

buíram as investigações de Boccardi em Pino Torinese.

Os trabalhos do Serviço Internacional, já então sob a direcção do Prof. Kimura, foram assim encaminhados no sentido de se eliminarem, quanto possível, tôdas estas causas de erro e, como ultimamente parece ter-se verificado que «z» não é completamente independente da longitude, foi abandonado o uso da fórmula (2) na determinação de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , passando a adoptar-se o método das aproximações sucessivas. Não obstante, o termo «z» prevaleceu ainda, se não com igual amplitude e fase, pelo menos, com marcada probabilidade de existência física.

No seu último relatório, publicado em 1935 e abrangendo as observações feitas entre 1922.7 e 1931.0, o Prof. Kimura conclui: Em «z» há um termo comum a tôdas as estações, pelo menos, àquelas que fazem parte do Serviço Internacional; na parte restante, de carácter local e, portanto, variável de estação para estação, estão incluídos dois outros termos, um constante durante o ano em cada estação e outro variável com o tempo e a estação que é propriamente designado por «z» local. Em sua opinião a parte constante é principalmente devida às variações diurna e semi-diurna da latitude, devendo também considerar-se nela incluído o efeito de um possível erro na constante de aberração. Os outros dois termos poderão ter origem nas anomalias da refração como pretendem, segundo diz, alguns investigadores de «z», mas elle entende que há outra causa igualmente provável, a mudança de direcção da vertical resultante da deformação da Terra devida, em parte, à atracção

do Sol e, em parte, às dilatações e contracções da crosta terrestre local, resultantes do aquecimento solar em combinação com a pressão atmosférica.

O Prof. Kimura acrescenta que, na investigação de tão complicado termo «z» seria altamente desejável a determinação rigorosa da constante de aberração por observações astronómicas diferentes das da variação das latitudes e, propriamente na investigação das suas causas, muito desejável seria o empreendimento de observações geofísicas.

Assim estávamos em 1935, ainda no campo das hipóteses sem confirmação definitiva. Depois, o estado de saúde pouco satisfatório do Prof. Kimura obrigou-o a abandonar a direcção do Serviço Internacional que passou a ser dirigido pelo Prof. Carnera do Observatório italiano de Capodimonte. Veio a guerra e com ela as dificuldades sempre crescentes das trocas internacionais. Durante todo este período apenas chegaram às nossas mãos três ou quatro folhetos—que devemos à gentileza do Prof. Carnera—contendo apenas resultados provisórios. Num dêles, o de 1938, diz este distinto Professor que «não é com os actuais instrumentos de pequenas distância focal e abertura, que se consegue ver centésimos de segundo e o que se não vê não se pode medir». Há, na verdade, necessidade de aperfeiçoar também os instrumentos astronómicos.

Esperemos então que a Paz nos traga o socêgo e a cooperação internacional indispensáveis à complicada solução deste interessante problema da Astronomia que, não obstante largamente estudado, não conseguiu ainda obter uma explicação indubitável.

Lisboa, Outubro de 1944.

## PEDAGOGIA

### A ESTRATÉGIA E TÁCTICA DO ESTUDO

por W. W. Sawyer

É quasi um lugar comum afirmar hoje em dia que a grande maioria dos nossos estudantes não tira aproveitamento apreciável do ensino ministrado nos Liceus e Universidades. A unanimidade das queixas não deixa margem para dúvidas. Mas se é fácil e cómodo apontar as causas deste lamentável estado de coisas é, no entanto, incomparavelmente mais árduo e delicado, dar-lhe o remédio devido. As linhas que se seguem são a expressão duma tentativa neste último sentido. Constituem um dos capítulos, o IV, dum pequeno mas curioso livro intitulado «Mathematician's Delight», editado pela Penguin Books. É seu autor W. W. Sawyer, nome, entre nós, pouco conhecido. É um livro modesto mas de leitura agradável e estimulante a que não falta nem encanto nem originalidade. Recomendamo-lo, em particular aos alunos do primeiro ano das nossas Universidades, que freqüentam as cadeiras de Matemáticas.

N. T.

«Tenho ensinado matemática e ciência aplicada ou engenharia, a quasi tôdas as espécies de rapazes e homens... À luz da minha experiência, difficilmente existirá um homem que não se possa tornar um descobridor, um impulsor do conhecimento, e quanto mais cedo lhe derem oportunidade de manifestar a sua individualidade, melhor». — JOHN PERRY, 1901.

