ANTOLOGIA

OS OBJECTIVOS DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

por ***António Monteiro***

(Palestra lida ao microfone do Rádio Club Lusitânia em Maio de 1944)

O aparecimento da ciência moderna foi determinado pela revolução industrial do século XVIII e por isso o pensamento científico teve a sua origem na vida da Indústria e não na vida das Universidades.

As Universidades eram, nessa época, centros de cultura humanista impenetráveis ao Renascimento Científico. A educação e a investigação científica eram realizadas em organismos especialmente criados para êsse fim. As instituïções cuja actividade mais ilustraram a história da ciência francesa, por exemplo, do século XVI até aos fins do século XIX, foram: o Colégio do Rei (fundado em 1530) que mais tarde seria o Colégio de França, o Jardim do Rei, a Escola de Pontes e Calçadas, a Escola de Minas, o Observatório de Paris, a Escola de Artilharia, a Academia das Ciências, a Academia de Arquitectura, a Academia de Cirurgia, a Escola Politécnica, a Escola Normal Superior, etc., etc.

Só depois da revolução industrial ter pôsto em evidência a importância da ciência é que ela penetrou nas Universidades, com uma lentidão que arrepia quando considerada a distância. Para ilustrar esta afirmação, basta notar que nos princípios do século XIX (mais precisamente em 1802) se exigiam para a entrada na Universidade de Harvard, na América do Norte, conhecimentos de Aritmética que não iam além da regra de três simples, e que na Alemanha o ensino das matemáticas elementares só passou das Universidades para os Liceus entre 1810 e 1830. Mesmo em França, é preciso chegar aos fins do século XIX para que, com a Terceira República, as Universidades possam rivalizar com as chamadas Grandes Escolas.

No século XX a investigação científica aparece como um factor que desempenha um papel de primeiro plano na estruturação da vida das nações.

Nos países em que as Universidades não estiverem directamente ligadas e interessadas na resolução dos problemas fundamentais da vida económica da Nação, elas não podem desempenhar o papel de centros propulsores do progresso científico. Por isso as Universidades dos países mais avançados modificaram profundamente a sua feição, durante o século XX, com a criação de seminários, institutos, centros de estudo e laboratórios destinados a transformá-las em grandes centros de investigação.

O facto da actividade científica ter crescido vertiginosamente nas últimas décadas, deu origem a numerosos problemas de organização difíceis de resolver. Um dos problemas mais discutidos e dos mais importantes é o das relações entre o ensino e a investigação. É um facto indiscutível que as Universidades não podem, só por si, atacar a resolução de todos os problemas que a vida põe em cada época. Por isso, entre as duas grandes guerras dêste século, se acentuou a tendência para organizar a investigação científica como um serviço público independente. A criação recente, em Portugal, da Estação Agronómica Nacional é um exemplo particular desta afirmação. Trata-se na realidade da transposição duma prática corrente na vida das grandes emprêsas industriais, em que um pessoal científico especializado realiza, em laboratórios e institutos especiais, as pesquizas necessárias à vida dessas emprêsas. Mas se pensamos que a investigação científica deve ser organizada como um serviço público independente, e que só assim ela pode ser eficiente, no mundo de amanhã, isto não quere dizer que ela deva ser um previlégio dêsses serviços.

Ser investigador é um dever de todo o cidadão consciente das suas responsabilidades perante a sociedade, porque ser investigador é adoptar uma atitude crítica, perante a vida e o conhecimento, para chegar a novas conclusões.

Mas é claro que para investigar, em certos capítulos da ciência, é necessária uma preparação especial, um longo treino, uma escola. As universidades têm, sob êste aspecto, um papel importante a desempenhar, mas para isso é necessário que o ensino não vise exclusivamente a transmissão de conhecimentos, isto é, que êle não seja um ensino erudito e portanto estéril e infecundo.

Existem, na realidade, investigadores sem qualidades para o ensino, mas nenhum professor poderá iluminar as suas lições com côres vivas e profundas se não tiver vivido os problemas que trata, se não tiver investigado na disciplina que professa.

