MATEMÁTICAS SUPERIORES

BREVE ESTUDO, NO CAMPO REAL, DE ALGUMAS TRANSCENDENTES ELEMENTARES (*)

por **Manuel Zaluar Nunes**

Generalização da noção de potência

Supozemos até aqui definida a potência de expoente racional e tendo por base um número qualquer positivo [1] e estudadas as suas propriedades fundamentais. Introduziu-se, seguidamente (ao fazer o estudo da função e^x) a definição de potência de base e para expoente real qualquer (racional e *irracional*).

A definição de expoente real qualquer dum número positivo é dada, como é de esperar, de modo que as mesmas regras de cálculo continuem a aplicar-se.

Ora, para x racional qualquer e $a \geq 0$, é $\log a^x = x \log a$ ou $a^x = e^{x \log a}$. Notemos mais que *para* x *irracional* o 2.º membro da última igualdade escrita, isto é, $e^{x \log a}$ tem um significado preciso, não sucedendo porém o mesmo ao primeiro membro. Pois bem: *por definição* diremos que a^x tem para x irracional o valor $e^{x \log a}$. Passa assim, por exemplo, a ter significado, o que não sucedia até aqui, o símbolo $3^{\sqrt{2}}$, sendo, por definição $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log 3}$.

É fácil de verificar que as regras de cálculo continuam a aplicar-se.

Assim, por exemplo, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (x e y reais quaisquer). Com efeito, $a^x \cdot a^y = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = e^{(x+y) \log a} = a^{x+y}$ em vista das propriedades deduzidas já para e^x. Anàlogamente $(a^x)^y = (e^{x \log a})^y = e^{xy \log a} = a^{xy}$, etc.

Função a^x

Feita a generalização precedente, fica definida a função $y = a^x$ $(a > 0)$ (*exponencial de base* a): $a^x = e^{x \log a}$. Esta função é evidentemente contínua e derivável e tem-se: $y' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a$. Da definição resulta que é, para x qualquer, sempre $a^x > 0$. De $y' = a^x \log a$ resulta que:

se $a < 1$ $y' < 0$ e y monotónica decrescente;
se $a > 1$ $y' > 0$ e y monotónica crescente;
no caso $a = 1$ $y = 1$ reduz-se a uma constante.

De $y'' = a^x \log^2 a > 0$ deduz-se qual o sentido da concavidade para a qualquer positivo.

É também evidente (partindo da expressão de y' para $x=0$) que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$.

Função $y = \log_a x$ (logaritmo de base a)

A função $y = \log_a x$, $a > 0$, pode definir-se como a função inversa da exponencial de base a. Assim, tem-se $y = \log_a x$, ou $x = a^y$ (é a definição dada nos Liceus só válida então, porém, para y racional).

Mas de $x = a^y$ deduz-se também $\log x = y \log a$ donde $y = \log_a x = \dfrac{1}{\log a} \log x$.

A função logaritmo de base qualquer $a > 0$ é pois uma função do tipo $y = C \log x$, definindo a escôlha da base o valor de $C = \dfrac{1}{\log a}$.

Na prática, como se sabe, utiliza-se a base $a = 10$ que se adapta melhor à numeração decimal.

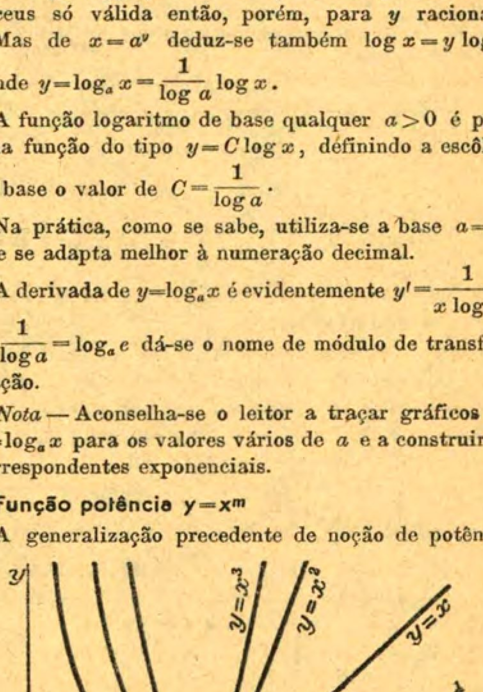
A derivada de $y = \log_a x$ é evidentemente $y' = \dfrac{1}{x \log a}$.

