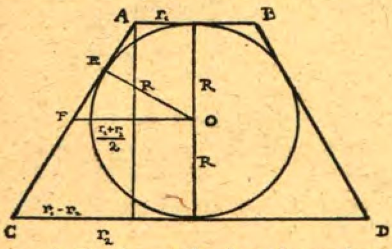
1834 — São dadas uma semi-circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AB}$ e duas semi-circunferências interiores a esta e que tem como diâmetros os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Descreva a circunferência de centro C tangente interior à circunferência maior e tangente exterior às duas menores. Sejam M e N os pontos de contacto nestas duas semi-circunferências. Exprima, em função de $\overline{AB}$ o perímetro do triângulo [CMN]. R: *Seja* $\overline{AB}=2r$ *e* x *o raio da circunferência de centro* C. *Se forem* O_1 *e* O_2 *os pontos médios de* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OB}$ *o triângulo* $[C O_1 O]$ *é rectângulo e dêle se deduz* $(r-x)^2+r^2:4=(r:2+x)^2$ *donde* $x=r/3$. *Por outro lado o triângulo* [CMN] *é homotético do triângulo* $[CO_1\,O_2]$ *e então* $\overline{CM}:\overline{CO_1}=\overline{MN}:\overline{O_1\,O_2}$ *ou* $r/3:(r/2+r/3)=\overline{MN}:r$ *donde* $\overline{MN}=2r/5$. *O perímetro de* [CMN] *é então* $2\cdot r/3+2r/5=16r/15=8\,\overline{AB}/15$.

1835 — O volume de uma esfera de raio R tangente às bases e à superfície lateral de um tronco de



cone de revolução é metade do volume do tronco de cone. Exprima, em função de R, os raios das bases do tronco. R: *Sejam* r_1 *e* r_2 *os raios das bases superior e inferior do tronco, será:* $8\pi R^3/3=2/3\,\pi R\,(r_1^2+r_2^2+r_1 r_2)$ *ou* $4R^2=r_1^2+r_2^2+r_1 r_2$, *notando que é* 2R *a altura do tronco. A geratriz do tronco tem por medida* $\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}$ *e da figura tira-se, considerando os triângulos semelhantes* [OEF] *e* [ACG], *que* $R:(r_1+r_2)/2=2R:\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}$ *ou* $\sqrt{4R^2+(r_2-r_1)^2}=r_1+r_2$ *e quadrando* $4R^2+(r_2-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ *e por isso* $r_1\,r_2=R^2$ *valor que substituído na primeira expressão de* $4R^2$ *determina* $r_1^2+r_2^2=3R^2$ *equação que. com* $r_1^2\,r_2^2=R^4$ *permite determinar* r_1 *e* r_2 *cujos valores são:* $r_1=R\sqrt{(3-\sqrt{5}):2}$ *e* $r_2=R\sqrt{(3+\sqrt{5}):2}$.

1836 — Determine os ângulos que uma diagonal do cubo forma com uma aresta, com uma face e com a outra diagonal. R: *Seja* l *a aresta do cubo a sua diagonal será* $d=l\sqrt{3}$ *e a diagonal duma das faces do cubo* $d_1=l\sqrt{2}$. *Se considerarmos o plano que contém duas diagonais do cubo, notamos que êle projecta ortogonalmente na face do cubo uma diagonal, projecção que é a diagonal da face do cubo. O ângulo destas duas diagonais (do cubo e da face do cubo) é o ângulo da diagonal do cubo com a face, e do triângulo rectângulo cujos catetos são a diagonal da face e a aresta do cubo tira-se:* $\cos\alpha=\sqrt{6}:3$ *sendo* α *o ângulo da diagonal com a face, e* $\beta=90^\circ-\alpha$ *sendo* β *o ângulo da diagonal com a aresta. Se considerarmos finalmente o triângulo formado pelas semi-diagonais do cubo e por uma aresta, e aplicando a proporcionalidade dos senos dos ângulos dum triângulo aos lados opostos,* $\operatorname{sen}\beta:d/2=\operatorname{sen}\gamma:l$ *ou* $\operatorname{sen}\gamma=2\sqrt{2}:3$, *sendo* γ *o ângulo das duas diagonais.*

Soluções dos n.os 1831 a 1836 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

BREVE ESTUDO, NO CAMPO REAL, DE ALGUMAS TRANSCENDENTES ELEMENTARES

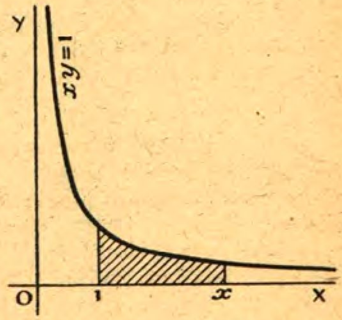
por ***Manuel Zaluar Nunes***

Função logaritmo neperiano $y=\log x$

Por vários modos pode ser apresentada e estudada, num curso de Matemáticas Gerais, a função $y=\log x$. Um dêles consiste em introduzi-la como primitiva da função $1/x$. Com efeito esta função $1/x$, contínua para $x>0$, admite primitiva definida a menos de uma constante aditiva, primitiva que se reconhece, porém, não ser exprimível por combinação finita alguma das funções prèviamente conhecidas. É esta a via que adoptaremos nesta exposição, que acompanha de perto algumas das obras citadas na bibliografia final.