Torna-se necessário coordenar a actividade das Universidades e dos Institutos de Investigação com o objectivo de aumentar o rendimento da produção científica e facilitar a formação de quadros de investigadores.

Para realizar o apetrechamento intelectual do nosso país, em condições que permitam orientar com eficiência as actividades económicas para a libertação material do homem, é necessário organizar um plano adequado em que a clareza de visão se alie à viabilidade de execução.

Vamos indicar, em breves palavras, a importância da cultura matemática no apetrechamento intelectual do país.

A matemática — ou a ciência do cálculo — é um método geral de pensamento aplicável a tôdas as disciplinas e desempenha portanto um papel dominante na ciência moderna.

A grande obra científica do século XVII foi a organização da Mecânica numa ciência em que é possível prevêr os fenómenos por meio do cálculo matemático. Esta conquista, a que está ligado o grandioso nome de Newton, criou uma base científica segura para a ciência das máquinas a vapor, para citar um exemplo cuja importância é desnecessário realçar. A Química transformou-se, no século XVIII, numa ciência em que o cálculo é possível e esta grande conquista da ciência dêsse século, foi a base fundamental para o desenvolvimento da Indústria Química. No século XIX a Física Matemática criou as bases científicas necessárias para o desenvolvimento da grande Indústria. O século XX será possívelmente o século da Biologia Matemática. Podemos, em qualquer caso, afirmar que assistimos a uma verdadeira matematização de todos os ramos da ciência.

A Matemática aparece assim como uma disciplina fundamental, de cujo progresso depende, em grande parte, o desenvolvimento de muitas outras. Prestar a devida atenção a esta circunstância não é um acto de justiça é antes um acto de prudência e elementar bom senso.

É difícil descrever, exactamente, o estado em que se encontra a cultura matemática portuguesa, mas o mais importante é, como se compreende fàcilmente, comparar o ritmo do seu desenvolvimento com o dos países mais avançados. Encarada a questão sob êste aspecto crucial, podemos afirmar que o movimento matemático português se caracteriza por um atrazo crescente em relação ao movimento matemático internacional.

No interêsse da cultura, que é o interêsse do país, é preciso olhar de frente para esta situação e tirar as conseqüências necessárias. Para desenvolver e actualizar a cultura matemática portuguesa, em condições que garantam a continuïdade e eficiência da obra a realizar, é necessário subordinar essa tarefa a um plano de conjunto traçado com largas perspectivas.

Os matemáticos portugueses conscientes das suas responsabilidades perante o país e perante a cultura, resolveram unir-se para a realização das missões que o dever lhes impõe.

Em 4 de Outubro de 1943, um grupo de investigadores portugueses fundou a Junta de Investigação Matemática e definiu os seus principais objectivos nos seguintes termos:

1.º — Promover o desenvolvimento da investigação matemática;

2.º — Realizar os trabalhos de investigação necessários à economia da Nação e ao desenvolvimento das outras ciências;

3.º — Sistematizar e coordenar a inquirição dos matemáticos portugueses;

4.º — Vincular o movimento matemático português com o dos outros países e, em especial, com o dos países ibero-americanos;

5.º — Despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora.

Os mesmos investigadores convidaram tôdas as pessoas interessadas a ingressarem nêste agrupamento.

Estão hoje reünidos nesta Junta de Investigação Matemática a quási totalidade dos investigadores portugueses que têm dado provas de capacidade, grande dedicação e interêsse efectivo pelo desenvolvimento da cultura matemática portuguesa. Trata-se portanto duma organização que representa as fôrças vitais dessa cultura, o que revela a existência duma consciência profunda dos problemas da hora presente.

As ciências matemáticas têm um grande papel a desempenhar na construção dum Portugal feliz e progressivo. A Indústria, a Agricultura, a Meteorologia, a Aviação, a Navegação, a Estatística, os Seguros, a Engenharia, as Finanças, são baseadas no cálculo matemático.

Criar as bases fundamentais para o aperfeiçoamento e actualização da nossa cultura matemática é uma tarefa gigantesca que só pode ser realizada por vontades disciplinadas que saibam subordinar o interêsse individual ao interêsse colectivo.

