actuário mesmo no que respeita aos assuntos basilares e subsidiários. Isso levantará uma outra questão não menos importante. Mas, aceitando como provada essa má preparação, ¿ não constituiria ela uma razão mais para tornar convenientemente exigentes tôdas as provas para actuários e nunca um motivo de redução do nível dessas provas ao da eventual impreparação? É natural concluir, portanto, que o programa não corresponde à intenção do concurso.

Ou, ¿ não se tratará de um concurso para o provimento de um lugar de actuário?

Zürick, 12 de Março de 1944.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Nos actuais programas de matemática dos liceus, não são incluídos certos capítulos como, propriedades dos polinómios, equações transcendentes, aproximações numéricas, e outros, cuja necessidade é evidente, quer sob o ponto de vista de cultura geral, quer para a continuação de estudos superiores. A reforma dos programas prevendo a criação de um oitavo ano no curso liceal, deve ter deixado para inclusão nos seus programas, estas matérias. E porque o seu ensino no primeiro ano universitário acarretaria perdas de tempo em prejuízo de outros assuntos, entende-se que o seu estudo deve ser feito como preparação para a entrada nas Universidades. É assim que nos exames de aptidão aparecem questões sôbre aquêles capítulos. E porque assim é, e porque os candidatos necessitam preparação para êsses exames, a «Gazeta de Matemática», com o intuito de fornecer elementos de preparação nêsse sentido, decidiu publicar nesta secção, a par de outros, artigos sôbre aquelas matérias que já em tempo pertenceram ao ensino liceal. É dêste tipo o artigo seguinte.

RESOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

por ***José da Silva Paulo***

0. A diversidade de tipos de equações transcendentes, a impossibilidade da resolução da grande maioria destas equações quando se consideram simplesmente as soluções reais e a extensão dos conhecimentos matemáticos do aluno que termina o curso liceal, estabelecem uma limitação ao estudo que fazemos da resolução de equações transcendentes. Assim trataremos simplesmente de equações exponenciais e trigonométricas, e mesmo destas só alguns tipos de maior aplicação nas questões de matemática, considerando ùnicamente as soluções reais.

1. *Equações exponenciais* — Os conhecimentos que se requerem para a resolução dos tipos de equações que vamos apresentar são simplesmente as propriedades elementares da função exponencial e da sua inversa, a função logarítmica.

Problema 1 — Seja resolver a equação $a^x=b$. Pela aplicação de logaritmos, tem-se:

$$x\log a=\log b \quad \text{e} \quad x=\log b:\log a.$$

Exercício 1 — Resolver a equação $2^x=16$, vem $x=1{,}30412:0{,}30103=4$. Note-se que a solução da equação, pela sua simplicidade, era imediata. Note-se também, que no caso mais geral o cociente dos logaritmos não dará senão um valor aproximado, dados os êrros das mantissas dos logaritmos.

Exercício 2 — Resolver a equação $24^{3x-2}=10000$. Teremos sucessivamente:

$$3x-2=4:\log 24 \quad \text{e} \quad x=(2+4:\log 24):3=1{,}6327.$$

Problema 2 — Resolver a equação: $am^{2x}+bm^x+c=0$. Fazendo a substituïção $y=m^x$ resulta $ay^2+by+c=0$ e a substituïção de y faz-nos cair numa equação do tipo anterior, que permite determinar x.

Exercício 3 — Seja a equação $4\cdot 3^x-\dfrac{729}{3^x}-81=0$ fazendo $y=3^x$ e desembaraçando de denominadores vem $4y^2-81y-729=0$ a equação que tem as soluções $y_1=-27/4$ e $y_2=27$, das quais só se aproveita a segunda, por os números negativos não terem logaritmos reais, obtendo-se para x o valor 3.

Exercício 4 — Resolver a equação $2^{2x-2}-2^x-8=0$. A equação é equivalente a $2^{2x}-2^2\cdot 2^x-32=0$ e fazendo $y=2^x$ vem $y^2-4y-32=0$ cujas soluções são $y_1=-4$ e $y_2=8$ e portanto $x=3$.

Problema 3 — Equações do tipo $\log f(x)\pm\log g(x)=\log c$. Consideremos simplesmente o sinal $+$, pois o tratamento é análogo para o caso do sinal $-$. A equação é equivalente a $\log[f(x)\cdot g(x)]=\log c$ ou $f(x)\cdot g(x)=c$, equação que resolvida nos dá os valores de x.

Exercício 5 — Resolver $\log\sqrt{7x+3}+\log\sqrt{4x+3}=\dfrac{1}{2}+\log 3$ ou seja $\log\sqrt{(7x+3)\,(4x+5)}=\log 3\sqrt{10}$ donde $(7x+3)\,(4x+5)=90$ e $28x^2+47x-75=0$ equação cujas soluções são $x_1=-75:28$ e $x_2=1$, das quais a primeira não é solução da proposta.

Problema 4 — Resolver o sistema $\log x + \log y = m$; $ax+by=n$. Êste pode escrever-se $\log xy = m$ e $ax+by=c$; ou $xy=10^m$, com $ax+by=c$; a resolução dêste último sistema dá-nos os valores de x e y.

EXERCÍCIO 6 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ 2x+y=30 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} xy=10^2 \\ 2x+y=30 \end{cases}$$

cujas soluções são $x_1=5$ $y_1=20$; $x_2=10$ $y_2=10$.

EXERCÍCIO 7 — Outro sistema de tipo semelhante é:

$$\begin{cases} \log x - 3\log = 0 \\ x - 9y = 0 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} \log x : y^3 = \log 1 \\ x-9y=0 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} x=y^3 \\ x=9y \end{cases}$ donde $y^3-9y=0$ cujas soluções são $y_1=0$, $y_2=-3$ e $y_3=3$; sendo as duas primeiras de excluir, pois a 1.ª torna a primeira equação do sistema proposto indeterminada e a 2.ª pór não considerarmos logaritmos imaginários; a 3.ª dará 27 para valor de x.

