coplanares. Suponha que êle admite dois eixos de simetria material ortogonais e concorrentes em O.

Demonstre que, se os momentos de inércia do sistema em relação a êsses eixos forem iguais, o momento quadrático do sistema tem o mesmo valor em relação a tôdas as rectas do seu plano que passam por O. R: *Os eixos de simetria material são principais de inércia. Se os momentos quadráticos em relação a êstes eixos (momentos principais) são iguais, a elipse de inércia é uma circunferência, facto que torna evidente a proposição enunciada.*

1923 — Considere um tronco recto de cilindro de revolução homogéneo, com densidade ρ, raio da base R e comprimento b.

Calcule o seu momento de inércia em relação: *a*) ao eixo de simetria; *b*) a uma das geratrizes.
R: a) *Decompondo em tubos elementares coaxiais, vem* $I_\Gamma = 2\pi\rho b \int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi\rho b R^4$; b) *o Teorema de Lagrange fornece, a partir do resultado anterior,* $I_g = \frac{3}{2}\pi\rho b R^4$.

1924 — Se o ponto de aplicação da fôrça $\boldsymbol{F} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ percorrer o eixo Ox no sentido positivo com velocidade igual a 2, qual é a potência de $\boldsymbol{F}$? (Unidades M.K.S.). R: 1o W.

1925 — $Oxyz$ é um sistema galileano.

O ponto material P com 9,8o kg de massa percorria Ox, no sentido positivo, com a velocidade constante de 2 cm/s. O é a posição inicial de P.

Quando P chegou ao ponto de abscissa $+1{,}52$ m, foi-lhe aplicada uma fôrça, com a direcção e o sentido de Oy, de intensidade igual a 2 kg.

Calcule a velocidade vectorial de P no instante $t = 1$ m 2o s. R: $\mathbf{V} = 0{,}02\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ (U. m.).

Soluções dos n.os 1917 a 1925 de P. de Varenes e Mendonça.

PROBLEMAS

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1895 — Calcular os catetos e a hipotenusa dum triângulo rectângulo, conhecendo-se as superfícies (A_1 e A_2) dos dois triângulos, em que a altura, correspondente à hipotenusa, o divide. R: *Sejam* h *a altura relativa à hipotenusa, e* p *e* q *os segmentos em que esta é dividida por aquela, correspondentes aos triângulos de áreas* A_1 *e* A_2 *respectivamente. Tem-se* $2A_1 = h \cdot p$ $2A_2 = h \cdot q$ *e, por conseqüência,* $4A_1 A_2 = h^4$ *Tem-se mais* $ah = 2(A_1 + A_2)$, $bc = 2(A_1 + A_2) \cdots (1)$, $a^2 = b^2 + c^2 \cdots (2)$. *Resolvendo êste sistema de 4 equações a 4 incógnitas, acha-se:*

$$a = \frac{2(A_1 + A_2)}{\sqrt[4]{4A_1 A_2}}, \quad b = \frac{\sqrt{(A_1 + A_2)^2 \pm (A_1^2 - A_2^2)}}{\sqrt[4]{A_1 A_2}},$$

$$c = \frac{2(A_1 + A_2)\sqrt[4]{A_1 A_2}}{\sqrt{(A_1 + A_2)^2 \pm (A_1^2 - A_2^2)}},$$

onde os radicais são tomados com o seu valor aritmético. Qualquer das 2 últimas fórmulas dá os valores dos 2 catetos, porque se b_1 *e* c_1 *são os valores de* b *e de* c *correspondentes ao sinal superior, e* b_2 *e* c_2 *os correspondentes ao sinal inferior, tem-se, em virtude da simetria das equações* (1) *e* (2), $b_1 = c_2$, $b_2 = c_1$.

Solução de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Carlos A. G. Gomes (do Pôrto); Fernando R. D. Agudo (de Lisboa); e Paul Richard (de Portalegre).

1896 — Encontrar quatro números inteiros consecutivos tais que o cubo do maior seja igual à soma dos cubos dos outros três.

(*Generalizar:* — quatro números formando progressão aritmética).

R: *Seja* r *a razão da progressão. Se* r *fôr positivo, deverá ser* $(x + 3r)^3 = x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3$ *ou* $x^3 - 6r^2 x - 9r^3 = 0$. *Esta equação tem sempre uma só raiz real, como se conclui do sinal do seu discriminante* $(9/2 \cdot r^3)^2 - (2r^2)^3$. *Acha-se* $x = 3r$. *Os números* $3r$, $4r$, $5r$, $6r$, *verificam pois a relação*

$$(1) \qquad (3r)^3 + (4r)^3 + (5r)^3 = (6r)^3.$$

Se a razão da progressão fôsse $-r$ (r *positivo), os números que se obteriam seriam ainda os precedentes, escritos em ordem inversa, porque se fôssem diferentes, dispondo-os em progressão crescente, a razão seria* r, *recair-se-ia no caso anterior e igualando o cubo do maior à soma dos cubos dos outros, ter-se-ia uma igualdade que não coïncidiria com a identidade* (1) *e que, portanto, não seria verdadeira. Fazendo na identidade* (1) $r = 1$ *obtém-se os 4 inteiros consecutivos pedidos.*

Solução de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Carlos A. G. Gomes (do Pôrto); Fernando R. D. Agudo, (de Lisboa); Heliodoro A. Lopes (de Coimbra); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); e T. Ferreira Rato (S. Tiago de Cabo Verde).