Quando os matemáticos portugueses, sem serem solicitados, sem serem forçados, mas animados do grande desejo de servir a Nação, fundaram a Junta de Investigação Matemática, disseram ao país: *para cumprir os nossos deveres, estamos presentes.*

A ARITMÉTICA RACIONAL

por **António Monteiro** e **J. da Silva Paulo**

(Capítulo 0 da «ARITMÉTICA RACIONAL» dos mesmos Autores)

Os Primitivos. A noção de número inteiro tem origem empírica e apareceu no espírito do homem em épocas muito recuadas na História. Em certos calhaus rolados, encontrados no mesolítico, existem, traçados a ocre vermelho, vários sinais, alguns dos quais *barras e pontos*, são presumìvelmente sinais de numeração. Nalgumas gravuras rupestres encontram-se sinais, em geral *barras e pontos* ou *pequenos círculos*, que parecem representar registos de contagens. Em sociedades muito primitivas (tríbos selvagens da África e da Austrália) aparece já a noção de número inteiro, embora vaga e embrionária. O homem de certas tríbos (Pigmeus) sabe contar até cinco e a respeito duma colecção com mais objectos diz que ela tem *muitos* objectos.

Na língua francesa existem duas palavras, *trois* (três) e *très* (muitos) próximas parentes, talvez vestígios da época em que o homem não contava além de dois; mais notável é o caso da palavra inglêsa *thrice*, que tem as duas significações «três vezes» e «extremamente». De resto, ainda hoje existem sociedades em que só há nomes para os números *um* (urapum) e *dois* (okosa).

Os progressos da Aritmética resultam em regra de progressos da vida económica do homem. Os indígenas *Bakumu* não sabem contar além de 30 ou 40, porque os seus contratos comerciais ou de matrimónio não vão, em regra, além de 30 ou 40 unidades.

Existe uma Aritmética dos pastores, como uma Aritmética dos agricultores e dos comerciantes. O pastor que regista o número de crias que nasceram no seu rebanho, serve-se de entalhes no cajado, um por cada cria (Serra da Estrêla). É já um sistema de representação dos números inteiros.

O Misticismo. O desenvolvimento desta representação fêz, pouco a pouco, ligar outro significado à idéia de número. Assim como o desenho de homens e animais se prestava, como representante dêsses homens e dêsses animais, a certas práticas místicas que tinham por fim *conciliar* as fôrças desconhecidas que podiam tornar propícios certos actos de defêsa e de ataque ou de caça, assim também ao número, como representante de algum modo de certos aglomerados, começou a estar ligada uma idéia mística.

A Escola Pitagórica, entre os gregos, atribuia propriedades metafísicas aos números: «*o número é a alma das coisas*», «*o número três representa a divindade*», «*o número é a cadeia, omnipotente e autogénea, que constitui a estabilidade das coisas no mundo*», «*é a prisão na qual a unidade divina fechou o Universo*».

As designações ainda hoje usadas: *números primos, números amigáveis, números perfeitos,* são sobrevivências dessa época.

A mística dos números subsiste ainda em certas camadas populares e nas élites (quando se atribuem, por exemplo, ao número treze, influências perniciosas).

Os Logísticos. A partir da observação foi o homem coligindo dados da experiência, acumulando experiências vividas, e traduzindo-as depois em *leis empíricas*, quando verificou a repetição dos mesmos fenómenos nas mesmas condições. Entre essas leis figuram as leis do cálculo. Há pelo menos cinco mil anos que o homem sabe calcular com números inteiros. No antigo Egipto, e entre os Babilónios, existia já um sistema completo de regras de cálculo sôbre os números inteiros, e sôbre os números racionais, maiores que zero. Criou-se mesmo uma classe de *calculadores profissionais* (chamados *escribas* entre os egípcios, entre os gregos terão o nome de *logísticos*, de *logos* = cálculo, *logísticos* = hábil calculador), que aplicavam essas regras sem se preocuparem com a sua justificação nem com a definição das operações a que dizem respeito (Empirismo do Cálculo).

