

absolutamente convergentes tôdas as séries duplas majoradas por esta e portanto também o será a série dupla dada. c. q. d.

Poderiam estudar-se para as séries duplas as propriedades comutativa e distributiva da adição e chegaríamos entre outros ao seguinte resultado, que se deixa para ser demonstrado: *a propriedade comutativa vale só para as séries duplas para as quais o conjunto das somas parciais é limitado pelo menos de um dos lados.*

Para as séries duplas não absolutamente convergentes podem considerar-se duas espécies de convergência: séries duplas *semiabsolutamente convergentes*, se existe qualquer série simples equivalente não absolutamente convergente, séries duplas *simplesmente convergentes*, se não existe alguma série simples equivalente convergente.

*Exercício:* provar que o conjunto dos termos de uma série dupla convergente absolutamente ou semiabsolutamente é limitado, mas que tal nem sempre sucede nas séries simplesmente convergentes.

SÉRIES DUPLAS DE TERMOS COMPLEXOS. O teorema anterior dá a condição para a convergência absoluta,

generaliza-se sem esforço às séries duplas de termos complexos.

Deduzem-se também facilmente as seguintes propriedades:

*Uma série dupla absolutamente convergente, com termos reais ou complexos, pode somar-se por linhas, ou por colunas, ou por diagonais, ou por qualquer série simples equivalente; tem-se sempre por resultado a soma da série dupla dada.*

Para terminar, notemos que o teorema sobre as séries simples que afirma *ser absolutamente convergente o produto à Cauchy, de duas séries simples absolutamente convergentes*, resulta imediatamente da teoria das séries duplas aplicadas à série

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \dots \\ & + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \dots \\ & + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + \dots \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

onde  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ , são as duas séries simples dadas. Esta demonstração é devida ao próprio Cauchy, em 1821.

Roma, Julho de 1944

## ASTRONOMIA

### SÔBRE O MOVIMENTO DOS POLOS À SUPERFÍCIE DA TERRA (\*)

#### O «TÉRMO DE KIMURA» OU TÉRMO «Z»

por A. Baptista dos Santos

Num artigo da Secção de Astronomia publicado no n.º 17 da «Gazeta de Matemática», fizemos uma breve história do movimento geral do polo à superfície da Terra, definimos as suas leis e dissemos qual era a sua provável interpretação física. Vamos hoje dizer o que é o «térmo de Kimura» ou térmo «z» e indicar as causas que, provavelmente, lhe dão origem.

Na representação do movimento geral do polo é hábito, desde Chandler, projectar a trajectória por êle descrita à superfície da Terra sobre um plano tangente a esta superfície no polo do eixo de figura e referir, em cada instante, a sua posição nessa projecção a um sistema de eixos coordenados rectangulares, um dos quais é a projecção do meridiano de Greenwich naquele plano e o outro a direcção perpendicular. Designando por  $x$  e  $y$  as coordenadas do polo, num certo instante, em relação a êste sistema de eixos e por  $\Delta\varphi$  a variação da latitude, isto é, a diferença, nesse instante, entre a latitude de qualquer lugar dum meridiano de longitude  $\lambda$  e a latitude média desse lugar durante o período completo do movimento do polo, será:

$$(1) \quad \Delta\varphi = x \cos \lambda + y \sin \lambda$$

a equação que relaciona as quatro quantidades mencionadas e traduz analiticamente o movimento do polo. Para cada lugar, ou melhor, para cada meridiano, existe uma equação desta natureza que constitui uma das relações de condição na determinação, pelo método dos menores quadrados, dos valores mais prováveis das coordenadas  $x$  e  $y$ . Conhecidos êsses valores mais prováveis, o segundo membro da equação (1) permite calcular novos valores  $\Delta\varphi$ —para cada estação e qualquer instante—que, comparados com os valores observados, nos dariam, segundo a teoria dos erros de observação, uma série de resíduos de carácter accidental, se os valores  $\Delta\varphi$  observados resultassem apenas do deslocamento do polo. Mas não é isso o que acontece na prática. O astrónomo japonês Hisashi Kimura mostrou, em 1902, que nesses valores  $\Delta\varphi$  existia uma parte sistemática que desapareceria se ao segundo membro da equação (1) se juntasse mais um térmo, o térmo «z», isto é, se a equação (1) passasse a ter a forma:

$$(2) \quad \Delta\varphi = x \cos \lambda + y \sin \lambda + z$$

(\*) Continuação do n.º 17.

As coordenadas do polo,  $x$  e  $y$ , eram independentes de « $z$ » que, como se vê, não dependia da longitude  $\lambda$ ; e como as estações do Serviço Internacional estão distribuídas ao longo do mesmo paralelo, isto é, têm tódas a mesma latitude, nada se podia afirmar quanto à dependência de « $z$ » da latitude da estação. A análise dos valores dêste termo para cada décimo de ano mostrava que êle era uma quantidade variável, de período anual, com um máximo no solstício do inverno e um mínimo no solstício do verão.