Exercícios propostos

Resolva as seguintes equações:

1) $\sqrt[3x]{1000}=10$.
2) $\sqrt[x]{20}=10^x$.
3) $4^x\cdot 5^x=1700$.
4) $16^x+16^{1-x}=10$.
5) $3^{x^2-3/4}=9^{x/2}$.
6) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$.

Resolva os sistemas:

1) $\begin{cases} \log x - \log y = \log 2 \\ x-y=2 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} \log(x+1)+\log(y+1)=1 \\ x+y=5 \end{cases}$.

2. *Equações trigonométricas* — Uma equação trigonométrica a uma incógnita é uma equação que relaciona entre si funções circulares directas ou inversas dessa incógnita. Assim as equações $x+\cos x - 3\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$ e $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x = \pi/4$ são equações trigonométricas. Estudaremos aqui, pelas razões já apontadas, só alguns tipos mais importantes destas equações, para a resolução das quais basta o conhecimento das propriedades das funções circulares directas e inversas.

Se numa equação trigonométrica só entram funções circulares directas é aconselhável, para a sua resolução, exprimir tôdas as funções numa delas. Para a escôlha prática dessa função, na qual se exprimem tôdas as outras, dá-nos indicações a regra de *Bioche*, que se enuncia:

Regra de Bioche — *Considerem-se os valores* $-x$, $\pi-x$ *e* $\pi+x$, *e substituam-se em vez de* x *na equação proposta, averiguando qual dêles deixa invariante a equação. Escolher-se-á para elemento de redução a função circular de* x *que se conserve invariante para as mesmas substituïções que a equação dada.*

Quere dizer, se a equação ficar invariante para a substituïção de x por $-x$, o elemento de redução será $\cos x$ pois $\cos x = \cos(-x)$; se fôr $\pi - x$ a substituïção que a deixa invariante, usar-se-á a função $\operatorname{sen} x$ por ser $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$, e no terceiro caso a função de redução será $\operatorname{tg} x$ pois $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi + x)$. Se a equação ficar invariante para tôdas as substituïções, o elemento de redução será $\cos 2x$ pois esta função fica invariante para tôdas aquelas substituïções; finalmente se a equação não ficar invariante para nenhuma das substituïções há vantagem em escolher a função $\operatorname{tg} x/2$.

Problema 5 — Equações do tipo $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$. Aplicando a regra de Bioche encontramos para elemento de redução $\operatorname{tg} x/2$. Ora como $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{tg} x/2 : (1+\operatorname{tg}^2 x/2)$ e $\cos x = (1-\operatorname{tg}^2 x/2):(1+\operatorname{tg}^2 x/2)$ fazendo para abreviar $\operatorname{tg} x/2 = z$, substituindo na equação proposta e desembaraçando de denominadores obtém-se: $(b+c)z^2 - 2az + c - b = 0$ o que dá $\operatorname{tg} x/2 = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$ expressão que permite determinar o valor de x, fazendo uso duma tabela de funções circulares.

Como é prático realizar os cálculos por meio de logaritmos, usa-se em geral para a resolução dêste tipo de equações o chamado *método do ângulo auxiliar* que consiste no seguinte: escrevamos a equação proposta sob a forma $\operatorname{sen} x + b/a \cos x = c/a$ e façamos $b/a = \operatorname{tg}\theta$, o que é sempre possível visto a tangente variar de $-\infty$ a $+\infty$. Esta última expressão permite determinar o valor de θ. Por substituïção na equação vem: $\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos x = c/a$ ou $\operatorname{sen} x \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos x = c/a \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(x+\theta) = b\cos\theta/a$ donde $\log \operatorname{sen}(x+\theta) = \log b + \log\cos\theta + \operatorname{colg} a$, expressão que permite determinar x.

EXERCÍCIO 8 — Seja resolver a equação $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$. Pelo primeiro processo teremos $\operatorname{tg} x/2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+1-2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ e $\operatorname{tg} x = 1$ logo $x=\pi/4$.

Pelo segundo processo tem-se $1=\operatorname{tg}\theta$, $\theta=\pi/4$, $\operatorname{sen} x\cos\pi/4 + \cos x \operatorname{sen}\pi/4 = \sqrt{2}\cos\pi/4$ e como $\cos\pi/4 = \sqrt{2}$ vem $\operatorname{sen}(x+\pi/4) = \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$ ou

$x+\pi/4=\pi/2$ e $x=\pi/4$ (por ser muito simples a equação, foi desnecessário empregar logaritmos).

Problema 6 — Equações do tipo $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c$. A regra de Bioche indica-nos para êste caso a função $\operatorname{tg} x$ como elemento de redução, logo será: $a \operatorname{tg} x + b/\operatorname{tg} x = c$ ou $a \operatorname{tg}^2 x - c \operatorname{tg} x + b = 0$ e $\operatorname{tg} x = [c \pm (c^2 - 4ab)^{1/2}] : 2a$ o que permite determinar x.

Querendo aplicar o cálculo logarítmico poderiamos escrever $a \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + b \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = c$ ou $a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x = c \operatorname{sen} x \cos x$, e como $1-\cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$, $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ e $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, vem substituindo, $a(1-\cos 2x) + b(1+\cos 2x) = c \operatorname{sen} 2x$ ou $c \operatorname{sen} 2x + (a-b)\cos 2x = a+b$, equação do tipo anterior; ter-se-á então: $(a-b) : c = \operatorname{tg} \theta$ e $\operatorname{sen}(2x+\theta) = (a+b)\cos\theta / c$ o que determina θ e x.

Exercício 9 — Resolver $2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \operatorname{cotg} x = 5$. Tem-se então pelo segundo método: $5 \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 3\sqrt{3}$ e fazendo $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}/5$ vem $\theta = 19^\circ 6'$ donde $\operatorname{sen}(2x + 19^\circ 6') = 3\sqrt{3} \cos 19^\circ 6'/5$ e por isso $\log \operatorname{sen}(2x+19^\circ 6') = \bar{1},99198$ donde $2x + 19^\circ 6' = 79^\circ 6'$, $2x = 60^\circ$, $x = 30^\circ$ argumento mínimo que satisfaz a equação.