De dois dêles nos ficam os mais antigos documentos sôbre Aritmética que actualmente se conhecem, os *papiros de Moscovo* (Século XXI A. C.), ou de Golenishschev, e de *Rind*, ou de Ahmes (Século XIX A. C.). [1]

Os Gregos. Depois dos egípcios e dos babilónios, foram os gregos que mais contribuiram para o desenvolvimento da Aritmética. Foram notáveis nêste período: *Pitágoras* (580-501 A. C.) que descobre os irracionais, (facto importantíssimo que será mais tarde o ponto de partida para um rápido desenvolvimento da Aritmética) e *Euclides* (300 A. C.) que esboça uma ordenação dos conhecimentos de Aritmética da época, nos seus ELEMENTOS, onde há já muitas passagens com demonstrações formais de certas regras de cálculo. No entanto, a preponderância da Geometria e o apêlo constante à *representação* geométrica, o desprêzo pela «prática», [2] paralizam o

[1] Golenishschev e A. Henry Rind foram os primeiros possuidores nos tempos modernos daqueles papiros: Ahmes é o nome do escriba que o escreveu.

[2] Veja: Bento de Jesus Caraça. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Vol. I (cap. IV), Vol. II (cap. IV). Lisboa, 1941 e 1942.

desenvolvimento autónomo da Aritmética e dão origem a uma estagnação na técnica do cálculo.

Para os matemáticos gregos as *fracções* não eram números eram «razões» de números inteiros. Os calculadores profissionais (Logísticos) continuavam, porém, a *calcular* com as *fracções* como se fôssem *números*, indiferentes às críticas irónicas de *Platão*.

Daqui em diante até ao Renascimento o principal progresso realizado consiste na elaboração lenta dum simbolismo que terá as suas repercussões.

O Simbolismo. A história das notações aritméticas foi dividida por Nesselman em três grandes períodos: o *retórico*, o *sincopado* e o *simbólico*.

Na *Aritmética Retórica*, os problemas são resolvidos por uma seqüência de raciocínios expressos inteiramente por meio de palavras. Não existem nem abreviaturas, nem símbolos. A preocupação ainda hoje existente de se enunciarem os teoremas da Aritmética recorrendo apenas a palavras e sem utilizar a simbologia conhecida, é uma sobrevivência do estilo retórico.

Na *Aritmética Sincopada*, que nasce com *Diofanto* (Século III), usam-se já abreviaturas para algumas operações e quantidades. É o ponto de partida para uma larga e longa evolução. Parte-se da palavra, passa-se à abreviatura e daqui ao símbolo puro.

É interessante assinalar, por exemplo, a evolução de sinal *menos* (—). Inicialmente, no período retórico, escrevia-se *minus*, depois aparece a abreviatura $\overline{m}$, no período sincopado (o traço sôbre a letra *m* usava-se para recordar que ela não tinha no discurso o significado usual), e finalmente desaparece o *m* e fica simplesmente o traço —.

Durante a Idade Média a Aritmética é caracterizadamente sincopada, Diofanto voltando à tradição dos calculadores profissionais, é levado a desenvolver as regras do cálculo algébrico abstracto, sem se preocupar com a *representação geométrica* dos números. Por isso, para Diofanto, o número pode ser *inteiro*, *racional* e *não racional*.

A *Aritmética Simbólica* nasce, pode dizer-se, com *Viète* que no seu livro *Logistica Speciosa* propõe o seguinte artifício: «*o emprêgo dos símbolos permanentes pela sua natureza e fáceis de compreender, por exemplo: a notação do valor desconhecido por A ou por outras vogais, ao passo que os valores dados são designados por B, C, G e outras consoantes.*»

Cincoenta anos mais tarde *Descartes*, na sua *Géométrie*, representa, pelas primeiras letras do alfabeto, as constantes, e pelas últimas, as variáveis (notação que ainda hoje usamos).

É claro que êstes períodos não são separados por barreiras nítidas; na mesma época há matemáticos que usam o simbolismo ou forma sincopada, enquanto outros escrevem ainda em estilo retórico. Do facto é prova o que escrevia *Moivre* a *Jean Bernoulli* (1705) a propósito de *Gregory*: «*Há uma coisa ridícula no seu cálculo, são as suas expressões, que sendo escritas por extenso, sem a substituïção das várias quantidades por uma única letra, ocupam algumas vezes mais de meia página.*»

Esta transcrição mostra também uma das vantagens do simbolismo, a economia do esfôrço, que não é nem a maior, nem a mais importante.