A $\dfrac{1}{\log a} = \log_a e$ dá-se o nome de módulo de transformação.

Nota — Aconselha-se o leitor a traçar gráficos de $y = \log_a x$ para os valores vários de a e a construir as correspondentes exponenciais.

Função potência $y = x^m$

A generalização precedente de noção de potência



permite-nos também definir a função $y = x^m$ $(x > 0$ m real qualquer).

(*) Conclusão do número anterior.

[1] No estudo da função a^x que faremos imediatamente a seguir não interessa, por causa da continuïdade, o caso $a < 0$. Limitamos o nosso estudo, como já se frizou, ao campo real. Aproveite-se, porém, a ocasião para recordar o que se estabeleceu relativamente à operação potência de *base qualquer e expoente racional* ao deduzir a fórmula de Moivre generalizada.

Será $y=x^m=e^{m\log x}$. Também se deduz que $y>0$ e $y'=e^{m\log x}\cdot\frac{m}{x}=mx^{m-1}$ (o que mostra que a regra de derivação de uma potência é válida para qualquer expoente).

É útil fazer um estudo mais pormenorizado da função potência para os valores de m estudando o sentido de crescimento e de concavidade (veja-se a figura junta).

Introduzida a função x^m para valores irracionais de m as duas propriedades assinaladas quando do estudo da função $y=\log x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x=0}x^n\log x=0$$

são agora extensíveis a qualquer valor positivo de n, racional ou não.

Sendo n positivo, a função $f(x)=x^n\log x$ é pois um infinitésimo com x a que é impossível assinalar ordem.

Nota — Terminamos aqui a nossa breve exposição em que quási nos limitámos a introduzir definições e deduzir seguidamente as mais importantes propriedades. Um estudo das transcendentes elementares, no campo real, requere o tratamento de outros problemas como seja o dos desenvolvimentos em série de potências (ou dos desenvolvimentos limitados de Mac Laurin) das funções $\log(1+x)$, e^x, a^x, $(1+x)^n,\cdots$, e determinação da sua validade. Dos desenvolvimentos obtidos partir-se-ia para o cálculo numérico destas funções. Seguir-se-ia, também, naturalmente depois, o estudo de outras funções como as hiperbólicas directas e inversas, as funções circulares e suas inversas, a função u^v, etc.. Veja-se, por exemplo, além dos livros citados já na bibliografia (Gaz. Mat. n.º 20), também os seguintes:

H. Commissaire et *G. Cagnac*. Cours de Mathématiques Spéciales — Vol. II, 2ème édit. — Paris, 1941.

René Garnier — Cours de Mathématiques Génerales — Tome I, Paris, 1930.

A. Sá da Costa — O cálculo da soma de uma série — «Gazeta de Matemática» n.º 11, 1942.

EXAMES DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de freqüência, Fevereiro de 1944.**

1908 — Verificar a identidade $\mathrm{arc\,cotg}\,(2n-1)-\mathrm{arc\,cotg}\,(2n+1)=\mathrm{arc\,cotg}\,2n^2$ e determinar, a partir dela, a soma da série de têrmo geral $\mathrm{arc\,cotg}\,2n^2$. R: *Pondo* $\mathrm{arc\,cotg}\,(2n-1)=a$ *e* $\mathrm{arc\,cotg}\,(2n+1)=b$, *a igualdade* $\mathrm{cotg}\,(a-b)=(1+\mathrm{cotg}\,a\cdot\mathrm{cotg}\,b)/(\mathrm{cotg}\,b-\mathrm{cotg}\,a)$ *prova a identidade. A soma da série é:* $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{arc\,cotg}\,2n^2=\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{arc\,cotg}\,(2n-1)-\mathrm{arc\,cotg}\,(2n+1)]$; *como os têrmos se reduzem dois a dois sucessivamente, com excepção do primeiro, é* $S=\mathrm{arc\,cotg}\,(-1)$.

1909 — Achar as derivadas das funções:

a) $y=\mathrm{arc\,tg}\sqrt{(1-\mathrm{sen}\,x)/(1+\mathrm{sen}\,x)}$;

b) $y=\log[(x+1)^2+x^{x+1})]$.