As duas condições fundamentais para alcançar êxito em qualquer espécie de trabalho, são o interesse

e a confiança. As pessoas, usualmente, prestam pouca atenção a estes dois factores porque sentem (aliás com razão) que não se podem tornar confiantes ou interessadas por um esforço de vontade.

É de facto verdade que não se pode aumentar a confiança por um acto de vontade. Da mesma maneira que ninguém pode aumentar o volume dos músculos ou fazer com que o coração bata mais vigorosamente sentando-se numa cadeira e desejando que assim acon-

teça. No entanto, se pularmos durante meia hora, alcançaremos ambos os resultados.

A confiança e o interesse podem também alterar-se desde que se *tomen as medidas convenientes*.

As medidas convenientes não consistem em atirar-se ao trabalho como um toiro. É bem sabido que o efeito do treino físico demasiado intenso, é destruir o corpo e não melhorá-lo. O mesmo acontece com o espirito.

No treino físico, alguns dos órgãos vitais encontram-se fora do domínio da consciência. Não podemos enviar ordens directamente ao coração, ao fígado ou às glândulas. Temos de inventar exercícios dependentes do movimento dos membros, do esforço dos músculos que podemos comandar, que produzam o desejado efeito nos outros órgãos. Depois de uns poucos de meses de treino apropriado, não sabemos que mudanças tiveram lugar no nosso corpo, mas sentimos o benefício e sabemos que se deram certas alterações.

No treino mental também as alterações decisivas correm fora do domínio consciente. A prova de qualquer sistema de ensino não é verificar se produz estudantes capazes de executarem certos truques como cães amestrados. Tal método é fútil e fundamentalmente degradante. Habilita apenas os rapazes a passarem nos exames, sobre assuntos que não compreendem e qualifica-os para postos onde se sentirão infelizes e incapazes. A prova real de qualquer método de ensino encontra-se mais profundamente. Um estudante que faça uma aproximação correcta do assunto, alcança uma apreciação completa do mesmo por escalões sucessivos. Começa por compreender de que trata o assunto, em seguida sente-se capaz de o dominar e, depois, começa a ter prazer no seu estudo e a pensar nêle fora das horas de trabalho. Sômente quando se criou tal atitude é que o espirito compreendeu, de facto, o significado do assunto. As pessoas evidenciam um grau mais elevado de inteligência e conhecimento nos seus passatempos, do que em qualquer outro ramo de actividade.

**Falta de Interesse.** ¿Será possível transferir para o trabalho a espécie de interesse que sentimos por um passatempo? Depende da razão da falta de interesse.

Há indivíduos cujo interesse se concentra num único assunto. Se sentimos que na vida apenas temos um propósito, seja pintar quadros ou descobrir a cura do cancro, que apenas isto importa e que, em comparação, tudo o resto—conforto, riqueza, respeitabilidade, segurança, laços de família ou obrigações sociais—não tem significado, então não devemos ter dúvidas sobre o que temos a fazer.

Só uns poucos, raros indivíduos, são assim categoricos e claros nos seus designios. A maior parte dos homens e mulheres estão prontos, mais ou menos, a

enquadrar-se nos costumes que os rodeiam, a trabalhar em qualquer profissão onde possam ganhar um ordenado razoável.

Há provavelmente alguns que se encontram entre estes dois extremos—indivíduos que poderiam ser felizes e eficientes num tipo particular de vida, mas que se ignoram a si próprios, ou a quem falta a coragem ou a determinação necessárias para romper com a vida que os outros esperam que vivam. A guerra deu origem a muitos casos em que indivíduos que dantes tinham feito um esforço pouco convincente para se qualificarem para profissões intelectuais, se acharam fazendo um trabalho prático, apagando fogos, conduzindo camiões, etc., etc. Era evidente que tinham encontrado o género da trabalho para o qual a natureza os tinha destinado. Num mundo perfeito teriam sido encorajados a desempenhar tal tarefa sem ter sido necessária uma guerra. Para tais pessoas trata-se, não de aprender matemática, mas sim de a mandar ao diabo na primeira oportunidade favorável.