Problema 7 — Equação do tipo $a \cos^2 x + b \operatorname{sen}^2 x = c$. A regra de Bioche diz-nos que para êste caso, como fàcilmente se verifica, deve adoptar-se para elemento de redução a função $\cos 2x$, e então vem: $a \cdot (1+\cos 2x) : 2 + b(1-\cos 2x) : 2 = c$ donde $\cos 2x = (2c-a-b) : (a-b)$.

Exercício 10 — Resolver a equação $3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 2$. Fazendo a substituïção obtém-se $\cos 2x = (4-3-1) : (3-1) = 0$ donde $2x = 90^\circ$, $x = 45^\circ$, argumento mínimo que satisfaz à equação proposta.

Consideremos algumas equações contendo funções circulares inversas.

Problema 8 — Resolver a equação: $\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc sen} \sqrt{3} x = \pi/2$. Seja $\alpha = \operatorname{arc sen} x$ donde $x = \operatorname{sen} \alpha$, e seja $\beta = \operatorname{arc sen} \sqrt{3} x$ donde $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{3} x$, como é $\alpha + \beta = \pi/2$, deduz-se que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 1$ ou $\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = 1$, ora $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ e $\cos \beta = \sqrt{1-3x^2}$ vem $x\sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3} x \sqrt{1-x^2} = 1$. Isolando o primeiro radical vem $x\sqrt{1-3x^2} = 1 - x\sqrt{3-3x^2}$ e quadrando $x^2(1-3x^2) = 1 + x^2(3+3x^2) + 2x\sqrt{3-3x^2}$ ou $2x\sqrt{3-3x^2} = 1 + 2x^2$ e quadrando novamente, $4x^2(3-3x^2) = 1 + 4x^4 + 4x^2$ donde $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ de cujas soluções $x = \pm 1/2$ só serve a solução positiva; a solução negativa é uma raiz estranha que se introduziu em virtude das quadraturas que fizemos.

Problema 9 — Resolver a equação: $\operatorname{arc tg} x - \operatorname{arc tg} 1/x = 0$. Façamos $\alpha = \operatorname{arc tg} x$ ou $x = \operatorname{tg} \alpha$ e $1/x = \operatorname{tg} \beta$ então será $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} 0 = 0$ e $0 = \frac{x - 1/x}{1 + x \cdot 1/x}$ ou $x - 1/x = 0$, $x = \pm 1$.

Vejamos finalmente alguns sistemas.

Problema 10 — Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=m \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = n. \end{cases}$

A última equação é equivalente a $2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = n$ donde se tira $\cos \frac{x-y}{2} = n : 2 \operatorname{sen} \frac{m}{2}$ o que permite determinar $x-y$. Seja $x-y=\alpha$ será então $\begin{cases} x-y=\alpha \\ x+y=m \end{cases}$ sistema que nos dá os valores de x e y.

Exercício 11 — Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=90^\circ \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = (1+\sqrt{3}) : 2 \end{cases}$. Então como anteriormente será: $\operatorname{sen}(x-y) : 2 = [(1+\sqrt{3})/2] : [2 \cdot \sqrt{2}/2] = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) : 4$ e $(x-y) : 2 = 15^\circ$, $x - y = 30^\circ$ o que com a equação $x+y=90^\circ$ dá $x = 60^\circ$, $y = 30^\circ$.

Anàlogamente se resolvem os sistemas:

$$\begin{cases} x-y=m \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = n \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = m \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = n \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x \pm y = m \\ \cos x \pm \cos y = n \end{cases}.$$

Problema 12 — Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=m \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = n \end{cases}$.

Como a segunda equação se pode considerar uma proporção $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{n}{1}$ teremos: $\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{n+1}{n-1}$ e

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = \frac{n+1}{n-1} \text{ ou } (n-1) \operatorname{sen} \frac{m}{2} \cos \frac{x-y}{2} - (n+1) \cdot \cos \frac{m}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = 0$$

equação do tipo do problema 5.

Exercício 12 — Seja resolver o sistema $\begin{cases} x+y=90^\circ \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Como anteriormente tem-se: $\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}$ ou

$$(\sqrt{3}-3) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} - (\sqrt{3}+3) \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = 0$$

donde se tira $(\sqrt{3}+3)\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}-(\sqrt{3}-3)\cos\dfrac{x-y}{2}=0$

fazendo $\dfrac{-\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3}=\operatorname{tg}\theta$ ou seja $2-\sqrt{3}=\operatorname{tg}\theta$ e $\theta=15^\circ$

$\operatorname{sen}(x-y):2+\operatorname{tg}\theta\cos(x-y):2=0$ e $\operatorname{sen}[(x-y):2+15^\circ]=0$ donde $(x-y):2+15^\circ=0$ $x-y=-30^\circ$ que, com $x+y=90$ dá $x=30^\circ$ $y=60^\circ$.

Outros sistemas que se resolvem anàlogamente são:

$$\begin{cases} x-y=m \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=n \end{cases} \quad \begin{cases} x\pm y=m \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y}=n \end{cases} \quad \begin{cases} x\pm y=m \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=n \end{cases}$$

Exercícios propostos

Resolva as equações:

1) $\operatorname{sen} 2x-\operatorname{cotg} x=0$.
2) $\operatorname{sen} x+\operatorname{cosec} x=0$.
3) $\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}=2\cos x$.
4) $\sqrt{3}\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{3}$.
5) $\operatorname{sen}(x+a)=\cos(x+b)$.
6) $\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x/2=\cos x$.
7) $5\operatorname{tg} x+6\operatorname{cotg} y=11$.
8) $\operatorname{arc}\cos(x-1)+\operatorname{arc}\cos(x+1)=\pi/2$.
9) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{tg} x/2=\pi/4$.
10) $\operatorname{arc}\operatorname{sen} 2x-2\operatorname{arc}\cos x=\operatorname{arc}\operatorname{sen} x$.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências fisico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas mil. e de eng. geógrafo. — Ponto n.º 2.