Definição

A função $y=\log x$ (*logaritmo neperiano, natural* ou *hiperbólico de* x) é a função definida para $x>0$ que admite a derivada $y'=1/x$ e que se anula para $x=1$. A função $\log x$ é pois a medida algébrica da área limitada pelo ramo do primeiro quadrante da hipérbole equilátera $y=1/x$, eixo real e ordenadas de abscissas 1 e x, área representada na figura.



Tem-se então:

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Algumas propriedades

Da definição resulta imediatamente que $y=\log x$ é uma *função contínua e derivável* $(y'=1/x)$.

É $\log x>0$ para $x>1$, $\log 1=0$ e $\log x<0$ para $0<x<1$.

Como a derivada $1/x$ é constantemente positiva para $x>0$, a função $\log x$ é *monotónica crescente*.

De $y''=\frac{-1}{x^2}<0$ conclui-se que a curva $y=\log x$ volta a concavidade no sentido dos y negativos.

Tem-se para a *e* b *números reais positivos quaisquer* $\log ab=\log a+\log b$.

Seja $a>0$ e calculemos $(\log ax)'$. Tem-se $(\log ax)'=$ $=a/ax=1/x=(\log x)'$ donde se conclui que $\log ax=$ $=\log x+c$. Recordando que, por definição, é $\log 1=0$, deduz-se $c=\log a$, fazendo na igualdade anterior $x=1$. Vem pois $\log ax=\log x+\log a$, c. q. p.

Nota — Vê-se então que *a função* $\log x$ *satisfaz à equação funcional* $f(xy)=f(x)+f(y)$. Pode mostrar-se mais que não há função alguma derivável distinta de $c\log x$ e solução da equação indicada, (excepção feita da função $f(x)=0$, que corresponde a $c=0$, sem interêsse). Com efeito, derivando em ordem a x e y, respectivamente, a equação funcional vem $yf'(xy)=f'(x)$ e $xf'(xy)=f'(y)$ donde $yf'(y)=xf'(x)=c$, $f'(x)=c/x$, donde finalmente $f(x)=\int\frac{c}{x}dx+c_1=c\log x+c_1$. A substituição na equação funcional dá $c_1=0$.

Mais geralmente, e como resultado da propriedade associativa do produto de números reais, tem-se:

$$\log \prod_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n}\log a_i \quad (a_i>0).$$

O caso particular $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$ conduz a

$$\log a^n=n\log a.$$

Mostremos que esta propriedade, assinalada no caso $n>0$ inteiro, é válida para n *racional qualquer*.

Comecemos por considerar $n>0$ racional qualquer $n=p/q$.

De $(a^{p/q})^q=a^p$ deduz-se $q\log(a^{p/q})=p\log a$, $\log a^{p/q}=p/q\log a$, c. q. p.

Para passar ao caso dos expoentes negativos notemos primeiro que no caso do quociente, de $a/b\times b=a$ vem $\log a/b+\log b=\log a$ ou $\log a/b=\log a-\log b$. Se $a=1$ tem-se $\log 1/b=-\log b$.

Se for n racional negativo $n=-n'$ $(n'>0)$ tem-se

$$\log a^n=\log\frac{1}{a^{n'}}=-\log a^{n'}=-n'\log a=n\log a.$$

A propriedade $\log a^n=n\log a$ *verifica-se pois para* n *racional qualquer e* $a>0$.

Nota — A propriedade indicada é válida para n real qualquer o que não pode porém mostrar-se neste momento.

Passemos agora ao estudo de outras propriedades de $\log x$ relativas ao seu comportamento quando $x\to 0$ e $x\to+\infty$.

É $\lim\limits_{x\to+\infty}\log x=+\infty$.

Seja $a>1$ e portanto $\log a>0$. Tem-se para p inteiro $y=\log x>p\log a$, desde que $x>a^p$, arbitràriamente grande, c. q. p.

É $\lim\limits_{x\to 0}\log x=-\infty$.

É resultado da propriedade anterior e de dois números recíprocos (a^p e a^{-p}) terem logaritmos simétricos.