Eis pois o que era e, com ligeiras diferenças, o que ainda é hoje, o termo « $z$ » também conhecido por «termo de Kimura», nome do seu descobridor: um resíduo sistemático, variável com o tempo, de período anual, atingindo os seus valores máximo e mínimo respectivamente nos solstícios do inverno e do verão, não alterando as coordenadas do polo, independente das longitudes, mas sendo provavelmente, como vamos ver, função da latitude do lugar.

¿Mas teria, de facto, o termo « $z$ » realidade física, quere dizer, haveria, na realidade, na variação das latitudes uma parcela com as características de « $z$ »? Ou, pelo contrário, seria o seu aparecimento simplesmente devido a possíveis deficiências dos dados do problema ou a incorrecções próprias do método de cálculo usado na combinação das observações? Esta questão foi posta quasi logo de início e bastantes foram os astrónomos que, nestes dois campos, se notabilizaram na investigação das causas de « $z$ ».

Está no primeiro campo a sugestão apresentada ainda por Chandler: o termo « $z$ » teria origem num movimento real do centro de gravidade da Terra ao longo do seu eixo, para um e outro lado duma posição média. Dêste deslocamento resultaria, com efeito, um desvio constante na vertical de todos os lugares dum mesmo paralelo e, conseqüentemente, uma variação constante na sua latitude, perfeitamente independente do deslocamento geral do polo; e, como é fácil de verificar, essa variação seria proporcional ao cosseno da latitude—nula no polo e máxima no equador. Já tivemos ocasião de dizer que a distribuição das estações do Serviço Internacional não se presta à verificação desta propriedade, a da proporcionalidade ao cosseno da latitude, mas o astrónomo Spencer Jones, actual director do Observatório de Greenwich, fazendo a comparação dos resultados do Serviço Internacional com os da observação da estrela  $\delta$  Cassiopeiae no Observatório de Poulkovo, cuja latitude,  $59^\circ$ , é sufficientemente elevada em relação à das estações internacionais,  $39^\circ$ , verificou a perfeita proporcionalidade entre os valores de « $z$ » e os cossenos das respectivas latitudes.

A oscilação do centro de gravidade da Terra parecia, portanto, justificar satisfatoriamente a existência dum termo « $z$ ». ¿Mas a que causa deveríamos atri-

buir essa oscilação? Pouco ou nada se disse, então, a êste respeito. Parece-nos, no entanto, evidente, que um deslocamento de massas à superfície ou no interior da Terra, de um para o outro hemisfério e de distribuição simétrica relativamente ao eixo terrestre poderia dar-lhe origem; e, já vimos, quando no artigo anterior indicamos as causas da componente anual do deslocamento geral do polo, que êsse movimento de massas se verifica à superfície da Terra. O deslocamento resultante do centro de gravidade não se efectuaria, provavelmente, segundo o próprio eixo da Terra mas a sua componente segundo êste eixo poderia dar conta do termo « $z$ », no todo ou em parte—a componente na direcção normal daria origem à parte anual do movimento geral do polo. Uma outra explicação, também satisfatória, é a que, modernamente, apresenta o Prof. Kimura: a mudança de direcção da vertical resultante da deformação da superfície terrestre devida à atracção do Sol e ao aquecimento solar. À Metereologia e à Mecânica competiria a verificação das hipóteses que teriam igualmente uma contra prova na determinação directa dos desvios da vertical por meio do pêndulo horizontal. A acção do vento poderia, por outro lado, explicar tambem a existência da maior parte do termo de Kimura: S. Kawasaki mostrou que mais de metade do termo « $z$ » deduzido das observações de Greenwich compreendidas entre 1916 e 1927, podia ser atribuída ao efeito do vento. Mas a atenção dos astrónomos, a do Serviço Internacional, em particular, dirigiu-se de preferência para as causas do segundo tipo acima apontadas e assim devia ser visto que a hipótese da existência real de « $z$ » só poderia merecer-nos inteira confiança se, previamente, tivessem sido eliminadas as causas que através dum cálculo defeituoso poderiam dar-lhe origem. Nêste campo muito de interessante se concluiu. Reconheceu-se quo na investigação de tão diminuta quantidade, como é o termo « $z$ », seria indispensável entrar com correcções, até ontão desprezadas, no cálculo da posição aparente das estrêlas; estão nêste caso as paralaxes das estrêlas observadas e pequeninas correcções provenientes da consideração de termos até então não considerados, por desnecessários, no desenvolvimento da expressão que traduz o efeito da nutação do eixo terrestre nas posições das estrêlas. Demonstrou-se que um pequenino erro existente nas constantes de aberração e de nutação adoptadas no cálculo das posições aparentes das estrêlas daria origem a um termo « $z$ ». Verificou-se, finalmente, que o método usado na combinação das observações seria improfíquo, dando igualmente origem a um termo « $z$ », se existissem variações diurnas ou semi-diurnas nas latitudes; e a realidade destas variações tem-se accentuado dia a dia desde 1923, para o que muito contri-

buíram as investigações de Boccardi em Pino Torinese.

