MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus — Outubro de 1943. — Ponto n.º 4.

I

1900 — Determine as condições a que deve satisfazer m para que as raízes da equação $(m+2)x^2+x-(m^2+2m-1)=0$ sejam de sinais contrários e indique os casos, separadamente, em que a raíz de maior valor absoluto tem os dois sinais possíveis. R: *Para que as raízes sejam de sinais contrários, deverá ser* $-(m^2+2m-1):(m+2)<0$ *ou* $(m^2+2m-1):(m+2)>0$. *As raízes do trinómio* m^2+2m-1 *são* $-1\pm\sqrt{2}$ *e êste trinómio é positivo para os valores de* m *tais que* $m<-1-\sqrt{2}$ *e* $m>-1+\sqrt{2}$. *Como* $m+2$ *é positivo para* $m>-2$, *segue-se que as raízes da equação têm sinais contrários para os valores de* m *que satisfazem a* $m>-1+\sqrt{2}$. *Por outro lado* m^2+2m-1 *é negativo para os valores de* m *tais que* $-1-\sqrt{2}<m<-1+\sqrt{2}$, *e* $m+2$ *é negativo para* $m<-2$, *donde a condição ser também verificada para os valores de* m *que satisfazem à dupla desigualdade* $-1-\sqrt{2}<m<-2$. *A raíz de maior valor absoluto é positiva para os valores de* m *que tornavam* $-1/(m+2)$ *positivo, o que exige que* m *seja menor que* -2. *Quere dizer que a raiz de maior valor absoluto é positiva para os segundos valores achados* $-1-\sqrt{2}<m<-2$. *Será negativa quando* $-1/(m+2)<0$ *ou seja* $m>-2$, *e, portanto, para os valores de* m *que satisfazem a* $m>-1+\sqrt{2}$, *primeiros valores que se acharam.*

1901 — Indique a condição a que deve satisfazer c para que a equação $12x+15y=c$ admita soluções inteiras. Justifique a resposta. R: c *deve ser um múltiplo do* m. d. c. *de* 12 *e* 15 *ou seja* $c=\dot{3}$, *porque sendo assim, a equação que se obtém dividindo os coeficientes da equação proposta por* 3 *tem os coeficientes das incógnitas primos entre si.*

1902 — Exprima em função de n a soma dos n primeiros números pares. R: *Os primeiros números pares constituem uma progressão aritmética de razão* 2 $\div 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$ *cuja soma é* $S=(2+2n)\,n:2=n\,(n+1)$.

II

1903 — Determine por logaritmos o perímetro dum losango em que um ângulo inteiro mede $115°\,25'$ e a diagonal que passa pelo vértice dêsse ângulo mede 27 metros. R: *O lado* l *do losango é dado por*

$$l=d/2:\cos\alpha/2\,;$$
$$l=13{,}5:\cos 57°\,42'\,30''\,;$$
$$\log l=\log 13{,}5+\operatorname{colog}\cos 57°\,42'\,30''\,;$$
$$\log l=1{,}13033+0{,}27227=1{,}40260\,;$$

donde $l=25{,}27$ m *e o perímetro é* $4l=101{,}08$ m.

1904 — Determine o valor da tangente dum ângulo obtuso sabendo que a cosecante é 3. R: *O ângulo é do 2.º quadrante. De* $\operatorname{cosec}\alpha=3$ *deduz-se* $\operatorname{sen}\alpha=1/3$ *e* $\cos\alpha=-\sqrt{1-1/9}=-2\sqrt{2}/3$ *donde* $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{2}/4$.

III

1905 — Deduza a expressão do lado do dodecágono regular em função do raio do círculo circunscrito, a partir do conhecimento do lado do hexágono regular, inscrito no mesmo círculo. R: *Como* $l_6=R$ *se fôr* x *a diferença entre o apótema* OM *do hexágono e o raio do círculo vê-se que* $l_{12}=\sqrt{R^2/4+x^2}$. *Ora* $x=R-OM$ *e* $OM=\sqrt{R^2-R^2/4}=R/2\cdot\sqrt{3}$ *donde, finalmente, se deduz* $x=R\,(1-\sqrt{3}/2)$ *e* $l_{12}=\sqrt{R^2/4+R^2\,(1+3/4-\sqrt{3})}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1906 — Indique e justifique a construção que permite traçar tangentes a uma circunferência a partir dum ponto exterior. R: *Seja* [c] *a circunferência de centro* O *e* P *o ponto. Divida-se* $\overline{OP}$ *ao meio e com o raio* $\overline{OM}$ *e centro em* M *(ponto médio do segmento* $\overline{OP}$*) descreva-se uma circunferência que intersecte* [c] *nos pontos* P_1 *e* P_2. *As rectas* PP_1 *e* PP_2 *são tangentes a* [c]. *Com efeito os ângulos* OP_2P *e* OP_1P *são rectos por serem inscritos numa circunferência e os seus lados passarem pelos extremos dum diâmetro.*

IV

1907 — Defina m. d. c. de dois números. Sofrerá êste m. d. c. alteração quando um dos números se divide por um seu divisor que seja um número primo com o outro? Justifique a resposta. R: *Não, porque no* m. d. c. *só entram os factores comuns aos dois números. A substituição dum dos números pelo cociente da sua divisão por um divisor que é primo com o segundo número só implica a supressão dos factores primos que compõem êsse número e que, por hipótese, não são comuns aos dois números dados, por êste divisor ser primo com um dêles.*

Soluções dos números 1900 a 1907 de José Júlio Rodrigues dos Santos.