1801 — Determine m de modo que o trinómio $(m-2)x^2+(4m-6)x+5m-6$ seja negativo para qualquer valor real dado a x. R: *Os valores de* m *que satisfazem ao problema são os que dão ao descriminante valores negativos ao mesmo tempo que tornam negativo o coeficiente de* x^2, *ou sejam os valores de* m *que verificam as desigualdades:* $(4m-6)^2-4(m-2)(5m-6)<0$ *e* $m-2<0$ *ou* $m^2-4m+3>0$ *e* $m<2$. *Como as raízes do primeiro trinómio são* 3 *e* 1, *os valores que o tornam positivo são os que satisfazem a* $m>3$ *ou* $m<1$, *e como pela segunda desigualdade deve ser* $m<2$, *os valores de* m *que verificam o problema são os que satisfazem a* $m<1$.

1802 — Enuncie os teoremas que se referem ao número de soluções inteiras e ao número de soluções inteiras e positivas da equação $ax+by=c$ em que a, b e c são números inteiros e primos entre si.

1803 — Calcule as dimensões de um rectângulo, sabendo que o seu comprimento é triplo da sua largura e que, aumentando tanto o comprimento como a largura de 5 metros a sua área aumento de $385\,\mathrm{m}^2$. R: *A equação que resolve o problema é* $3x^2+385=(x+4)(3x+5)$ *onde* x *representa a largura do rectângulo. Donde se tira* $x=18$ m *e portanto* $y=54$ m.

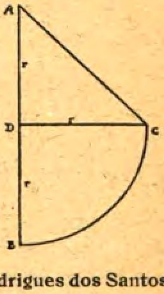
1804 — Sendo $x+y+z=\pi$ verifique que $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z$. R: *Pela condição do enunciado* $x+y=\pi-z$, *logo* $\operatorname{tg}(x+y)=-\operatorname{tg} z=(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y):(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)$ *donde* $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=-\operatorname{tg} z(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)$ *ou* $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$.

1805 — Sendo x um ângulo do 1.º quadrante e $\cos x=0{,}5$, determine, sem recorrer às tábuas, os valores de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$. R: $\operatorname{sen} x=\sqrt{1-0{,}5^2}=\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} x=1/\sqrt{3}$, $\sec x=2$ e $\operatorname{cosec} x=2/\sqrt{3}$.

1806 — O ângulo oposto à base de um triângulo isósceles é $27^\circ\,30'\,41'',2$ e o comprimento da base é de 26,45 metros. Usando o cálculo logarítmico, determine o perímetro do triângulo. R: *Os lados iguais do triângulo têm por expressão:* $l=12{,}325:\operatorname{sen}\alpha/2$ *logo é* $\log l=\log 13{,}225+\operatorname{colog}\operatorname{sen} 13^\circ\,45'\,20'',6=1{,}12139+0{,}62381=1{,}74520$ *donde* $l=55{,}62$ m *e o perímetro será* 137,69 *metros.*

1807 — Figure as tangentes exteriores e a tangente interior a duas circunferências tangentes exteriormente. Designando por A e B os pontos de contacto duma das tangentes exteriores com as duas circunfecias por A' e B' os pontos de contacto da outra tangente e por F e F' os pontos em que a tangente interior corta as tangentes exteriores, demonstre que $\overline{AB}=\overline{A'B'}=\overline{FF'}$. R: *Se fôr* O *o ponto de encontro das tangentes exteriores, como os comprimentos das tangentes tiradas de um ponto para uma circunferência são iguais, é:* $\overline{OA}=\overline{OA'}$ *e* $\overline{OB}=\overline{OB'}$ *e portanto* $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}$. *Pelo mesmo motivo, se fôr* C *o ponto de contacto das duas circunferências, é:* $\overline{FC}=\overline{FB}$ *e* $\overline{FC}=\overline{FA}$ *donde* $2\overline{FC}=\overline{FF'}=\overline{FB}+\overline{FA}=\overline{AB}$, *pois é fácil ver que* $\overline{FC}=\overline{F'C}$.

1808 — Deduza em função de r, a expressão do volume gerado por uma rotação completa da figura representada em tôrno de AB. Os lados iguais do triângulo isósceles ADC tem um comprimento igual ao raio de circunferência $\widehat{BC}$. R: *O sólido gerado é um hemisfério encimado por um cone cuja base é um circulo de raio* r *igual ao da esfera. Assim o volume será:* $V=1/3\,(\pi r^3+2\pi r^3)=\pi r^3$.



Soluções dos n.ºs 1801 a 1808 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus 3 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 2.

I

1809 — Determine a condição a que deve satisfazer k para que a inequação $(k+1)\,x^2-2kx+5k+6>0$ seja verificada por qualquer valor real atribuído a x.
R: *O coeficiente do 1.º têrmo deverá ser positivo e imaginárias as raízes do trinómio.*: k *deve satisfazer às relações* $k+1>0$ e $k^2-(k+1)\,(5\,k+6)<0$, *donde se deduz* $k>-3/4$.

1810 — *a)* Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^4+bx^2+c=0$ para que tenha duas raízes nulas e duas raízes infinitas. *b)* Defina progressão geométrica e calcule a razão da progressão geométrica cujo primeiro têrmo é 729 e cujo sétimo têrmo é 1. R: a) *Devem anular-se* a e c, *não se anulando* b. b) $u_n=u_1\,r^{n-1}\;.\cdot.\;r=\sqrt[6]{729^{-1}}=1/3$.