Os trabalhos do Serviço Internacional, já então sob a direcção do Prof. Kimura, foram assim encaminhados no sentido de se eliminarem, quanto possível, tôdas estas causas de erro e, como ultimamente parece ter-se verificado que «z» não é completamente independente da longitude, foi abandonado o uso da fórmula (2) na determinação de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , passando a adoptar-se o método das aproximações sucessivas. Não obstante, o termo «z» prevaleceu ainda, se não com igual amplitude e fase, pelo menos, com marcada probabilidade de existência física.

No seu último relatório, publicado em 1935 e abrangendo as observações feitas entre 1922.7 e 1931.0, o Prof. Kimura conclui: Em «z» há um termo comum a tôdas as estações, pelo menos, àquelas que fazem parte do Serviço Internacional; na parte restante, de carácter local e, portanto, variável de estação para estação, estão incluídos dois outros termos, um constante durante o ano em cada estação e outro variável com o tempo e a estação que é propriamente designado por «z» local. Em sua opinião a parte constante é principalmente devida às variações diurna e semi-diurna da latitude, devendo também considerar-se nela incluído o efeito de um possível erro na constante de aberração. Os outros dois termos poderão ter origem nas anomalias da refração como pretendem, segundo diz, alguns investigadores de «z», mas elle entende que há outra causa igualmente provável, a mudança de direcção da vertical resultante da deformação da Terra devida, em parte, à atracção

do Sol e, em parte, às dilatações e contracções da crosta terrestre local, resultantes do aquecimento solar em combinação com a pressão atmosférica.

O Prof. Kimura acrescenta que, na investigação de tão complicado termo «z» seria altamente desejável a determinação rigorosa da constante de aberração por observações astronómicas diferentes das da variação das latitudes e, propriamente na investigação das suas causas, muito desejável seria o empreendimento de observações geofísicas.

Assim estávamos em 1935, ainda no campo das hipóteses sem confirmação definitiva. Depois, o estado de saúde pouco satisfatório do Prof. Kimura obrigou-o a abandonar a direcção do Serviço Internacional que passou a ser dirigido pelo Prof. Carnera do Observatório italiano de Capodimonte. Veio a guerra e com ela as dificuldades sempre crescentes das trocas internacionais. Durante todo este período apenas chegaram às nossas mãos três ou quatro folhetos—que devemos à gentileza do Prof. Carnera—contendo apenas resultados provisórios. Num dêles, o de 1938, diz este distinto Professor que «não é com os actuais instrumentos de pequenas distância focal e abertura, que se consegue ver centésimos de segundo e o que se não vê não se pode medir». Há, na verdade, necessidade de aperfeiçoar também os instrumentos astronómicos.

Esperemos então que a Paz nos traga o socêgo e a cooperação internacional indispensáveis à complicada solução deste interessante problema da Astronomia que, não obstante largamente estudado, não conseguiu ainda obter uma explicação indubitável.

Lisboa, Outubro de 1944.

## PEDAGOGIA

### A ESTRATÉGIA E TÁCTICA DO ESTUDO

por W. W. Sawyer

É quasi um lugar comum afirmar hoje em dia que a grande maioria dos nossos estudantes não tira aproveitamento apreciável do ensino ministrado nos Liceus e Universidades. A unanimidade das queixas não deixa margem para dúvidas. Mas se é fácil e cómodo apontar as causas deste lamentável estado de coisas é, no entanto, incomparavelmente mais árduo e delicado, dar-lhe o remédio devido. As linhas que se seguem são a expressão duma tentativa neste último sentido. Constituem um dos capítulos, o IV, dum pequeno mas curioso livro intitulado «Mathematician's Delight», editado pela Penguin Books. É seu autor W. W. Sawyer, nome, entre nós, pouco conhecido. É um livro modesto mas de leitura agradável e estimulante a que não falta nem encanto nem originalidade. Recomendamo-lo, em particular aos alunos do primeiro ano das nossas Universidades, que freqüentam as cadeiras de Matemáticas.

N. T.

«Tenho ensinado matemática e ciência aplicada ou engenharia, a quasi tôdas as espécies de rapazes e homens... À luz da minha experiência, difficilmente existirá um homem que não se possa tornar um descobridor, um impulsor do conhecimento, e quanto mais cedo lhe derem oportunidade de manifestar a sua individualidade, melhor». — JOHN PERRY, 1901.

As duas condições fundamentais para alcançar êxito em qualquer espécie de trabalho, são o interesse

e a confiança. As pessoas, usualmente, prestam pouca atenção a estes dois factores porque sentem (aliás com razão) que não se podem tornar confiantes ou interessadas por um esforço de vontade.

É de facto verdade que não se pode aumentar a confiança por um acto de vontade. Da mesma maneira que ninguém pode aumentar o volume dos músculos ou fazer com que o coração bata mais vigorosamente sentando-se numa cadeira e desejando que assim acon-