A Mecanização do Cálculo. A criação dum sistema de notações adequadas ao cálculo, nasceu da necessidade de abreviar e simplificar a resolução de numerosos problemas qne se punham na vida do homem e determinou por sua vez um desenvolvimento prodigioso da Aritmética. Aparecem então as regras fixas que permitem calcular com rapidez e segurança, poupando o espírito e a imaginação (Leibniz), e daqui resulta uma verdadeira MECANIZAÇÃO DO CÁLCULO.

Descartes vê no emprêgo sistemático do cálculo algébrico um método poderoso e universal para resolver todos os problemas e desta corrente de idéias resulta uma verdadeira industrialização da matemática. Sob o ponto de vista que nos interessa, é conveniente notar que esta corrente de idéias continua a tradição dos logísticos, na medida em que se fixa a atenção sôbre o mecanismo do cálculo, independentemente da natureza das entidades sôbre as quais se opera.

É o que acontece quando os matemáticos profissionais aplicam o mecanismo do cálculo já conhecido a certas «entidades» (números negativos e imaginários) que apareciam como resultado de operações «impossíveis» $(1-2, \sqrt{-1})$. A prática do cálculo com êstes números «absurdos», «imaginários» ou «impossíveis» conduzia com freqência a resultados «exactos» e esta circunstância deu origem a que mais tarde aparecessem as primeiras «interpretações concretas» das novas entidades. Parece que Descartes foi o primeiro a reconhecer que se pode raciocinar sôbre entidades abstractas, isto é: de natureza não especificada. Para Descartes a Aritmética e a Geometria «*consistem ùnicamente numa sucessão de conseqüências deduzidas por raciocínio.*» [3] A racionalização da matemática iniciada com Descartes torna os métodos mais simples e mais fáceis (Fontenelle). Nos fins do século XVIII, Lagrange diria que a Química era tão fácil como a Álgebra.

A Aritmética Racional. O aparecimento de novas espécies de números conduziu naturalmente ao estudo pormenorizado das respectivas leis do cálculo. Inicia-se

(3) **Règles pour la direction de l'esprit, règle 2ª.**

assim um movimento de crítica aos fundamentos da Aritmética, que se esboçara já com Descartes, Newton e Leibniz; mas é preciso chegar ao fim do século XIX para que apareça a Aritmética Racional com os trabalhos de Weierstrass, Dedekind, Cantor, Peano e principalmente com os trabalhos de Hilbert e da sua Escola.

Podemos considerar duas atitudes em frente da Aritmética, que não são nem opostas nem contraditórias. Uma, aquela que o homem tomou desde início, com fins utilitários, baseada na necessidade de resolver certos problemas da vida diária. Esta atitude leva-o a *coleccionar noções, leis* que as regem e *regras*, que lhe permitem resolver aquêles problemas. Num estado mais adeantado daquelas noções, leis e regras, deduz outras regras, mas tudo continua sob a forma dum *conjunto de informações* que se aplicam à resolução de certos problemas. É a ARITMÉTICA PRÁTICA.

Nela existem regras, fórmulas de cálculo, teoremas, definições, etc., que são de grande utilidade prática, e que por isso são estudadas no ensino primário e nos primeiros anos do liceu. Todo o ensino destas matérias tem um carácter semi-empírico, semi-lógico e em grande parte metafísico.

A outra atitude, que só aparece em plena luz do século XX, nasce da crítica aos fundamentos da Aritmética e conduz à ARITMÉTICA RACIONAL.