1910 — Achar a primitiva da função: $y=\mathrm{tg}^3x+x\,\mathrm{arc\,tg}\,1/x$. R: *Como* $P\,\mathrm{tg}^3x=P\,\mathrm{tg}\,x\,(\sec^2x-1)=\mathrm{tg}^2x/2-\log\cos x$, *primitivando por partes a 2.ª parcela de* y, *vem:* $Py=\mathrm{tg}^2x/2-\log\cos x+x^2/2\cdot\mathrm{arc\,tg}\,1/x-1/2\cdot(x-\mathrm{arc\,tg}\,x)$.

1911 — Num cilindro circular recto é constante a soma dos comprimentos do raio e da altura. Quando é máximo o volume do cilindro? R: *A fórmula que dá o volume de um cilindro circular recto é* $V=\pi R^2h$; *e como* $h+R=K$, *teremos* $V(R)=\pi R^2K-\pi R^3$, *função que é máxima para* $R=2K/3$ *ou, o que é o mesmo,* $R=2h$.

Soluções dos n.os 1908 a 1911 de Carlos de Jesus, aluno do 2.º ano da Faculdade de Ciências de Coimbra.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — 1.º exame de freqüência, 1943-44.

1912 — Extremar a função $\psi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, sendo (1) $x-y+2z=1$. R: *Temos* $\Phi=x^2+y^2+z^2+\lambda\cdot(x-y+2z-1)$ *e:* $\Phi'_x=2x+\lambda=0$, $\Phi'_y=2y-\lambda=0$, $\Phi'_z=2z+2\lambda=0$; *estas equações dão, com* (1): $x=-\lambda/2$, $y=\lambda/2$, $z=-\lambda$, $\lambda=-1/2$ *ou* $x=1/4$, $y=-1/4$, $z=1/2$ *e* $\lambda=-1/2$; *ora* $d^2\Phi=2dx^2+2dy^2+2dz^2$ *e* $dy=dx+2dz$; *logo* $\varphi_2(P_0,\alpha)=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+2\alpha_2)^2+2\alpha_2^2=2+2(\alpha_1+2\alpha_2)^2>0$. *Há portanto um mínimo no ponto:* $P_0(1/4,-1/4,1/2)$.

1913 — Calcular $P1/(3+\cos x)$. R: *Pondo* $\mathrm{tag}\,x/2=t$, *vem* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ *e* $x'=2/(1+t^2)$; *logo* $P1/(3+\cos x)=P2/(4+2t^2)=P1/(2+t^2)=[\mathrm{arc\,tag}\,(t/\sqrt{2})]/\sqrt{2}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tag}\,\frac{\mathrm{tag}\,x/2}{\sqrt{2}}+C$.

F. C. C. — 2.º exame de freqüência, 1943-44.

1914 — Resolver a equação de derivadas parciais $q=\varphi(p,y)$ pelo método de Charpit-Lagrange.

R: *Temos* $dp=0$; *logo* $p=c$ *e portanto* $q=\varphi(c,y)$; $\frac{dz}{dx}=c$ *e* $\frac{dz}{dy}=\varphi(c,y)$; *vem pois* $z=cx+u(y)$, $\varphi(c,y)=u'(y)$, $u(y)=P\varphi(c,y)+c_1$; *por conseqüência* $z=cx+P\varphi(c,y)+c_1$.

1915 — Calcular o volume do elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. R: *Temos* $V=8\iint_A z\,dx\,dy=$ $=8\iint_A c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\,dx\,dy$. *Fazendo* $x=av\cos u$, $y=bv\,\mathrm{sen}\,u$ *com* $0<v\lesseqgtr 1$ *e* $0\lesseqgtr u\lesseqgtr\pi/2$ *temos* $|J|=abv$; *logo*

$$V=8c\iint_{A'}\sqrt{1-v^2\cos^2u-v^2\,\mathrm{sen}^2u}\,abv\,du\,dv=$$

$$=8c\iint_{A'}\sqrt{1-v^2}\,abv\,du\,dv=$$

$$=8abc\int_0^1 v\sqrt{1-v^2}\,dv\int_0^{\pi/2}du=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Soluções dos n.os 1912 a 1915 de José B. Pacheco de Amorim.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **1.º exame de freqüência ordinário, 7-3-944.**

1916 — Demonstre que, se $\boldsymbol{a}$ fôr perpendicular a $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, se tem $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})^2$.