Notemos, o que nos dará indicações para o traçado da curva representativa, que o coeficiente angular da tangente no ponto da abscissa x é $1/x$ e que esta função é monótica decrescente tendendo para zero quando $x\to\infty$. Em particular, no ponto de abscissa 1 o coeficiente angular é 1, isto é, os dois infinitésimos $f(u)=\log(1+u)$ e u são equivalentes. Com efeito, visto a derivada ter o valor 1 no ponto 1 segue-se que

$$f'(1)=\lim_{u\to 0}\frac{\log(1+u)-\log 1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\log(1+u)}{u}=1, \text{ c. q. p.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0.$$

Seja $x_0<x$ e designemos por ξ um valor conveniente intermédio de x_0 e x. Pela fórmula dos acréscimos finitos: $\log x=\log x_0+(x-x_0)\,\xi^{-1}$ donde $\frac{\log x}{x}=\frac{\log x_0+(x-x_0)\,\xi^{-1}}{x}<\frac{\log x_0}{x}+\frac{x-x_0}{x_0\,x}$, expressão que tende para $1/x_0$ quando $x\to+\infty$. Como x_0 pode ser escolhido arbitràriamente grande tem-se $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$, c. q. p.

Para n *racional qualquer positivo tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=0 \quad e \quad \lim_{x\to 0}x^n\log x=0.$$

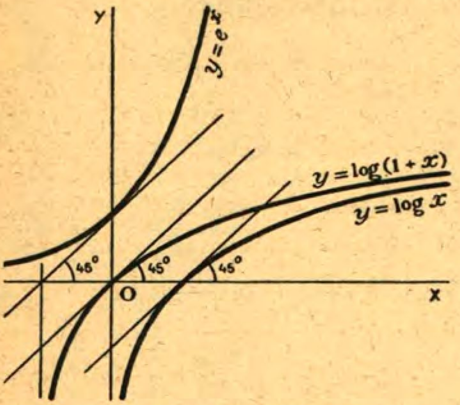
Com efeito, fazendo $x=y^{1/n}$, vem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=$ $=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\log y}{ny}=0$ e fazendo $x=y^{-1/n}$ deduz-se anàlogamente $\lim\limits_{x\to 0}x^n\log x=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\log y}{ny}=0$, c. q. p.

Façamos agora o estudo da função exponencial de base e, inversa do logaritmo neperiano.

Função e^x

Definição e principais propriedades

Das propriedades apontadas da função $\log x$ resulta a existência duma função inversa contínua, derivável e crescente, cujo domínio é todo o eixo real e contra-domínio o semi-eixo positivo das ordenadas. É a função que designaremos, de momento, por $E(x)$ e cujo gráfico se pode obter, como é sabido, construindo a curva simétrica de $y=\log x$ em relação à bissectriz dos eixos coordenados de equação $y=x$.



Passemos à dedução das propriedades de $E(x)$ que resultam também imediatamente das correspondentes de $\log x$.

Derivada de y = E (x).

Basta, para deduzir y', recordar a lei de derivação duma função inversa e notar que a inversa de $y=E(x)$ é $x=\log y$ e que $x'=(\log y)'=1/y$.

Assim, tem-se: $y'=1/x'=y=E(x)$.

A função E (x) *é idêntica à sua derivada.*

A função E (x) *satisfaz à equação funcional* E (a+b) = E (a) · E (b) (a *e* b *números reais quaisquer*).

Comecemos por notar que do facto de serem inversas as duas funções consideradas se tem para x qualquer $x=\log[E(x)]$.

Consideremos agora o logaritmo do produto $E(a)\cdot E(b)$. Vem: $\log[E(a)\cdot E(b)]=\log[E(a)]+\log[E(b)]=a+b$ e portanto $E(a)\cdot E(b)=E(a+b)$, c. q. p.

Generalização imediata: $\prod_{i=1}^{n} E(a_i)=E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Nota — Pode aqui observar-se também que não há função alguma derivável fundamentalmente distinta da função $E(x)$ e solução da equação funcional: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. A justificação far-se ia por via análoga à já indicada no caso de $\log x$.

No caso particular $a_i=a$ $(i=1,2,\cdots n)$ tem-se: $[E(a)]^n=E(na)$.

Mais geralmente, para n racional qualquer, duma propriedade assinalada para $\log x$, deduz-se: $\log([E(a)]^n)=n\log[E(a)]=na$ ou $[E(a)]^n=E(na)$.

Designando por e o valor de $E(x)$ para $x=1$, isto é, $E(1)=e$ ou $\left(\log e=\int_1^e \frac{dt}{t}=1\right)$ vem, para x racional qualquer $E(x)=e^x$.

As propriedades fundamentais atrás indicadas passam a ser traduzidas por $e^a\cdot e^b=e^{a+b}$ e $(e^a)^n=e^{na}$ para n racional qualquer.

É também evidente que

$$E(1)=e^1=e,\ E(r)\ \ E(-r)=E(0)=e^0=1$$

em vista de convenções conhecidas.

A função $E(x)$ contínua para todos os valores de x coïncide assim para x racional com a potência e^x.

