

O teorema de Cantor - Bendixson

por J. Albuquerque (bolseiro em Roma do I. A. C.)

Um teorema muito importante, sôbre o qual desejamos chamar a atenção dos leitores da «Gazeta de Matemática», teorema que foi enunciado pela primeira vez por Bendixson em 1883, e é hoje universalmente conhecido por teorema de Cantor-Bendixson, afirma o seguinte:

Teorema de Cantor-Bendixson. *Todo o conjunto linear fechado é a soma de um conjunto perfeito e de um conjunto numerável.*

Trata-se de um teorema típico de estrutura, e é essa a razão da sua importância e frequente aplicação nas questões de análise.

Deram-se dêste teorema muitas demonstrações e poderíamos limitar êste artigo a uma delas que escolheríamos naturalmente entre as mais simples, mas o nosso procedimento vai ser outro. Procuraremos antes aprofundar o mais possível o estudo da estrutura de um conjunto qualquer do espaço, e depois quasi como coisa secundária surgirá uma demonstração, não do teorema, mas de uma proposição bastante mais geral e rica do que êle.

Como base dêste estudo deveremos dar algumas definições, mas limitaremos ao mínimo as noções e as propriedades do espaço que poremos em cena.

Consideremos um espaço onde cada ponto p tem a sua família de vizinhanças V_p , e onde se dá a seguinte definição fundamental e imprescindível de ponto limite ou ponto de acumulação.

Definição 1. Um ponto p do espaço, é ponto de acumulação de um conjunto E se e só se tôda a vizinhança de p contiver pelo menos um ponto de E distinto de p .

Dado um conjunto E poderemos então falar do conjunto E' dos seus pontos de acumulação, conjunto chamado o derivado de E .

Definição 2. Um conjunto diz-se denso em si se está contido no seu derivado; portanto o conjunto X é denso em si se e só se $X \subset X'$.

Um conjunto diz-se fechado se contém o seu derivado; portanto o conjunto X é fechado se e só se $X' \subset X$.

Um conjunto diz-se perfeito se é simultaneamente denso em si e fechado; portanto o conjunto X é perfeito se e só se $X = X'$.

Um conjunto diz-se *clairsemé* se não contém um sub-conjunto denso em si não vazio.

Definição 3. Dado um conjunto X chama-se *coerência* de X , ao conjunto de todos os pontos comuns a X e ao derivado X' ; a coerência é pois um operador que a cada X faz corresponder um conjunto bem

determinado: $c(X) = X \cdot X'$. A coerência do conjunto X é evidentemente uma parte do conjunto X .

Postas estas definições, tomemos um conjunto qualquer A do espaço, e formemos a seguinte sucessão:

$$A \supset c(A) \supset c^2(A) \supset \dots \supset c^n(A) \supset \dots$$

e ponhamos por definição: $c^\omega(A) = \prod_{n=1}^{\omega} c^n(A)$, onde ω

representa o primeiro número ordinal transfinito. De uma maneira geral, ponhamos para um número ordinal $\alpha < \Omega$ de segunda espécie, isto é, tal que não há um ordinal que o preceda imediatamente:

$$c^\alpha(A) = \prod_{\beta < \alpha} c^\beta(A),$$

onde β percorre todos os números ordinais que precedem α .

Temos assim a sucessão:

$$(1) \quad A \supset c(A) \supset c^2(A) \supset \dots \supset c^\omega(A) \supset \dots \supset c^\alpha(A) \supset \dots$$

A sucessão (1) verifica a seguinte importante propriedade:

P. *Cada termo da sucessão está ligado a A por uma cadeia de conjuntos cada um dos quais, ou tem um que o precede imediatamente e de que então é a coerência, ou não tem um que o precede imediatamente na cadeia e então é produto de todos os precedentes.*

A todo o conjunto do espaço ligado ao conjunto A por uma cadeia nas condições indicadas na propriedade **P**, chamaremos um conjunto obtido de A por meio da operação **P**.

É evidente que: todo o termo da sucessão (1) é obtido de A por meio da operação **P**.

Porém não se pode afirmar que: todo o conjunto de X do espaço obtido de A por meio da operação **P**, pertence à sucessão (1).

Considere-se então uma sucessão (2) definida por A e pela operação **P**, isto é, para a qual se possa afirmar que: todo o conjunto X do espaço obtido de A por meio da operação **P**, pertence à sucessão (2).

É evidente que todo o termo da sucessão (1) é um termo da sucessão (2).

Teorema 1. *A sucessão (2) tem um último termo que é um conjunto denso em si, nulo ou não.*

Demonstremos por absurdo, isto é, suponhamos que:

H. *A sucessão (2) não tem um termo denso em si (nulo ou não).*

Representemos por D o produto de todos os termos da sucessão (2). O conjunto D pertence à sucessão (2) por ser obtido de A por meio da operação **P**. O conjunto D é pois o último termo da sucessão e não pode

ser nulo porque seria denso em si e estaríamos em contradição com a hipótese H .

Logo $D \neq 0$, e como D não é denso em si, por hipótese, teremos: $c(D) \neq D$, $c(D) \subset D$.

Mas então D não seria o último termo da sucessão e produto de todos os termos.