1897 — Resolver a equação

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b.$$

R: *Efectuando o cociente*

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=(x-a)-\sqrt{(x-a)(x-b)}+$$
$+(x-b)$ *vem* $(x-a)-\sqrt{(x-a)(x-b)}+(x-b)=a-b$ *ou* $\sqrt{(x-a)(x-b)}=2(x-a)$, *e, elevando ambos os termos ao quadrado,* $4(x-a)^2=(x-a)(x-b)$. *As raízes desta equação são as raízes das equações* $x-a=0$ e $4(x-a)=x-b$ *ou sejam as raízes* $x=a$ *e* $x=\frac{4a-b}{3}$. *Ambas as raízes satisfazem à equação dada.*

Solução de Carlos A. Gonçalves Gomes (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: Fernando R. D. Agudo (de Lisboa); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); Marcelino Guedes de Sousa (do Pôrto); e T. Ferreira Rato (S. Tiago de Cabo Verde).

1898 — Dividir o volume dum cone recto de revolução, em média e extrema razão, por um plano paralelo à base. R: *Seccionando um cone por um plano paralelo à base, obtemos um cone semelhante ao primeiro e um tronco de cone. Suponhamos que o volume do cone parcial* v *é maior que o do tronco e seja* V *o volume do cone total. Entre êstes volumes deverá existir a relação* $v=\frac{\sqrt{5}-1}{2}V$. *Mas os volumes de sólidos semelhantes estão entre si como os cubos de duas linhas homólogas, portanto* $h'^3/h^3=v/V$ *donde*

$$(\alpha)\qquad h'^3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}h^3 \quad ou \quad h'=h\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

O cone deve ser seccionado por um plano paralelo à base a uma distância h' *do vértice dado pela relação* (α). *Suponhamos agora que o volume* v' *do tronco é maior que o do cone parcial. Entre* v' *e* V *existe a relação* $v'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}V$ *e o volume do cone parcial* v *será*

$$v=V-v'=V-\frac{\sqrt{5}-1}{2}V=\frac{2-\sqrt{5}+1}{2}V=\frac{3-\sqrt{5}}{2}V$$

mas, como vimos, $v/V=h''^3/h^3$ *e, portanto,*

$$(\beta)\qquad h''^3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}h^3 \quad ou \quad h''=\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,h.$$

Neste caso, a secção deve ser feita a uma distância h'' *do vértice dada pela expressão* (β).

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Paes (de Lisboa); F. R. D. Agudo (de Lisboa); e J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

42 — HARDY, G. H. E ROGOSINSKI, W. W. — **Fourier Series** — Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 38 — London — 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do Instituto Britânico em Portugal.

Como é sabido, as séries trigonométricas foram consideradas pela primeira vez por D. Bernoulli no estudo do problema das cordas vibrantes. Bernoulli mostrou que a solução mais geral da equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

do movimento duma corda vibrante com os extremos fixos $(0,0)$ e $(1,0)$ tem a forma

$$y=\sum_1^\infty a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}.$$

Séries dêste tipo foram utilizadas também por Fourier para a representação de certas funções $f(x)$ em problemas relacionados com a condução do calor. A teoria das séries de Fourier foi largamente desenvolvida por Poisson, Cauchy, Harnack, Dirichlet, Riemann, Cantor, Hurwitz, Fejér, Lebesgue, etc. Actualmente esta teoria tomou uma orientação diferente da estabelecida por êstes matemáticos, tendo sido influenciada por certos ramos da matemática moderna, em especial pela teoria da medida-L.

No livro de G. H. Hardy e W. W. Rogosinski, *Fourier Series* da série «Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics», os autores começam por indicar a conexão íntima entre a teoria das séries trigonométricas e a teoria das funções harmónicas e analíticas de que aquela é uma parte. Seguidamente apresentam algumas definições referentes à teoria geral da medida, teoria geral da integração, afim de introduzir as noções de espaço L^p, sua métrica, espaço de Hilbert e sistemas ortogonais num L^2. As séries de Fourier são classes especiais de séries ortogonais convergentes ou somáveis; assim, no capítulo II, vem exposta uma teoria geral de séries ortogonais num espaço de Hilbert, particularizando no capítulo III alguns resultados e adaptando-os às séries de Fourier. O capítulo IV é reservado ao estudo da convergência das séries de Fourier. Até recentemente,