Convencionaremos, naturalmente, estender esta representação $E(x)=e^x$ a x irracional, *generalizando assim, a noção de potência no caso do expoente irracional para a base* e. [1]

Passemos ao estudo de outro conjunto de propriedades de e^x (*função exponencial* de base e).

Os infinitésimos x *e* e^x-1 *são equivalentes.*

Com efeito $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x}=(e^x)'_{x=0}=1$.

Tem-se para n *racional positivo*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0.$$

Mostremos finalmente que o limite da sucessão de têrmo geral $u_n=(1+1/n)^n$ é o número e definido por $\log e=1$.

Para isso considere-se a sucessão $v_n=\log u_n=n\log(1+1/n)$. Recordando que $\log(1+1/n)$ é para $n\to\infty$ um infinitésimo equivalente a $1/n$, vem $\lim_{n\to\infty} v_n=\lim_{n\to\infty} n\cdot\log(1+1/n)=\lim_{n\to\infty} n\cdot 1/n=1$ e portanto $\lim_{n\to\infty} v_n=\lim_{n\to\infty}\log u_n=\log(\lim_{n\to\infty} u_n)=1$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n=e$, c. q. p.

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

G. Bouligand. Initiation à l'Analyse Mathématique, 2.ª ed. Paris, 1943.

G. Bouligand et *M. J. Dufresnoy.* Mathématiques Pures. (1ère partie du programme de la classe de Mathématiques Supérieures). Paris, 1943.

G. H. Hardy. A course of pure Mathematics, 8.ª ed. Cambridge, University Press, 1941.

R. Courant. Differential and Integral Calculs. Vol. 1, 2.ª ed. London, 1941.

R. Courant and *H. Robbins.* What is Mathematics? Oxford University Press, 1943.

Th. Leconte et *R. Deltheil.* Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Paris, 1935.

Nota — Todos os livros indicados são de leitura aconselhável aos alunos dos dois primeiros anos das nossas Escolas Superiores. As obras «What is Mathematics?» e «Initiation à l'Analyse Mathématique» não são livros de curso e a sua leitura é muito agradável e proveitosa podendo contribuir para desenvolver vantajosamente o gôsto pela matemática.

---

[1] Mais adiante provaremos que êste número e é o número vulgarmente definido por $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ ou como limite comum das duas sucessões convergentes $u_n=1+1+1/2!+1/3!+\cdots+1/n!$ e $v_n=u_n+1/n!$, e que tão importante papel representa na Análise Matemática.

EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **Exame final, 9-6-944.** — Ponto n.º 1.

1837 — Demonstre que o produto de duas raízes de índice n da unidade é ainda uma raíz de índice n da unidade. R: *As raízes de índice* n *da unidade são:*

$$w_{n,k} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0,1,2\cdots n-1)$$

pondo $k=i$ *e* $k=j$, *vem:*

$$w_i \cdot w_j = \cos\frac{2(i+j)\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2(i+j)\pi}{n}$$

ora $i+j = nq+r$ *com* $0 \overline{\leq} r \overline{<} n-1$.

Portanto: $w_i \cdot w_j = \left(\cos\frac{2nq\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2nq\pi}{n}\right)\cdot$

$$\cdot\left(\cos\frac{2r\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2r\pi}{q}\right) = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2r\pi}{n}$$

que é uma raiz de índice n *da unidade.* c. q. d.

1838 — Calcule pelo método de aproximação de Newton (usando duas aproximações) a menor raiz positiva da equação $x - \cos x = 0$. R: *A menor raiz positiva da equação dada está contida no intervalo* $(0, \pi/2)$. *A função* $f(x) = x - \cos x$ *e a sua segunda derivada têm no ponto* 0 *sinais contrários. Portanto, a primeira aproximação da raiz é:*

$$r_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi/2}{1+1} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854\,.$$

Para calcular a segunda aproximação note-se que a raiz está contida na intervalo $(0, \pi/4)$. *Portanto, visto que* $f(\pi/4) > 0$

$$r_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi/4 - \sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = 0{,}7374\,.$$

1839 — Que valor se deve atribuir a k para que a equação $ay^2 - x^2 + (a-1)\,xy + (a+1)\,y - k = 0$ represente duas rectas distintas? R: *A condição para que a equação dada represente duas rectas distintas, é:* $(B^2 - AC)\;(D^2 - AE) = (BD - AF)^2$ *ou seja, no nosso caso:* $\left(\frac{a^2+1-2a}{4} + a\right)\cdot\left(\frac{a^2+2a+1}{4}\right) = \left(\frac{a^2-1}{4} - ak\right)^2$ *ou* $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2-1}{4} - ak$ *ou ainda* $a^2+2a+1-a^2+1 = -4ak$; *logo* $k = -\frac{a+1}{2a}$.