1917 — Demonstre que, se — em dado instante — o movimento dum sólido fôr de translação, entre as acelerações de dois quaisquer dos seus pontos, P e O, existe a relação $P''=O''+\boldsymbol{\omega}'\wedge(P-O)$, na qual $\boldsymbol{\omega}$ designa o vector livre velocidade angular. R: *Derivando ambos os membros da fórmula fundamental das velocidades* $P'=O'+\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)$ *e atendendo a que, no instante considerado, é* $\boldsymbol{\omega}=o$, *obtém-se imediatamente a relação indicada.*

1918 — Recorde que o raio de curvatura da elipse no ponto de encontro (vértice) com o seu eixo de comprimento $2a$ vale $\rho=b^2/a$, sendo $2b$ o comprimento do outro eixo.

Considere uma elipse de semi-eixos $a=20$ m e $b=10$ m.

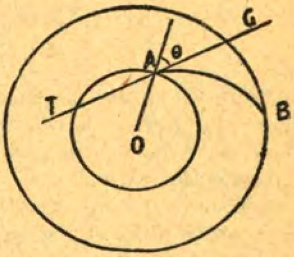
Suponha que um ponto descreve a elipse com movimento uniforme de velocidade igual a 7,2 km/h.

Determine as acelerações normais nos vértices da trajectória. R: *Designando os vértices por* A, B, C *e* D, *sendo* A *e* C *os situados sôbre o eixo de comprimento* 2a, *vem*

$$j_n(A)=j_n(C)=0{,}8\ \mathrm{m/s^2}\ \textit{e}\ j_n(B)=j_n(D)=0{,}1\ \mathrm{m/s^2}.$$

1919 — Demonstre que tôdas as soluções da equação vectorial $\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{x}=m$, onde são constantes o vector $\boldsymbol{a}\neq o$ e o escalar m, são dadas por $\boldsymbol{x}=\frac{m\boldsymbol{a}}{a^2}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{a}$, em que $\boldsymbol{v}$ é um vector arbitrário.

1920 — A figura representa parcialmente a roca duma bomba centrífuga, com raio interno $\overline{OA}=5$ in.

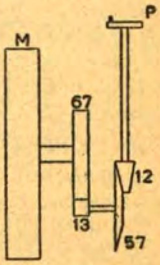


Em regime normal de funcionamento, a pá AB efectua 520 r.p.m. em tôrno de O, no sentido directo; e a água caminha de O para A, chegando a êste ponto com a velocidade absoluta de 7 ft./sec.

Sabendo que, em regime normal de funcionamento, para que não haja choque, a água deve atingir a pá segundo a tangente TG em A, determine o ângulo θ de TG com OA. R: $\theta=\arctan 3{,}24=72°\,51'$.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **2.º exame de freqüência extraordinário, 30-5-944.**

1921 — A figura mostra esquemàticamente o trem de engrenagens que, na gadanheira Ajuria, transmite ao prato-manivela P o movimento da roda motora M, cujo rasto assenta no terreno.



A roda M tem 720 mm de diâmetro. Os números de dentes das rodas do trem estão indicados na figura.

Calcule o número de voltas que efectua o prato-manivela por cada hectómetro percorrido pela gadanheira. R: 1082.

1922 — Considere um sistema de pontos materiais coplanares. Suponha que êle admite dois eixos de simetria material ortogonais e concorrentes em O.

Demonstre que, se os momentos de inércia do sistema em relação a êsses eixos forem iguais, o momento quadrático do sistema tem o mesmo valor em relação a tôdas as rectas do seu plano que passam por O. R: *Os eixos de simetria material são principais de inércia. Se os momentos quadráticos em relação a êstes eixos (momentos principais) são iguais, a elipse de inércia é uma circunferência, facto que torna evidente a proposição enunciada.*

1923 — Considere um tronco recto de cilindro de revolução homogéneo, com densidade ρ, raio da base R e comprimento b.

Calcule o seu momento de inércia em relação: *a*) ao eixo de simetria; *b*) a uma das geratrizes.
R: a) *Decompondo em tubos elementares coaxiais, vem* $I_r = 2\pi\rho b \int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi\rho b R^4$; b) *o Teorema de Lagrange fornece, a partir do resultado anterior,* $I_g = \frac{3}{2}\pi\rho b R^4$.

1924 — Se o ponto de aplicação da fôrça $\boldsymbol{F} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ percorrer o eixo Ox no sentido positivo com velocidade igual a 2, qual é a potência de $\boldsymbol{F}$? (Unidades M.K.S.). R: 10 W.