A primeira pergunta a fazer é então esta: ¿a que tipo pertença eu? ¿Sou um indivíduo com um interesse de tal maneira profundo por algum tipo especial de actividade que me posso permitir mandar passear outros assuntos (incluindo a matemática) e lutar para vir a ser um perito da especialidade, ou pertença ao tipo mais comum que está pronto a trabalhar no que lhe vem à mão?

Devemos decidir-nos definitivamente por uma ou outra alternativa. Ou os nossos interesses estão tão longe da matemática que nunca dela seremos capazes de tirar proveito ou prazer, ou há alguma coisa que achamos digna de realização e para a qual é necessário o conhecimento da matemática. Quando respondermos a esta questão devemos dar-lhe o desconto devido pelo facto já mencionado de que o sistema de ensino parece ter sido especialmente delineado para esvaziar de toda a vida e de todo o interesse os assuntos ensinados. Por Matemática designamos a Matemática viva, não aquela que é ensinada em muitas escolas.

Nalguns casos, portanto, a falta de interesse emerge directamente das raízes mais profundas da personalidade. Mas a vasta maioria das pessoas que odeia as matemáticas não enfileira sob esta bandeira. A causa mais comum do desagrado das matemáticas é, de longe, a maneira como são apresentadas. Pode verificar isto por si próprio. Gosta de quebra-cabeças? Presta atenção às adivinhas do Almanaque Bertrand? Resolve as palavras cruzadas? Gosta do bridge, do xadrês ou das damas? Toma parte nas animadas discussões a que algumas vezes assiste, como por exemplo quando se trata de saber o que aconteceria se os passageiros de um automóvel atirassem uma bola ao ar? cairá novamente no carro? Tem interesse por qualquer

espécie de aperfeiçoamento científico ou mecânico, tal como a radiolocalização ou o funcionamento dum avião? Se assim é, os seus interesses básicos não diferem muito dos do matemático. Conheço uma família (aliás nada snob) que, numa noite de Natal, se dividiu em dois grupos inimigos a propósito do automóvel e da bola. Na escola, eram os rapazes mais normais que mais se entusiasmavam com as soluções que davam a tais problemas. Êste interesse naquilo que poderia acontecer está muito próximo do interesse sentido pelo cientista, e a ciência em breve conduz às matemáticas.

**A Eliminação do Mêdo.** Provavelmente muitas pessoas interessar-se-iam pelas matemáticas, da mesma maneira que muitas se interessariam pela música, se não tivessem mêdo. Interesse e confiança estão intimamente relacionados. Se você descobre que pode fazer alguma coisa, fica agradavelmente impressionado. Gosta da sensação de ter dominado a natureza e de sentir que os outros o admiram. Quere fazer um pouco mais, e quanto mais faz melhor se torna. Por outro lado, se começa por uma derrota, o efeito é opôsto. Ninguém gosta de parecer parvo. Evita o assunto ou trata de fingir que não lhe merece interesse. Decide que nunca poderá fazer nada e, portanto, ¿ para que perder energia? Em qualquer caso, convence-se a si próprio de que é inútil tentar. Tudo isto nada tem que ver com os factos do caso: é a tentativa desesperada de uma alma humana para conservar o equilíbrio e o respeito por si própria. Provavelmente, concentrar-se-á num outro assunto ou passará a jogar furiosamente qualquer jôgo, comentando para consigo próprio: « Bem, posso ser um asno em álgebra, mas no foot-ball e no king sou um ás ! »

Nalgumas escolas, quando um rapaz é uma negação, segue-se o excelente costume de o pôr à banca de carpinteiro ou à rabiça do arado. Convence-se em breve de que pode fazer bem *alguma coisa* e não mais necessita de se enganar a si próprio acêrca das lições. Pode correr o risco de tentar ser alguém, visto a sua confiança não ser agora abalada, caso falhe.

É essencial, se pretende dominar o receio que lhe inspira um assunto, compreender qual é o seu primeiro objectivo. A primeira tarefa não é aprender qualquer resultado particular. É livrar-se do mêdo. Deve andar para trás uma certa distância e começar com um trabalho que esteja absolutamente seguro de fazer. Quando se começa a aprender uma língua estrangeira, por exemplo, é conveniente arranjar um livro escrito nessa língua, destinado ao ensino das primeiras letras às crianças. Por pior que o tenham ensinado, é quasi certo que será capaz de o ler. Esta é a sua primeira vitória—leu um livro escrito de facto para ser usado p oralguém que fala uma língua estrangeira.