Soluções dos n.ºs 1837 a 1839 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º Exame de freqüência, 1942-43.**

I

1840 — Equação da tangente à curva $y = xe^{1/x^2}$ no ponto $M(x, y)$ e limite para que tende esta tangente quando $\overline{OM}$ tende para ∞.

1841 — Determinar o 4.º termo do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $\frac{1}{1+x}\cdot\log(1-x)$. R: *De* $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \Sigma\, u_n$ *e* $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = \Sigma\, v_n$, *tem-se* $w_4 = u_0 v_4 + u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 + u_4 v_0$ *ou* $w_4 = 7x^4/12$.

1842 — Determinar os máximos e mínimos da função $y = sen\, x^2 + cos\, x^2$. R: *Pondo* $y = \text{sen}\,u + \cos u$ *tem-se* $y' = \cos u - \text{sen}\,u = 0$ *para* $\text{tg}\,u = 1$ *ou* $u = \pi/4 + k\pi$. *Agora* $y'' = -\text{sen}\,u - \cos u$ *é positiva para* $u = 5\pi/4 + 2k\pi$ *e negativa para* $u = \pi/4 + 2k\pi$; *nestes pontos a função tem portanto um mínimo* $(-\sqrt{2})$ *e um máximo de* $(\sqrt{2})$, *respectivamente.*

II

1843 — Como se levanta uma indeterminação do tipo ∞^0? Justifique. R: *De* $y = [f(x)]^{g(x)} = e^{\frac{\log f(x)}{1/g(x)}}$ *tem-se* $\lim_{x\to a} y = e^{\lim_{x\to a}\frac{\log f(x)}{1/g(x)}}$. *Bastará determinar-se* $\lim_{x\to a}\frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

1844 — De que relação se parte para concluir que $f(x, y)$ é contínua num ponto em que tem derivadas contínuas? R: *Da fórmula dos acréscimos finitos.*

1845 — Não é possível garantir a continuïdade de $f(x, y)$ em condições mais gerais? Como? R: *Para que* $f(x, y)$ *seja contínua num ponto em que admita derivadas parciais é suficiente que estas sejam limitadas nas suas vizinhanças.*

1846 — Que fórmula se pode utilizar no cálculo aproximado de $25^{1/5}$? R: *Pondo* $25 = 32\,(1/32 + 24/32)$ *pode desenvolver-se* $(1/32 + 24/32)^{1/5}$ *pela fórmula do binómio*

1847 — Como se justifica o uso que se faz de $f''(x)$ para determinar a situação duma curva em relação à sua tangente na vizinhança do ponto de contacto? R: *A partir da comparação da ordenada* $y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2/2\cdot f''(x_1)$, *na vizinhança do ponto* (x_0, y_0) *da curva, com a ordenada* $Y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ *do ponto da tangente à curva em* $(x_0 y_0)$ *que tem a mesma abscissa que o primeiro.*

1848 — Aplique a $\varphi(t)=f(a+ht, b+kt)$, no intervalo de $t=0$ a $t=1$, o teorema de Lagrange e classifique o resultado obtido aproximando-o de alguma fórmula conhecida. R: *É* $\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)=\Delta t\varphi'(t+\theta\Delta t)$. *Pondo-se* $a+ht=x$ *e* $b+kt=y$ *será* $h\Delta t=\Delta x$ *e* $k\Delta t=\Delta y$; *além disso* $\varphi'(t)=hf'_x+kf'_y$ *e finalmente:*

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta x f'_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)+\Delta y f'_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y).$$

1849 — Na resolução dum problema de máximos e mínimos é sempre necessário recorrer às derivadas de ordem superior? Justifique. R: *Um ponto de máximo ou mínimo é um ponto em que a 1.ª derivada muda de sinal. Para o determinar basta em muitos casos o conhecimento da derivada como quando, sendo* α *e* β *inteiros positivos, se tem* $y'=(x-a)^{\alpha}/(x-b)^{\beta}$.

1850 — Que relação liga os coeficintes angulares de 2 diâmetros conjugados da curva $2x^2+y^2=2$? R: *Sendo* m *e* m' *êsses coeficientes, a relação é:*

$$mm'=-2.$$

1851 — De que teorema se deduz que é constante a diferença entre duas primitivas da mesma função finita? É necessária esta restrição *finita?* Porquê? (Funções reais, variável real). R: *Do teorema de Lagrange ou, mais directamente, dum seu corolário que diz que* se duas funções num dado intervalo admitem derivadas finitas constantemente iguais, a sua diferença, nêsse intervalo, é necessàriamente constante. *A restrição é necessária. Considere-se a função nula para qualquer* $x\neq 0$ *e infinita para* $x=0$. *Qualquer função, nula para* $x=0$ *e igual a* $k|x|/x$ *para* $x\neq 0$, *é uma primitiva de 1.ª; duas destas funções não diferem duma constante. (Êste exemplo é uma variante dum outro que se encontra em Vicente Gonçalves,* Lições de Cálculo e Geometria, *pág. 194).*