II

1811 — Determine, por logarítmos, a medida de um dos ângulos internos de um paralelogramo em que dois lados consecutivos medem 9,4 metros e 12,5 metros e cuja área mede 72,8 metros quadrados.
R: *A área é dada para* $A=ab\,\text{sen}\,\alpha$ *designando por* a e b *as medidas dos lados e* α *o ângulo compreendido. Aplicando logarítmos:*

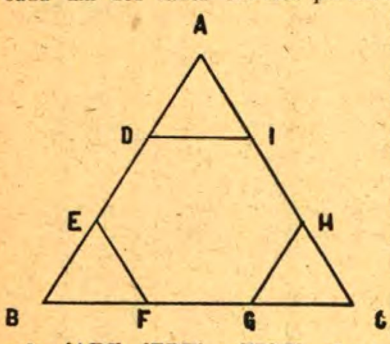
$$\log\text{sen}\,\alpha=\log 72,8+\text{colog}\,12,5+\text{colog}\,9,4=$$
$$=1,86213+\bar{2},90309+\bar{1},02687=\bar{1},79209\,;$$
$$\alpha=38^\circ\,17'\,3'',75\,.$$

1812 — Verifique a identidade
$\cot\alpha-2\cos^2\alpha\,\text{cosec}\,2\alpha=0$. R: $\text{cotg}\,\alpha-2\cos^2\alpha\,\text{cosec}\,2\alpha=$

$$=\text{cotg}\,\alpha-2\,\frac{\cos^2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=0\,.$$

III

1813 — Desenhe um triângulo eqüilátero, divida cada um dos lados em três partes iguais e una os pontos de divisão mais próximos de modo a formar um hexágono. Demonstre que êsse hexágono é regular. R: *Por ser* $\overline{DI}\parallel\overline{BC}$; $\overline{EF}\parallel\overline{AC}$; $\overline{GH}\parallel\overline{AB}$ *são equiláteros os triângulos* [ADI], [EBF] *e* [HGC], *donde se conclui, atendendo às condições do enunciado, que o hexágono* [DEFGHI] *é regular, pois tem os lados e ângulos iguais.*



1814 — *a)* Deduza a relação que existe entre a área de um losango e a do quadrilátero que se obtém conduzindo pelos vértices daquele paralelas às suas diagonais. *b)* Indique as condições a que tem de satisfazer a soma das medidas dos diedros de um triedro.
R: a) *O quadrilátero construído é um rectângulo de lados paralelos às diagonais do losango. Da figura respectiva deduz-se fàcilmente que a área do losango é metade da do quadrilátero.*

IV

1815 — Demonstre que o quadrado de qualquer número inteiro que não seja divisível por 5 é um múltiplo de 5, aumentado ou diminuido de 1.
R: *Visto que todo o número inteiro não múltiplo de 5 se contém numa das expressões* $5R\pm1$, $5R\pm2$, *tem-se:* $(5R\pm1)^2=\dot{5}+1$, $(5R\pm2)^2=\dot{5}+4=\dot{5}-1$, *o que prova o que se tinha em vista.*

Soluções dos n.ºs 1809 a 1815 de F. Roldão Dias Agudo, aluno do 1.º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Licenciatura em Ciências Geográficas — Julho de 1943 — Ponto n.º 4.

1816 — Escreva uma equação biquadrada que tenha as raízes 2 e $\sqrt{-2}$. R: *A equação pedida admitirá também as raízes* -2 *e* $-\sqrt{-2}$ *e será:*

$$(x-2)\,(x+2)\,(x-\sqrt{2}\,i)\,(x+\sqrt{2}\,i)=0$$

ou:

$$(x^2-4)\,(x^2+2)=0\quad ou\quad x^4-2x^2-8=0\,.$$

1817 — Quais são os critérios de divisibilidade por 4 e por 6? R: *Um número* N *pode escrever-se com a forma:* (1) $a+b\times10+c\times10^2+\cdots$ *sendo* $a, b, c \cdots$ *os algarismos representativos do número de unidades, dezenas, etc., do número. Critério para* 4: *Apenas nos interessa a parte* $a+b\times10$ *de* (1). *Como* 10 *dividido por* 4 *dá resto* 2, *o resto da divisão de* N *por* 4 *será o mesmo que o da divisão por* 4 *do número* $a+b\times2$, *visto que* $b\times10$ *é* $b\times(\dot{4}+2)=\dot{4}+2b$. *O resto da divisão dum número por* 4 *obtém-se dividindo a soma do algarismo das unidades com o dôbro do das dezenas por* 4. *Critério para* 6: *De* (1) tira-se que

$$N=a+\dot{6}+4b+\dot{6}+4c+\cdots$$

visto ser 4 *o resto das divisões de* 10, 100, 1000 ⋯ *por* 6. *Portanto, o resto da divisão de* N *por* 6 *é o mesmo que o da divisão por* 6 *do número*

$$a+4\,(b+c+d+\cdots)$$

isto é: o resto da divisão dum número por 6 *obtém-se dividindo por* 6 *a soma do algarismo das unidade com o quádruplo da soma dos restantes algarismos.*

1818 — Calcule na esfera terrestre, com o raio R, o comprimento do arco de 1° no paralelo de latitude L.

Diga que relação há entre êste valor e o valor do arco de 1° no meridiano. R: *a)* $R' = R \cos L$; $\frac{2\pi R'}{360°} = \frac{c}{1°}$; $c = 2\pi R \cos L : 360°$. *b)* $c_p/c_m = 2\pi R \cos L : 2\pi R = \cos L$.

Soluções dos n.os 1816 a 1818 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Instituto Superior de Agronomia — 8 de Agôsto de 1944 — Ponto n.° 1.

1819 — Determine o coeficiente do têrmo em x^{-20} do desenvolvimento do binómio $(x^2/3 - 2/x^3)^{15}$.
R: *O têrmo geral do desenvolvimento é*

$$\binom{15}{p} \cdot \frac{x^{2p}}{3^p} \cdot (-1)^{15-p} \cdot \frac{2^{15-p}}{x^{45-3p}} = (-1)^{15-p} \binom{15}{p} \frac{2^{15-p}}{3^p} \cdot x^{5p-45}.$$

O têrmo em x^{-20} *corresponde ao valor de* p *dado por* $5p - 45 = -20$, *donde* $p = 5$. *Vem pois* $\binom{15}{5} \frac{2^{10}}{3^5} x^{-20}$.

O coeficiente pedido é $\frac{15!\, 2^{10}}{5!\, 10!\, 3^5}$.