Nas matemáticas, é mesmo mais importante andar para trás, até uma encruzilhada ainda mais atrasada. É impossível compreender a álgebra se não dominou a aritmética; é impossível compreender o cálculo se não dominou a álgebra. Se tentar o impossível, sem compreender o que está a fazer, o seu moral sofrerá.

À parte esta necessidade lógica, há também uma razão psicológica. É quasi certo que você carrega ainda consigo todos os sentimentos de frustração e incerteza que o feriram nos vários estágios da sua educação. Sente ainda as derrotas que sofreu quando tinha oito ou nove anos. Êste sentimento desaparecerá imediatamente se fôr direito ao princípio e ler outra vez os livros textos por onde estudou nessa altura. Verificará muitas vezes que as dificuldades desapareceram mesmo sem disso se aperceber.

É por esta razão que há capítulos neste livro que tratam de coisas como a taboada. Lerá êstes capítulos sem dificuldade. A certa altura do livro achar-se-á outra vez intrigado. Isto significa que alcançou um ponto onde o seu conhecimento do assunto começa a mostrar falhas—neste ponto, ou noutro qualquer mais atrasado, deve começar a revisão. Não é nada invulgar ficar atrapalhado com coisas que se acabam de aprender. Se continuar a fazer revisões e estiver perfeitamente a par de tudo o que fêz há um ano ou seis meses atrás, não tem de que se aborrecer.

Um bom processo de fazer uma revisão é agarrar num livro texto e examinar os problemas. Se os puder resolver facilmente, não necessita ler o livro. Pode acontecer que encontre dificuldades nos exemplos de alguns capítulos. Se o livro fôr um dos que leu há vários anos atrás, e se os resultados dados nestes capítulos são mais tarde muito usados, então descobriu a origem das suas dificuldades. Se não são importantes pode, entretanto, abandoná-los.

Nas matemáticas é muitas vezes necessário trabalhar às arrecuas. Se topar com uma dificuldade na página 157, tente descobrir o «porquê». Veja se a página em questão faz uso dos resultados dados em outras páginas anteriores. Se a página 157 depende das páginas 9, 32 e 128, leia estas páginas outra vez e trate de as compreender. Se não fôr capaz, não pode, possivelmente, compreender a página 157.

Se tiver ainda alguma dificuldade peça a alguém que lhe explique a página referida. Verifique com muito cuidado se essa pessoa usa qualquer palavra, sinal ou método, que lhe seja estranho. Se assim succeder, peça que lhe indique onde vem explicada essa palavra, sinal ou método.

Se conseguir ver em que consiste a dificuldade é meio caminho andado para a resolver. Muitas vezes as pessoas têm a cabeça cheia com um nevoeiro de pequenas dificuldades: não estão completamente cer-

tas do significado das palavras, não têm uma idéia clara do que está antes, não compreendem o objectivo do trabalho. Podem resolver-se facilmente tôdas estas dificuldades se forem atacadas uma por cada vez. Desde que o livro esteja escrito numa linguagem simples e razoável, basta consultar um dicionário durante uns minutos para esclarecer a primeira dúvida. A seguir, é ver que conhecimentos são precisos para a compreensão da demonstração do novo resultado. É possível traçar um diagrama que mostre como um livro constitui um todo, como cada secção depende das secções anteriores. Deve estudar-se um livro tanto de traz para a frente, como da frente para trás: deve saber-se que o resultado da página 50 se demonstra, recorrendo ao resultado da página 29, e que aquêlê serve para demonstrar o resultado da página 144. (É evidente que nenhuma pessoa com juízo vai decorar o número das páginas onde se trata da questão que lhe interessa, mas é útil escrever à margem da página 50: «Veja pág. 29; usado a págs. 144»). Muita gente fixa resultados separadamente, mas nunca os liga desta maneira.

Nêste livro não foi possível, para cada simples frase, citar tôdas as referências anteriores que ajudam à sua compreensão. Se não pode compreender uma certa frase, sublinhe-a. É quasi certo que em qualquer parte do capítulo, ou do livro, se fez uma observação especialmente destinada a servir de preparação para a sua compreensão. Numa primeira leitura pode não ter reparado nesta nota. Parecia sem pés nem cabeça. Veja se encontra tais observações. Se assim acontecer, escreva à margem: «Isto explica a frase sublinhada a páginas ...».