1852 — Para que valores de x se desenvolve $\operatorname{sen} e^x$ em série de Mac-Laurin? Porquê? R: *Qualquer, porque* sen z *tem um desenvolvimento em série de potências válido em todo o plano.*

III

1853 — Escreva a identidade de Euler para a função homogénea $f(x,y)$ e derive-a em relação a x. Em que condições se deduz daí que $f'_x(x,y)$ é também função homogénea? R: *A identidade é* $xf'_x+yf'_y=\alpha f(x,y)$. *Derivando, tem-se* $f'_x+xf''_{x^2}+yf''_{yx}=\alpha f'_x$ *ou* $xf''_{x^2}+yf''_{yx}=(\alpha-1)f'_x$. *Na condição de serem contínuas as derivadas de 2.ª ordem* $f''_{yx}=f''_{xy}$ *é* $f'_x(x,y)$ *uma função homogénea visto que verifica a identidade de Euler.*

1854 — Ache a equação da recta variável na qual os semi-eixos Ox e Oy determinam um segmento $\overline{AB}$ de grandeza invariável. R: *Sendo* $\overline{AB}=l$ *a equação será* $x/p+x/\sqrt{l^2-p^2}=1$.

Soluções dos n.os 1841 a 1854 de G. Ramos de Castro.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira. — 2.º exame de freqüência, 8 de Junho de 1943.

1855 — Calcular a área dum triângulo, cujos comprimentos dos lados, são as raízes da equação

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0.$$

(Utilizar a fórmula $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que p é o semi-perímetro e a, b, c as medidas dos lados do triângulo). R: *Tem-se* $p(p-a)(p-b)(p-c)=p^4-p^3(a+b+c)+p^2(ab+ac+bc)-pabc$ *e pelas fórmulas de Newton:* $a+b+c=-\alpha$, $ab+ac+bc=\beta$ *e* $abc=-\gamma$. *Ora* $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{-\alpha}{2}$; *portanto,*

$$S=\sqrt{\alpha(4\alpha\beta-8\gamma-\alpha^3)}/4.$$

1856 — Mostre que é $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)$

se fôr $V=f(x,y)$ e $\begin{cases} x=e^r\cos\theta \\ y=e^r\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$

R: *Tem-se:* $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{\partial V}{\partial x}e^r\cos\theta+\dfrac{\partial V}{\partial y}e^r\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}e^r\operatorname{sen}\theta+\dfrac{\partial V}{\partial y}e^r\cos\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}e^{2r}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\partial V}{\partial x}e^r\cos\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}e^{2r}\operatorname{sen}^2\theta+\frac{\partial V}{\partial y}e^r\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}e^{2r}\operatorname{sen}^2\theta-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\frac{\partial V}{\partial x}e^r\cos\theta-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}e^{2r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}e^{2r}\cos^2\theta-\frac{\partial V}{\partial y}e^r\operatorname{sen}\theta.$$

Somando ordenadamente e tendo em conta as simplificações, virá: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=e^{2r}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+e^{2r}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ *donde:*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right),\quad \text{c. q. p.}$$

1857 — Considere-se um triângulo $[ABC]$ de base $\overline{AB}$ e de altura $\overline{CO}$. Tomem-se para eixos coordenados as rectas contendo $\overline{AB}$ e $\overline{CO}$. Sejam a e b as abcissas dos pontos A e B, c a ordenada do ponto C. Escrever as equações das alturas dêste triângulo, verificar que elas passam por um mesmo ponto e determinar as coordenadas dêste ponto. R: *Escolhendo o referencial cartesiano ortogonal que aconselha o problema, é fácil ver que as três alturas do triângulo são medidas:*

altura $\overline{CO}$ $\rightarrow$ *sôbre a recta* $x=0$.

» $\overline{AD}$ $\rightarrow$ *sôbre a recta que passa por* $A(a,0)$ *e é perpendicular à recta* CB.

» $\overline{BE}$ $\rightarrow$ *sôbre a recta que passa por* $B(b,0)$ *e é perpendicular à recta* AC.

Equações das rectas CB *e* AC:

CB) $\quad \frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1 \rightarrow y=-c/b\cdot x+c$

AC) $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{c}=1 \rightarrow y=-c/a\cdot x+c$.

Portanto, as equações das rectas AD *e* BE *serão respectivamente:* $y=\frac{b}{c}(x-a)$ *e* $y=\frac{a}{c}(x-b)$. *Tem-se de verificar que as três rectas de equações:* $x=0$, $y=b/c\cdot(x-a)$ *e* $y=a/c\cdot(x-b)$ *passam tôdas por um mesmo ponto. Como sabemos, terá que ser nulo o determinante:* $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & -c & ab\\ a & -c & ab\end{vmatrix}$, *o que é evidente. Para determinar as coordenadas dêste ponto, basta resolver, por exemplo, o sistema:* $\begin{cases}x=0\\ y=b/c\cdot(x-a)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-ab/c\end{cases}$.