1820 — Determine a relação entre os valores de n e p que satisfazem a ${}^nC_{p+2} = 4 \times {}^nC_{p+1}$. Diga qual é o menor valor de n que verifica a expressão e exemplifique para o caso do número de objectos estar compreendido entre 16 e 20. R: *De* $\frac{n!}{(p+2)!\,(n-p-2)!} = \frac{4 \cdot n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!}$ *deduz-se sucessivamente* $\frac{1}{p+2} = \frac{4}{n-p-1}$, $n - 5p = 9$. *O menor valor de* n *verificando a expressão dada é* $n = 4$ *a que corresponde* $p = -1$ *e* ${}^4C_1 = 4\, {}^nC_0$. *Para um número* n *de elementos compreendido entre* 16 *e* 20 *a expressão só é verificada para* $n = 19$ *a que corresponde* $p = 2$. *Tem-se, neste caso,* ${}^{19}C_4 = 4 \cdot {}^{19}C_3$.

1821 — É dada uma superfície prismática quadrangular de faces iguais, onde duas faces iguais consecutivas formam um diedro de 117° 51',6; a distância de duas arestas mais afastadas é de 8,9338 metros. Calcule o perímetro da secção obtida por um plano normalmente às faces. R: *A secção recta é um rombo. São conhecidos o ângulo obtuso* $\alpha = 117° \, 51',6$ *e a maior das diagonais* $d = 8{,}9338$ m. *Designando por* l *o lado do rombo e por* P *perímetro, tem-se:* $d/2 = l \cdot \operatorname{sen} \alpha/2$ *donde* $P = 4l = \frac{2d}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times 8{,}9338}{\operatorname{sen} 58° \, 55' \, 48''}$ m. *Aplicando logaritmos vem*

$$\log P = \log 2 + \log 8{,}9338 + \operatorname{colog} \operatorname{sen} 58° \, 55' \, 48'' = 0{,}30103 + 0{,}95104 + 0{,}06725 = 1{,}31932$$

donde $P = 20{,}860$ m.

1822 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores do seno e do coseno de um ângulo do 4.° quadrante cuja cotangente é $-4/3$. R: *Seja* α *o ângulo dado. Tem-se* $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ *e* $\operatorname{cotg} \alpha = -4/3$, *donde se deduz* $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} = -\frac{3}{5}$ *e* $\cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$.

1823 — Representando por V_a, V_b e V_c os volumes dos sólidos gerados por um triângulo rectângulo, quando roda respectivamente em tôrno da hipotenusa e de cada um dos catetos, verifique que $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$.
R: *Designando por* r *a altura do triângulo relativo à hipotenusa a tem-se respectivamente:*

$$V_b = \frac{1}{3}\pi b^2 c, \quad V_c = \frac{1}{3}\pi c^2 b \quad e \quad V_a = \frac{1}{3}\pi r^2 a = \frac{1}{3}\pi \frac{c^2 b^2}{\sqrt{c^2 + b^2}}.$$

(Note-se que o dôbro da área do triângulo é $cb = ra = r\sqrt{c^2 + b^2}$*). Quadrando e substituindo na expressão dada verifica-se finalmente o resultado.*

1824 — Demonstre que se duas circunferências se cortam, duas secantes paralelas tiradas pelos pontos de intersecção são iguais. R: *Sejam* AIB *e* A'I'B' *as secantes paralelas traçadas (*I *e* I' *pontos de intersecção das duas circunferências;* A *e* A' *pontos duma circunferência e* B *e* B' *da outra). Por* A *e* B' *traçam-se paralelas* AC' *e* B'C *à recta* II' *(*C' *e* C *são os pontos de intersecção das duas paralelas respectivamente com as cordas* A'B' *e* AB*). Basta provar a igualdade dos triângulos* [AA'C'] *e* [BB'C] *e conseqüentemente que* $\overline{CB} = \overline{A'C'}$. *Como* $\overline{AC} = \overline{C'B'}$ *segue-se que* $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{C'B'} + \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$.

Soluções dos n.os 1819 a 1824 de M. Zaluar.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Outubro de 1943.

1825 — Definições e propriedades mais importantes das progressões aritméticas e geométricas. Determinar os valores reais de a para os quais é nula a soma $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$; discussão, atendendo à paridade de n. R: $S = \frac{a^n - 1}{a^n(a-1)}$ *e, como são de regeitar valores positivos para* a, *resta* $a = -1$ *que anula o numerador de* S *quando* n *fôr par.*

1826 — Dados $x + y = a$ e $x^4 + y^4 = b$, exprima xy em função de a e b. R: $(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4xy\,(x^2+y^2) + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4xy\,(x+y)^2 - 8x^2y^2 + 6x^2y^2$ *donde* $a^4 = b + 4a^2xy - 2x^2y^2$ *ou* $2\,(xy)^2 - 4a^2xy + a^4 - b = 0$ *e* $xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 - b}{2}}$.

1827 — Calcule o volume dum cone circular recto cuja área lateral é $18\,m^2$ e cujo perímetro é $6\,m$.

R: $\left\{\begin{array}{l} 2\pi r = 6 \\ \pi r g = 18 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \frac{3}{\pi} \\ g = 6 \end{array}\right.$ *donde* $V = Bh/3 =$
$= \pi r^2 \sqrt{g^2 - r^2}/3 = 9 \sqrt{4\pi^2 - 1}/\pi^2 =$
$= 9 \sqrt{(2\pi+1)(2\pi-1)}/\pi^2 =$
$= 9 \cdot (7{,}2832)^{1/2} \cdot (5{,}2832)^{1/2}/\pi^2 = 5{,}6566\,m^3$.

1828 — Dadas num plano três circunferências iguais e tangentes entre si duas a duas, determinar, em função do raio comum, a área do triângulo formado pelas tangentes exteriores a essas circunferências. R: *Sejam* O_1, O_2, O_3, *os centros das circunferências,* r *o seu raio,* A, B, C *os vértices do triângulo formado e* $P_1, P_2, \cdots P_6$ *os pontos de tangência. O triângulo* [ABC] *é equilátero e o triângulo* $[O_1 O_2 O_3]$ *é semelhante e de lado* 2r. *Notando que* $[O_1 P_1 A]$ *é igual a metade do triângulo* $[O_1 O_2 O_3]$ *e que a distância entre* P_1 *e* P_2 *é* 2r *a área virá* $A = 2(3+2\sqrt{3})\,r^2$.