Naturalmente julga que esta recomendação pouco vale, que é ridícula. Pode ser que assim seja, mas é necessário muita persuasão para levar as pessoas a fazê-lo. Como regra, alguém que tenha dificuldades no Cálculo ou na Trigonometria, não acredita de boa mente que a atrapalhão seja devida a ignorância da Álgebra ou da Aritmética. Há sempre um exame daqui a um mês, seis meses, um ano, ou o quer que é, e este exame é de Cálculo ou Topografia e não de Álgebra ou Aritmética. Tentar estudar Matemáticas Superiores sem uma firme compreensão das Matemáticas Elementares, é o mesmo que tentar inventar um avião sem nada saber de motores de automóveis. Antes que a indústria automobilística se tivesse desenvolvido, tôdas as tentativas para a construção de aviões foram fracassos completos.

A revisão das Matemáticas Elementares leva muito menos tempo do que se imagina. ¿Por quantos livros texto estudou um rapaz de dezóito anos? Um, sôbre aritmética, outro sôbre álgebra, um de geometria, uma trigonometria e, talvez, um livro de cálculo. Ponha-

mos de lado, por enquanto, a Geometria. ¿Quanto tempo leva a percorrer uma Aritmética e uma Álgebra e ver se há algum resultado importante a que no liceu não se tenha ligado importância? Quanto tempo levam a escrever numa fôlha de papel os índices destes livros e a pôr uma marca em todos os resultados que se tenham compreendido claramente? Não muito. A vantagem dêste procedimento é que se começa a ver o que se tem de estudar.

Há a tendência para julgar a Álgebra uma vasta selva de confusão no seio da qual se vagabundeia sem mapa nem bússola. É muito melhor pensar da Álgebra (ou da parte da Álgebra que é necessário conhecer) como uma meia dúzia de métodos e uns vinte resultados, ou coisa parecida, dos quais provavelmente já conhece 60%. Não necessita mesmo de rever tudo duma vez. Suponha, por exemplo, que encontra dificuldades no Cálculo por não saber muito bem o binómio de Newton. Abra a sua álgebra e veja em que sítio vem. Não se rale, por enquanto, com a demonstração. Procure compreender primeiro, claramente, o que é o binómio de Newton. Está cheio de símbolos como  $C_r^n$  ou  $\binom{n}{r}$  — usam-se símbolos diferentes conforme o livro que consultar. Êstes símbolos são explicados no capítulo que trata da Análise Combinatória. Não se importe mais uma vez com a demonstração. Veja o que significam êstes sinais. Faça uns poucos de exercícios —  $C_1^n$ ,  $C_2^n$  e  $C_3^n$ , por exemplo. Resolva-os numericamente. Volte atrás ao binómio e considere casos particulares. Faça  $n=4$ , por exemplo. O teorema diz respeito à expressão  $(x+a)^n$ . Faça  $x=10$  e  $a=1$ . Calcule  $11^2$ ,  $11^3$  e  $11^4$ . Qual é a relação entre  $11^4$  e os números calculados acima? Calcule  $101 \times 101$  e  $101 \times 101 \times 101$ . O que é que nota acerca de  $11 \times 11$  e  $101 \times 101$ ? E acerca de  $11 \times 11 \times 11$  e  $101 \times 101 \times 101$ ? Aparecem os mesmos algarismos em ambos os casos? Julga que no resultado de  $101 \times 101$  figurarão os mesmos algarismos que no resultado de  $11 \times 11$ ? Em  $101 \times 101 \times 101$  como em  $11 \times 11 \times 11$ ? Se assim é, não está muito longe de descobrir por si próprio o teorema binominal.

Desta maneira, caminhando para trás, passa a saber quais as partes da Álgebra que são úteis ao Cálculo. Sabe, pelo menos, o binómio de Newton e como êle o pode ajudar a calcular  $1001^4$ , mesmo que desconheça a demonstração. Quando um livro ou um professor se referirem ao binómio de Newton será capaz de compreender a maneira como dêle se utilizam. Quando estiver completamente familiarizado com a utilidade e o significado do teorema, pode então ser vantajoso estudar a demonstração. (Alguns livros dão demonstrações muito maçadoras. Procure um que lhe dê uma demonstração breve e que lhe seja simpática).

Tradução de F. CARVALHO ARAÚJO