1858 — Estudar e representar gràficamente a função $y=e^{-\operatorname{tg} x}$. Calcular, utilizando o seu desenvolvimento em série, o valor numérico de y para $x=\pi/4$ com um êrro inferior a 10^{-2}. R: *Função definida em todo o domínio da variável* x *real, periódica de período* π. *São seus pontos de descontinuidade infinita, de 1.ª espécie, os pontos de abcissa* $x=(2k+1)\pi/2$ *à esquerda dos quais a função tende para zero e à direita dos quais* $y\rightarrow+\infty$. *É um ponto da curva, sôbre o eixo das ordenadas, o ponto* $(0,1)$. *Tem-se:* $y'=-e^{-\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x \rightarrow y'<0$ *qualquer que seja* x, *logo, a função é monotónica decrescente; não tem máximos nem mínimos.* $y''=e^{-\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x\,(\sec^2 x-2\operatorname{tg} x)=e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x\cdot(1-\operatorname{tg} x)^2$ *o que leva a concluir que* y *não tem pontos de inflexão e apresenta a sua concavidade sempre voltada no sentido das ordenadas positivas, por ser sempre* $y''>0$. *O cálculo do valor numérico de* y *para* $x=\pi/4$ *reduz-se, como fàcilmente se vê, ao cálculo, com um êrro inferior a* 10^{-2}, *da soma dos termos da série alterna:*

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

Tomando os quatro primeiros termos desta série, cometeremos no cálculo da sua soma um êrro $<\left|\frac{1}{6!}\right|=\frac{1}{720}<\frac{1}{200}$ *Basta calcular* $\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{4!}$ *e* $\frac{1}{5!}$ *com três casas decimais (arredondando a última), para se cometer três êrros de cálculo inferiores a* $1/2000$, *logo um êrro total inferior a* $1/200$. *Com um êrro sistemático e um êrro de cálculo* $<\frac{1}{200}$, *o resultado virá pois com a aproximação desejada; assim, será* $e^{-1}\simeq 0{,}5-0{,}167+0{,}042-0{,}008=0{,}367$.

Soluções dos n.os 1855 a 1858 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame Técnico — 2.º exame de freqüência extraordinário, 23-6-943.

1859 — Importância do conceito de monotonicidade na teoria da convergência de séries.

1860 — Estabeleça, pelo caminho que lhe pareça mais curto, a fundamentação do teorema dos valores compreendidos sôbre o conceito de corte.

1861 — Aplique o teorema de Rolle à função:

$$y(x)=(x-a)^n\cdot(x-b)^p$$

e determine o ponto em que a derivada se anula.

GEOMETRIA DESCRITIVA E PROJECTIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — 2.º exame de freqüência. Junho de 1943.

1862 — *Geometria cotada.* São dados: uma recta r de declive 1 e um plano α de intervalo 4/3. A recta e o plano projectam-se segundo dois lados opostos de um quadrado. Representar a recta simétrica de r em relação ao plano α. Escala 1:80. R: *A introdução de um plano vertical de projecção de traço paralelo à escala de declive do plano dado, transforma* α *num plano de topo e* r *numa recta frontal, resolvendo o problema imediatamente.*

1863 — *Perspectiva cavalheira.* Determinar o ângulo de dois planos de traços paralelos.

1864 — *Superfícies.* É dada uma esfera pelos contornos aparentes, de 3,5 cm de raio e centro no segundo plano bissector. Conduzir os planos tangentes à esfera paralelos a um plano dado pelos traços. R: *Conduza-se pelo centro da esfera uma recta perpendicular ao plano dado. Os pontos em que essa recta intersecta a esfera são os pontos de contacto dos planos pedidos.*

F. C. C. — Geometria Descritiva — **Exame final, Junho de 1943.**

1869 — *Perpectiva rigorosa* — Representar o ponto simétrico de um ponto dado em relação ao plano do quadro. R: *Conduza-se pelo ponto o plano projectante de tôpo e rebata-se sôbre o plano do quadro.*

1866 — *Superfícies* — Representar a secção plana feita numa esfera por um plano definido pela L. T. e pelo centro da esfera.

Soluções dos n.os 1862, 1864 e 1865 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

F. C. C. — Geometria Projectiva — **Exame final, Outubro de 1943.**

1867 — Dada uma involução de raios por dois pares de elementos conjugados, determine o par de raios perpendiculares conjugados na involução. Justifique.

1868 — Dada uma parábola por três tangentes e o ponto de contacto de uma delas, determine pelo processo de Brianchon, a direcção do eixo. Justifique.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Exames finais — Outubro de 1943. — Ponto n.º 1.