1925 — $Oxyz$ é um sistema galileano.

O ponto material P com 9,80 kg de massa percorria Ox, no sentido positivo, com a velocidade constante de 2 cm/s. O é a posição inicial de P.

Quando P chegou ao ponto de abscissa $+1{,}52$ m, foi-lhe aplicada uma fôrça, com a direcção e o sentido de Oy, de intensidade igual a 2 kg.

Calcule a velocidade vectorial de P no instante $t = 1$ m 20 s. R: $\mathbf{V} = 0{,}02\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ (U. m.).

Soluções dos n.os 1917 a 1925 de P. de Varenes e Mendonça.

PROBLEMAS

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1895 — Calcular os catetos e a hipotenusa dum triângulo rectângulo, conhecendo-se as superfícies (A_1 e A_2) dos dois triângulos, em que a altura, correspondente à hipotenusa, o divide. R: *Sejam* h *a altura relativa à hipotenusa, e* p *e* q *os segmentos em que esta é dividida por aquela, correspondentes aos triângulos de áreas* A_1 *e* A_2 *respectivamente. Tem-se* $2A_1 = h \cdot p$ $2A_2 = h \cdot q$ *e, por conseqüência,* $4A_1 A_2 = h^4$ *Tem-se mais* $ah = 2(A_1 + A_2)$, $bc = 2(A_1 + A_2) \cdots (1)$, $a^2 = b^2 + c^2 \cdots (2)$. *Resolvendo êste sistema de 4 equações a 4 incógnitas, acha-se:*

$$a = \frac{2(A_1 + A_2)}{\sqrt[4]{4A_1 A_2}}, \quad b = \frac{\sqrt{(A_1 + A_2)^2 \pm (A_1^2 - A_2^2)}}{\sqrt[4]{A_1 A_2}},$$

$$c = \frac{2(A_1 + A_2)\sqrt[4]{A_1 A_2}}{\sqrt{(A_1 + A_2)^2 \pm (A_1^2 - A_2^2)}},$$

onde os radicais são tomados com o seu valor aritmético. Qualquer das 2 últimas fórmulas dá os valores dos 2 catetos, porque se b_1 *e* c_1 *são os valores de* b *e de* c *correspondentes ao sinal superior, e* b_2 *e* c_2 *os correspondentes ao sinal inferior, tem-se, em virtude da simetria das equações* (1) *e* (2), $b_1 = c_2$, $b_2 = c_1$.

Solução de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Carlos A. G. Gomes (do Pôrto); Fernando R. D. Agudo (de Lisboa); e Paul Richard (de Portalegre).

1896 — Encontrar quatro números inteiros consecutivos tais que o cubo do maior seja igual à soma dos cubos dos outros três.

(*Generalizar:* — quatro números formando progressão aritmética).

R: *Seja* r *a razão da progressão. Se* r *fôr positivo, deverá ser* $(x + 3r)^3 = x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3$ *ou* $x^3 - 6r^2 x - 9r^3 = 0$. *Esta equação tem sempre uma só raiz real, como se conclui do sinal do seu discriminante* $(9/2 \cdot r^3)^2 - (2r^2)^3$. *Acha-se* $x = 3r$. *Os números* $3r$, $4r$, $5r$, $6r$, *verificam pois a relação*

$$(1) \qquad (3r)^3 + (4r)^3 + (5r)^3 = (6r)^3.$$

Se a razão da progressão fôsse $-r$ (r *positivo*), *os números que se obteriam seriam ainda os precedentes, escritos em ordem inversa, porque se fôssem diferentes, dispondo-os em progressão crescente, a razão seria* r, *recair-se-ia no caso anterior e igualando o cubo do maior à soma dos cubos dos outros, ter-se-ia uma igualdade que não coïncidiria com a identidade* (1) *e que, portanto, não seria verdadeira. Fazendo na identidade* (1) $r = 1$ *obtém-se os 4 inteiros consecutivos pedidos.*

Solução de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Carlos A. G. Gomes (do Pôrto); Fernando R. D. Agudo, (de Lisboa); Heliodoro A. Lopes (de Coimbra); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); e T. Ferreira Rato (S. Tiago de Cabo Verde).

1897 — Resolver a equação

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b.$$

R: *Efectuando o cociente*