O produto da totalidade dos termos da sucessão, é logicamente legitimado pelos dois seguintes factos: a) admite-se que esse produto seja nulo; b) a sucessão (2) é uma sucessão monótona decrescente.

Para ser D o último termo da sucessão deveria ter-se: $D = c(D)$, mas então D seria um conjunto denso em si como facilmente se veria, e estaríamos de novo em contradição com a hipótese H .

A hipótese H é portanto inadmissível, a sucessão (2) possui um termo denso em si nulo ou não, e esse termo é necessariamente o último termo da sucessão. c. q. d.

Dêste teorema vamos tirar algumas conclusões, que serão outros tantos corolários. Vejamos em primeiro lugar que o conjunto $A-D$ é um conjunto clairsemé; com efeito, o conjunto $A-D$ não pode conter um conjunto denso em si não vazio, porque esse conjunto teria que pertencer a $c(A)$ e em seguida a $c^2(A)$ e assim sucessivamente e vê-lo-íamos repellido para o conjunto D . Mas não se viu somente que $A-D$ era clairsemé mas também que o conjunto D é o maior conjunto denso em si contido em A . Porém o conjunto $A-D$ pode ser vazio e o conjunto A reduzir-se ao conjunto D , e do mesmo modo o conjunto D pode anular-se e portanto o conjunto A ser clairsemé. Em resumo, teremos o seguinte teorema:

Teorema 2. *Todo o conjunto é a soma de dois conjuntos disjuntos, um o maior conjunto denso em si nêle contido, outro clairsemé (podendo anular-se qualquer dêles).*

Supondo que o conjunto A é um conjunto fechado, A contém não só o seu derivado como também o derivado de todo o seu sub-conjunto, em particular o derivado do conjunto D . Mas o derivado de um conjunto D denso em si é um conjunto também denso em si, que contém D . O conjunto D contém e está contido no seu derivado, é fechado e denso em si simultaneamente, e portanto é um conjunto perfeito; conclui-se pois que:

Teorema 3. *Todo o conjunto fechado é a soma de dois conjuntos, um perfeito outro clairsemé (podendo anular-se qualquer dêles).*

Retomemos o conjunto A e a correspondente sucessão (2) com o seu último termo D . Seja p um ponto do conjunto $A-D$; como a sucessão (2) é ordenada, o ponto p pertencerá a um certo número de termos da sucessão havendo necessariamente um último termo a que p pertence, isto é, havendo um termo $c^\alpha(A)$ que contém p mas sem que p pertença

a $c^{\alpha+1}(A)$. Então o ponto p não pode ser ponto de acumulação do conjunto $c^\alpha(A)$ e portanto existe uma vizinhança V_p de p que só tem de comum com $c^\alpha(A)$, o ponto p . Tal sucede com cada ponto do conjunto $A-D$, e dado outro ponto q de $A-D$, mesmo que êle pertença a $c^\alpha(A)$ sem pertencer a $c^{\alpha+1}(A)$, as vizinhanças V_p e V_q que lhes correspondem pelo modo indicado, serão diferentes porque uma delas contém um dos pontos e não contém o outro. Então: *a cada ponto p de $A-D$ corresponde uma vizinhança V_p de tal modo que se $p_1 \neq p_2$ também $V_{p_1} \neq V_{p_2}$.*

Façamos agora apêlo a uma última propriedade do espaço:

Definição 4. Um espaço (ou um conjunto do espaço) diz-se *perfeitamente separável* se existe uma família numerável F de conjuntos, tal que dado um ponto p do espaço (ou do conjunto) se pode tomar para família de vizinhanças de p , a família formada pelos conjuntos de F aos quais o ponto p é interior, e isto de modo que não há alteração na definição de ponto de acumulação.

É evidente que todo o sub-conjunto de um conjunto perfeitamente separável é um conjunto também perfeitamente separável.

Suponhamos então que o conjunto A é perfeitamente separável; então podemos supôr que a cada ponto de $A-D$ corresponde uma vizinhança V_p , tal como atrás se indicou, mas escolhida precisamente na família F . Como esta família é uma família numerável concluímos que o conjunto $A-D$ é necessariamente um conjunto numerável.

Resumindo: em primeiro lugar é lícito enunciar a seguinte propriedade:

Teorema 4. *Todo o conjunto clairsemé perfeitamente separável, é numerável.*

e finalmente podemos enunciar agora:

Teorema de Cantor-Bendixson. *Todo o conjunto fechado perfeitamente separável é a soma de dois conjuntos disjuntos, um perfeito, outro numerável e clairsemé (podendo anular-se qualquer dêles).*

O teorema anterior é, como tínhamos anunciado, uma proposição muito mais geral que o clássico teorema de Bendixson, porque é válida para todos os espaços cartesianos, qualquer que seja o seu número de dimensões, e mesmo válida para espaços muito mais gerais.

Mas o teorema anterior é mais rico de conteúdo que o de Bendixson, visto que afirma que o conjunto numerável é clairsemé, e isso não sucede com todos os conjuntos numeráveis de um espaço mesmo quando esse espaço é o espaço linear; com efeito, o conjunto dos pontos da recta de abscissa racional, é um conjunto numerável e não é um conjunto clairsemé porque é denso em si.

Roma, 29 de Abril de 1944.