1829 — *a)* Superfícies de revolução; definições; descrição e propriedades das mais importantes dessas superfícies. *b)* São dadas duas superfícies esféricas E_1 de raio r e E_2 de raio R e tais que E_2 passa pelo centro de E_1; calcule a área da zona de uma base, ou calote, determinada na superfície E_2 pela sua intersecção com a superfície E_1. R: *Seja* h *o raio da base da calote e* x *sua altura; então* $h^2 = r^2 - x^2$ *e também* $h^2 = R^2 - (R-x)^2$ *donde* $r^2 - x^2 = R^2 - (R-x)^2$ *e* $x = r^2/2R$ *e a área pedida será* $S = 2\pi R x = \pi r^2$, *valor independente de* R *o que é de notar.*

1830 — Numa semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB} = 2r$, consideram-se as três cordas $\overline{AC} = r/2$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB} = r/2$; calcule o comprimento da corda $\overline{CD}$ e a área do segmento de círculo que ela determina. R: *O triângulo rectângulo* [ABD] *fornece* $r/2 = 2r \cos B$, *donde* $\cos B = 1/4$. *Seja* $\overline{DP}$ *a perpendicular baixada de* D *sôbre* $\overline{AB}$; *então:*

$\overline{PB}^2 = r^2/4 - r^2/4 \operatorname{sen}^2 B = r^2(1 - \operatorname{sen}^2 B)/4 = r^2 \cos^2 B/4 = r^2/64$

portanto $\overline{CD} = 2(r - r^2/64)$. *A área pedida obter-se-ia por diferença entre a área do sector de abertura* $\pi - \operatorname{arc\,sen} B$ *e a do triângulo* [COD].

Soluções dos n.os 1825 a 1830 de J. Remy T. Freire.

Instituto Superior Técnico — Julho de 1943.

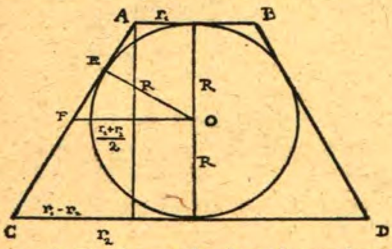
1831 — Num trajecto de 180 metros, as rodas dianteiras de um carro dão mais trinta voltas completas que as rodas trazeiras. Se a circunferência de cada roda tivesse 1 metro a mais, as rodas da frente dariam sòmente mais 15 voltas do que as de trás, durante o mesmo percurso. Determine o comprimento da circunferência de cada roda. R: *Seja* n *o número de voltas que dá, no percurso de* 180 m, *cada uma das rodas traseiras, no primeiro caso; o número de voltas que cada roda da frente dá é* n + 30. *Os perímetros das rodas traseiras e dianteiras são, neste caso, respectivamente* 180 : n *e* 130 : (n + 30). *Aumentando estes perímetros de* 1 *metro, passarão as rodas a ter* 180 : n + 1 *e* 180 : (n + 30) + 1, *e o número de voltas que cada uma delas dará no mesmo percurso será, repectivamente,* 180 : (180 : n + 1) = 180n : (180 + n) *e* 180 : [180 : (n + 30) + 1] = 180 (n + 30) : (210 + n), *e como as rodas dianteiras darão agora só mais* 15 *voltas deverá ser* 180n : (180 + n) + + 15 = 180 (n + 30) : (210 + n), *equação equivalente a* $n^2 + 390\,n - 27000 = 0$ *de cujas raízes* $n_1 = -195 + 255$ *e* $n_2 = -195 - 255$ *só serve a primeira sendo por isso* n = 60. *Os perímetros serão então* 3 m *e* 2 m.

1832 — Determine a, b e c de modo que o trinómio $ax^2 + bx + c$ tome para $x = 1$ e $x = -2$, rospectivamente, os valores 2 e -1 e sejam reais e desiguais as raízes da equação obtida igualando a 0 êsse trinómio. R: *Os coeficientes* a, b e c *terão que satisfazer às seguintes condições, que são impostas pelo enunciado do problema:* $a + b + c = 2$, *para que* $x = 1$ *dê ao trinómio o valor* 2; $4a - 2b + c = -1$, *para que o trinómio tome o valor* -1 *quando se faz* $x = -2$ *e finalmente* $b^2 - 4ac > 0$ *para que as raízes do trinómio sejam reais e desiguais. Das duas primeiras equações tira-se* $a = b - 1$ *e* $c = 3 - 2b$, *valores que substituídos na última desigualdade dão a inequação* $9b^2 - 20b + 12 > 0$, *a qual é verificada para qualquer valor real de* b *pois as raízes da equação que se obtém igualando o primeiro membro a zero, são imaginárias. Logo as soluções do problema são:* b *qualquer,* $a = b - 1$ *e* $c = 3 - 2b$.

1833 — Determine os ângulos de um triângulo rectângulo de que se conhece um cateto e o ângulo da hipotenusa com a mediana relativa a êsse cateto. R: *Sejam* m *a medida da mediana,* α *a do ângulo que a mediana forma com a hipotenusa* c *a do cateto que se conhece;* $\hat{C}$ *o ângulo oposto ao cateto* c *e* $\hat{B}$ *o outro ângulo agudo. Teremos* $\hat{A} = 90^\circ$ $\hat{C} = 90 - \hat{B}$, *basta por isso determinar* $\hat{B}$. *Ora o triângulo rectângulo fica dividido pela mediana em dois triângulos, um rectângulo e o outro obtusângulo. Para o primeiro é* $c/2 = m \cos(\alpha + B)$ *e do segundo, atendendo à proporcionalidade dos lados e dos senos dos ângulos opostos, deduz-se* $m : \operatorname{sen} B = c/2 : \operatorname{sen} \alpha$; *destas duas equações e por substituição do valor de* m *obtém-se:* $c/2 = c/2 \cos(\alpha + B) \cdot \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} \alpha$ *ou* $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \operatorname{sen} B \cos B - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 B$ *equação que pode escrever-se* $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} B \cos B : (1 + \operatorname{sen}^2 B)$ *ou ainda e finalmente* $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\operatorname{sen}^4 B - (1 - 2\operatorname{tg}^2 \alpha)\operatorname{sen}^2 B + \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$, *donde* $\operatorname{sen} B = \pm \sqrt{\dfrac{1 - 2\operatorname{tg}^2 \alpha \pm \sqrt{1 - 8\operatorname{tg}^2 \alpha}}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}}$ *o que permite determinar* B *conhecido* α.