Aqui aparecem as mesmas regras, as mesmas fórmulas de cálculo, teoremas e definições, mas apresentando-se como um conjunto de proposições lògicamente ordenadas. A Aritmética organiza-se como uma ciência dedutiva. Podemos dizer, com J. Young, que uma ciência dedutiva é um conjunto de proposições apresentadas numa certa ordem, de tal modo que cada proposição que segue *uma determinada*, é uma conseqüência lógica de algumas ou tôdas as proposições que a precedem. E logo surge a pregunta: qual deve ser o ponto de partida de uma teoria dedutiva? A primeira proposição, pelo facto de ser a primeira, não se pode deduzir de proposições anteriores. A segunda, geralmente, não será conseqüência da primeira. É claro, então, que há que partir de um conjunto de uma ou mais proposições que *não se provam*. A estas primeiras proposições pode dar-se o nome de *Proposições Primitivas* (outros autores chamam-lhe Postulados, Axiomas, Hipóteses, Leis, etc.). É claro que se estabelecia um ciclo vicioso se quiséssemos provar tôdas as proposições como conseqüências lógicas umas das outras.

Temos portanto que partir dum certo número de *proposições primitivas*, que admitimos como verdadeiras, e é a partir delas que demonstramos as outras proposições. Estas últimas têm o nome de «*proposições demonstráveis*» (Teoremas, Lemas, Princípios, etc.)

Do mesmo modo se vê, pela análise das definições existentes numa teoria, que deve haver algumas noções ou têrmos «não definidos» a que se dá o nome de idéias ou *noções primitivas*. As entidades correspondentes são representadas, em regra, por símbolos. Elas aparecem, em particular, nos enunciados das *proposições primitivas*, que fixam as regras que devem ser respeitadas no manejo daquelas noções. Na concepção formalista de Hilbert as noções primitivas são até consideradas como definidas exclusivamente por aquelas regras.

Quando o formalismo é levado até às suas últimas conseqüências (é o que acontece quando, com Hilbert, se abstrai completamente do significado dos símbolos que intervêm numa teoria determinada) então os símbolos ($+$, $\cdot$, $\leq$, $<$, a, b, etc.) passam a ser *entidades concretas* que se manejam de acôrdo com regras bem determinadas. Por isso a atitude formalista de Hilbert e da sua Escola, se converteu numa atitude nìtidamente realista.

O Cepticismo. Quando a crítica às regras de cálculo da Aritmética tinha chegado a esta posição, levantou-se nos fins do século XIX e princípios do nosso século (de acôrdo com as tendências gerais do pensamento da época) um côro geral de descrença e desconfiança nas virtudes da vaga de racionalismo que invadia o pensamento matemático.

O grande matemático francês H. Poincaré, por exemplo, com certo tom de tristeza, dizia: *Antes de Descartes, só o acaso, ou o génio, permitiam resolver uma questão de geometria; depois de Descartes pode-se chegar ao resultado por regras infalíveis; para ser um geómetra basta ser paciente. Mas um método puramente mecânico, que não exige ao espírito de invenção nenhum esfôrço, não pode ser realmente fecundo».*

Entra-se numa época em que as tendências racionalistas da Matemática sofrem acusações da mais variada natureza: «*automatismo lógico*», «*intelecto petrificante*», «*verbalismo escolástico*», «*mecanismo estéril*», «*malabarismo cego*», etc.

A maioria daqueles que ainda defendem as tendências racionalistas da Matemática não o fazem sem largas concessões às tendências irracionais (intuïcionistas, emocionais, instintivas, idealistas, místicas, etc.).

Chega-se a dizer que a grande fraqueza da Álgebra e da Lógica é «*não ter sinais para representar as noções confusas.*»

Tôdas estas tendências vinham de longe e persistem nos nossos dias. Já d'Alembert dizia na ENCYCLOPEDIE (T. I. 1751, pág. 551, artigo Application) que o «*uso demasiado freqüente e fácil da Análise pode tornar o espírito preguiçoso.*» Carnot, no princípio do século XIX, apregoava mesmo a necessidade de *«renunciar a considerar as quantidades negativas como seres reais»* e exaltava o papel da intuïção.

Tendências Modernas. O desenvolvimento vertiginoso da Matemática no século XX, veio porém demonstrar a necessidade e utilidade dos métodos racionais, em particular da unificação de disciplinas que até então eram estudadas separadamente, reduzindo-se a pó o cepticismo anteriormente referido. Esta tendência da Matemática moderna tem naturalmente as suas repercussões no estudo da teoria dos números e permite encará-la sob novos aspectos.

