirmar sôbre a convergência ou divergência da série.*

Seja S a soma da série simples que se obtém de $\sqrt[m+n]{a_{m,n}}$ fazendo variar m e n por todos os possíveis valores inteiros. Suponhamos $S<1$. Representemos por q um número satisfazendo a $S<q<1$.

Poderão determinar-se números μ e ν convenientes tais que:

$\sqrt[m+n]{a_{m,n}}\leq q$ para $m>\mu$ e $n>\nu$, ou $a_{m,n}\leqq q^{m+n}$.

Mas a série dupla geométrica de razões q e $q'=q$

$$\begin{array}{llll} q^{\mu+\nu} & +q^{(\mu+1)+\nu} & +q^{(\mu+2)+\nu} & +\cdots \\ +q^{\mu+(\nu+1)} & +q^{(\mu+1)+(\nu+1)} & +q^{(\mu+2)+(\nu+1)} & +\cdots \\ +q^{\mu+(\nu+2)} & +q^{(\mu+1)+(\nu+2)} & +q^{(\mu+2)+(\nu+2)} & +\cdots \\ +\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

é convergente para $q<1$ e portanto será também convergente o resto da série dupla dado pelos valores μ e ν, resto que é majorado por esta série geométrica; a série dupla (1) é convergente. Se pelo contrário $S\geq 1$ haverá infinitos têrmos da série dupla $\sqrt[m+n]{a_{m,n}}$ que serão maiores que 1, e portanto infinitos têrmos da série dupla (1) maiores que 1 e ela será divergente a $+\infty$, c. q. d.

SÉRIES DUPLAS DE TÊRMOS REAIS DE QUALQUER SINAL. *É condição necessária e suficiente para uma série dupla ser absolutamente convergente que seja convergente a série dupla dos módulos dos têrmos.*

Se a série dupla é absolutamente convergente, por definição, tôda a série dupla equivalente é convergente e tôda a série simples equivalente é também convergente e para isso a série dos módulos de qualquer série simples equivalente é convergente e será convergente a série dupla dos módulos.

Se a série dupla dos módulos é convergente serão absolutamente convergentes tôdas as séries duplas majoradas por esta e portanto também o será a série dupla dada. c. q. d.

Poderiam estudar-se para as séries duplas as propriedades comutativa e distributiva da adição e chegariamos entre outros ao seguinte resultado, que se deixa para ser demonstrado: *a propriedade comutativa vale só para as séries duplas para as quais o conjunto das somas parciais é limitado pelo menos de um dos lados.*

Para as séries duplas não absolutamente convergentes podem considerar-se duas espécies de convergência: séries duplas *semiabsolutamente convergentes*, se existe qualquer série simples equivalente não absolutamente convergente, séries duplas *simplesmente convergentes*, se não existe alguma série simples equivalente convergente.

Exercício: provar que o conjunto dos têrmos de uma série dupla convergente absolutamente ou semiabsolutamente é limitado, mas que tal nem sempre sucede nas séries simplesmente convergentes.

Séries duplas de têrmos complexos. O teorema anterior dá a condição para a convergência absoluta, generaliza-se sem esfôrço às séries duplas de têrmos complexos.

Deduzem-se também fàcilmente as seguintes propriedades:

Uma série dupla absolutamente oonvergente, com têrmos reais ou complexos, pode somar-se por linhas, ou por colunas, ou por diagonais, ou por qualquer série simples equivalente; tem-se sempre por resultado a soma da série dupla dada.

Para terminar, notemos que o teorema sôbre as séries simples que afirma *ser absolutamente convergente o produto à Cauchy, de duas séries simples absolutamente convergentes*, resulta imediatamente da teoria das séries duplas aplicadas à série

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \cdots \\ &+ a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \cdots \\ &+ a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + \cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

onde $a_1+a_2+a_3+\cdots$, $b_1+b_2+b_3+\cdots$, são as duas séries simples dadas. Esta demonstração é devida ao próprio Cauchy, em 1821.

Roma, Julho de 1944

ASTRONOMIA

SÔBRE O MOVIMENTO DOS POLOS À SUPERFÍCIE DA TERRA (*)

O «TÊRMO DE KIMURA» OU TÊRMO «Z»

por ***A. Baptista dos Santos***

Num artigo da Secção de Astronomia publicado no n.º 17 da «Gazeta de Matemática», fizemos uma breve história do movimento geral do polo à superfície da Terra, definimos as suas leis e dissemos qual era a sua provável interpretação física. Vamos hoje dizer o que é o «têrmo de Kimura» ou têrmo «z» e indicar as causas que, provàvelmente, lhe dão origem.

Na representação do movimento geral do polo é hábito, desde Chandler, projectar a trajectória por êle descrita à superfície da Terra sôbre um plano tangente a esta superfície no polo do eixo de figura e referir, em cada instante, a sua posição nessa projecção a um sistema de eixos coordenados rectangulares, um dos quais é a projecção do meridiano de Greenwich naquele plano e o outro a direcção perpendicular. Designando por x e y as coordenadas do polo, num certo instante, em relação a êste sistema de eixos e por $\Delta\varphi$ a variação da latitude, isto é, a diferença, nêsse instante, entre a latitude de qualquer lugar dum meridiano de longitude λ e a latitude média dêsse lugar durante o período completo do movimento do polo, será:

$$(1) \qquad \Delta\varphi = x \cos\lambda + y \operatorname{sen}\lambda$$

a equação que relaciona as quatro quantidades mencionadas e traduz analìticamente o movimento do polo. Para cada lugar, ou melhor, para cada meridiano, existe uma equação desta natureza que constitui uma das relações de condição na determinação, pelo método dos menores quadrados, dos valores mais prováveis das coordenadas x e y. Conhecidos êsses valores mais prováveis, o segundo membro da equação (1) permite calcular novos valores $\Delta\varphi$ — para cada estação e qualquer instante — que, comparados com os valores observados, nos dariam, segundo a teoria dos êrros de observação, uma série de resíduos de carácter acidental, se os valores $\Delta\varphi$ observados resultassem apenas do deslocamento do polo. Mas não é isso o que acontece, na prática. O astrónomo japonês Hisashi Kimura mostrou, em 1902, que nêsses valores $\Delta\varphi$ existia uma parte sistemática que desapareceria se ao segundo membro da equação (1) se juntasse mais um têrmo, o têrmo «z», isto é, se a equação (1) passasse a ter a forma:

$$(2) \qquad \Delta\varphi = x \cos\lambda + y \operatorname{sen}\lambda + z$$

(*) Continuação do n.º 17.