1834 — São dadas uma semi-circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AB}$ e duas semi-circunferências interiores a esta e que tem como diâmetros os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Descreva a circunferência de centro C tangente interior à circunferência maior e tangente exterior às duas menores. Sejam M e N os pontos de contacto nestas duas semi-circunferências. Exprima, em função de $\overline{AB}$ o perímetro do triângulo [CMN]. R: *Seja* $\overline{AB}=2r$ *e* x *o raio da circunferência de centro* C. *Se forem* O_1 *e* O_2 *os pontos médios de* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OB}$ *o triângulo* $[CO_1O]$ *é rectângulo e dêle se deduz* $(r-x)^2+r^2:4=(r:2+x)^2$ *donde* $x=r/3$. *Por outro lado o triângulo* [CMN] *é homotético do triângulo* $[CO_1O_2]$ *e então* $\overline{CM}:\overline{CO_1}=\overline{MN}:\overline{O_1O_2}$ *ou* $r/3:(r/2+r/3)=\overline{MN}:r$ *donde* $\overline{MN}=2r/5$. *O perímetro de* [CMN] *é então* $2\cdot r/3+2r/5=16r/15=8\overline{AB}/15$.

1835 — O volume de uma esfera de raio R tangente às bases e à superfície lateral de um tronco de



cone de revolução é metade do volume do tronco de cone. Exprima, em função de R, os raios das bases do tronco. R: *Sejam* r_1 *e* r_2 *os raios das bases superior e inferior do tronco, será:* $8\pi R^3/3=2/3\,\pi R(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$ *ou* $4R^2=r_1^2+r_2^2+r_1r_2$, *notando que é* 2R *a altura do tronco. A geratriz do tronco tem por medida* $\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}$ *e da figura tira-se, considerando os triângulos semelhantes* [OEF] *e* [ACG], *que* $R:(r_1+r_2)/2=2R:\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}$ *ou* $\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}=$ $=r_1+r_2$ *e quadrando* $4R^2+(r_2-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ *e por isso* $r_1r_2=R^2$ *valor que substituído na primeira expressão de* $4R^2$ *determina* $r_1^2+r_2^2=3R^2$ *equação que. com* $r_1^2r_2^2=R^4$ *permite determinar* r_1 *e* r_2 *cujos valores são:* $r_1=R\sqrt{(3-\sqrt{5}):2}$ *e* $r_2=R\sqrt{(3+\sqrt{5}):2}$.

1836 — Determine os ângulos que uma diagonal do cubo forma com uma aresta, com uma face e com a outra diagonal. R: *Seja* 1 *a aresta do cubo a sua diagonal será* $d=1\sqrt{3}$ *e a diagonal duma das faces do cubo* $d_1=1\sqrt{2}$. *Se considerarmos o plano que contém duas diagonais do cubo, notamos que êle projecta ortogonalmente na face do cubo uma diagonal, projecção que é a diagonal da face do cubo. O ângulo destas duas diagonais (do cubo e da face do cubo) é o ângulo da diagonal do cubo com a face, e do triângulo rectângulo cujos catetos são a diagonal da face e a aresta do cubo tira-se:* $\cos\alpha=\sqrt{6}:3$ *sendo* α *o ângulo da diagonal com a face, e* $\beta=90^\circ-\alpha$ *sendo* β *o ângulo da diagonal com a aresta. Se considerarmos finalmente o triângulo formado pelas semi-diagonais do cubo e por uma aresta, e aplicando a proporcionalidade dos senos dos ângulos dum triângulo aos lados opostos,* $\operatorname{sen}\beta:d/2=\operatorname{sen}\gamma:1$ *ou* $\operatorname{sen}\gamma=2\sqrt{2}:3$, *sendo* γ *o ângulo das duas diagonais.*

Soluções dos n.ᵒˢ 1831 a 1836 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

BREVE ESTUDO, NO CAMPO REAL, DE ALGUMAS TRANSCENDENTES ELEMENTARES

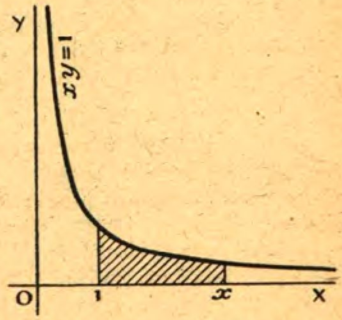
por ***Manuel Zaluar Nunes***

Função logaritmo neperiano $y=\log x$

Por vários modos pode ser apresentada e estudada, num curso de Matemáticas Gerais, a função $y=\log x$. Um dêles consiste em introduzi-la como primitiva da função $1/x$. Com efeito esta função $1/x$, contínua para $x>0$, admite primitiva definida a menos de uma constante aditiva, primitiva que se reconhece, porém, não ser exprimível por combinação finita alguma das funções prèviamente conhecidas. É esta a via que adoptaremos nesta exposição, que acompanha de perto algumas das obras citadas na bibliografia final.

Definição

A função $y=\log x$ (*logaritmo neperiano, natural* ou *hiperbólico de* x) é a função definida para $x>0$ que admite a derivada $y'=1/x$ e que se anula para $x=1$. A função $\log x$ é pois a medida algébrica da área limitada pelo ramo do primeiro quadrante da hipérbole equilátera $y=1/x$, eixo real e ordenadas de abscissas 1 e x, área representada na figura.



Tem-se então:

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$