Para que a *Aritmética* se possa chamar *Racional* é indispensável que ela seja apresentada sob a forma duma teoria dedutiva, e para isso é necessário distinguir cuidadosamente as *proposições primitivas* das *proposições demonstráveis.*

Sem esta distinção o estudo da Aritmética tem um carácter nebuloso que torna impossível o entendimento de qualquer demonstração.

Um estudo crítico aturado demonstrou, porém, que a Aritmética se pode organizar como uma teoria dedutiva de muitas e variadas maneiras.

A nossa atenção pode então ser dirigida para a estrutura das diversas teorias. Como a ordem em que *«aparecem»* os *«teoremas»* pode variar com uma certa latitude, surge a tendência para *Racionalizar* a própria *Aritmética Racional.*

Essa racionalização pode ser feita de forma a abreviar o estudo, economizar o esfôrço, aliviar a memória e obter um conhecimento mais profundo da própria teoria. Os autores dêste livro visaram (além de tudo isto) o objectivo fundamental do ensino da Aritmética Racional no liceu: *«preparar o aluno para prosseguir estudos superiores.»*

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CONGRESSO PARA O AVANÇO DAS CIÊNCIAS — CÓRDOVA — OUTUBRO DE 1944

A «Gazeta de Matemática» apresenta neste número uma rápida resenha dos trabalhos de matemática apresentados na 1.ª secção do Congresso Luso-Espanhol. Os Profs. Ruy Luís Gomes e Bento de Jesus Caraça do Centro de Estudos de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto e do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, respectivamente, relatam a participação portuguesa e o Prof. Síxto Ríos da Universidade de Madrid refere a participação espanhola.

O Centro de Estudos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto apresentou ao Congresso de Cordova os seguintes trabalhos:

A — *«Álgebra Moderna»:* ANTÓNIO DE ALMEIDA E COSTA: 1 — *Sôbre os anéis semi-primários.* 2 — *Sôbre um teorema dos corpos comutativos.*

B — *«Análise»* : JOSÉ GASPAR TEIXEIRA : *Sôbre uma certa classe de polinómios de coeficientes complexos.*

C — *«Teoria Geral da Medida e da Integração»* : LUÍS NEVES REAL : *Sôbre a construção algébrica da teoria geral da medida* ; RUY LUÍS GOMES : *Sôbre a definição algébrica de integral em espaços abstractos.*

D — *«Topologia»* : ALFREDO PEREIRA GOMES : *Sôbre a a noção de espaço compacto* ; ANTÓNIO MONTEIRO : *Caracterização dos espaços topológicos mais gerais determinados pela família dos conjuntos fechados;* MARIA O. BOTELHO *e* MARIA H. COSTA FERREIRA : *Caracterizações simples dos espaços de Kuratowski.*

O Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras participou no Congresso de Córdoba de Outubro de 1944 com a apresentação de três trabalhos individuais e um colectivo.

Os trabalhos individuais foram:

a) *Os polinómios* Q (x) *e* G (x) *como resultados da ortogonalização dos sistemas* $[f_k = (-1)^k \cdot n^k \cdot x^k]$ *e* $\left[f_k = \frac{(x)_k \cdot m^{x/2}}{\sqrt{x!}}\right]$ pelo assistente Dr. Alfredo Miranda.

b) *Sôbre os conceitos de regime de capitalização e de equivalência financeira,* pelo assistente Dr. Augusto Sá da Costa (actualmente em Zürich).

c) *Sôbre a população portuguesa,* pelo assistente Dr. João Remy Freire.

O trabalho colectivo foi a seguinte Proposta apresentada e discutida na 1.ª Secção (Matemáticas e Astronomia) do Congresso:

«1. É de todos sabido que, por falta duma tábua de mortalidade portuguesa, todos os estudos e determinações actuariais em Portugal têm sido sempre feitos sôbre a base de tábuas de mortalidade, gerais e especiais, estrangeiras.

2. Os inconvenientes que daí resultam, já patentes actualmente, tornar-se-ão ainda maiores quando amanhã o problema da previdência ultrapassar definitivamente a fase privada, de que agora começa a sair, para se entrar numa larga política de previdência social.