1869 — Calcular a área limitada pela curva $y=\frac{1}{a^2x^2+b^2}$, o eixo dos xx e as paralelas ao eixo dos yy tiradas pelos pontos de inflexão. R: *Para abcissas dos pontos de inflexão obtém-se:* $x=\pm\frac{b}{\sqrt{2}\,a}$. *A área pedida será:*

$$\int_{-\frac{b}{\sqrt{3}a}}^{+\frac{b}{\sqrt{3}a}} \frac{dx}{a^2x^2+b^2}=\frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{b}\right]_{-\frac{b}{\sqrt{3}a}}^{+\frac{b}{\sqrt{3}a}}=\frac{\pi}{3ab}.$$

1870 — Determinar a envolvente das circunferências cujos centros percorrem a parábola $y=x^2$ e cujos raios são iguais às ordenadas dos centros. R: *As circunferências consideradas têm por equação* $(X-x)^2+(Y-x^2)^2=x^4$, *onde* x *desempenha o papel de parâmetro. Derivando em ordem a* x, *obtem-se* $(X-x)+2x(Y-x^2)=-2x^3$; *eliminando* x *entre esta equação e a anterior, vem* $2Y(X^2+Y^2)-Y^2=0$, *que representa a envolvente pedida. Trata-se do eixo dos* XX *e duma circunferência centrada no eixo dos* YY *e passando pela origem.*

1871 — Sendo $M(\rho,\theta)$ o ponto corrente de uma linha (C), determinar a sua equação sabendo que esta linha passa pelo ponto $A(\theta=0, \rho=a$, em que $a\geq 2)$, e que a área OAM tem um valor numérico igual ao arco $\widehat{AM}$. R: *Tem-se* $\int_0^\theta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2\,d\theta$, *donde* $\rho^2+\rho'^2=\rho^4/4$, *ou* $\rho'=\rho\sqrt{\rho^2-4}/2$. *Separando variáveis e integrando, obtém-se* $\rho=\frac{2}{\cos(\theta+C)}$. *Os dados iniciais levam a* $\cos C=2/a$; *a equação procurada é, pois,* $\rho=\frac{2a}{2\cos\theta-\sqrt{a^2-4}\,\mathrm{sen}\,\theta}$, *que representa uma recta.*

Soluções dos n.os 1869 a 1871 de A. Pereira Gomes.

F. C. P. — Exame final, Outubro de 1943. — Ponto n.º 2.

1872 — Calcular a área limitada pela curva $y^2=3x^2-x^3$, desde a origem até à paralela ao eixo dos yy tirada pelo ponto de ordenada máxima. R: *Para abcissa do ponto de ordenada máxima, obtém-se* $x=2$. *A área pedida será:*

$$A=2\int_0^2 x(3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx\,, \text{ ou, pondo } 3-x=t^2,$$

$$A=4\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{8}{5}(3\sqrt{3}-2).$$

1873 — Determinar a relação que deve existir entre R e a para que a envolvente das esferas $x^2+y^2+(z-2a)^2=R^2$ seja a superfície $x^2+y^2=z^2-1$. R: *Exprimindo que, em cada ponto, o plano tangente à envolvente coïncide com o plano tangente à envolvida, obtém-se* $z=a$; *eliminando* x, y, z *entre esta equação e as dadas, vem:* $2a^2-R^2=1$, *que é a relação procurada.*

1874 — Dada a equação diferencial (1) $y'^3=y^2+yy'$ sabe-se que se considerarmos y' como abcissa teremos uma cúbica com um ponto singular na origem. Determinar as equações paramétricas da linha integral de (1) que passa pelo ponto $(0,0)$. R: *Se puzermos* $y=ty'$, *sabe-se que podemos exprimir* y *e* y' *em função racional de* t. *Obtém-se* $y'=t^2+t$, $y=t^3+t^2$, *donde* $\frac{dy}{dt}=3t^2+2t$ *e, portanto,* $\frac{dx}{dt}=\frac{3t+2}{t+1}$; *integrando,* *vem* $x=3t-\log(t+1)+C$. *Os dados iniciais levam a* $C=0$. *As equações paramétricas procuradas são, pois,* $\begin{cases} x=3t-\log(t+1) \\ y=t^3+t^2. \end{cases}$

Soluções dos n.os 1872 a 1874 de A. Pereira Gomes.

I. S. T. — Cálculo — Exame final, Outubro de 1943.

1875 — Calcular o integral duplo $\iint_A x dx dy$, em relação à área A limitada pela curva $3x^2+2x-y+1=0$, pelo eixo dos yy e pela tangente à curva no ponto de curvatura máxima.

1876 — Determinar as curvas planas cujo comprimento de arco s satisfaz à equação diferencial $\frac{ds}{dy}+3y\frac{d^2s}{dy^2}=0$. ($x$ e y coordenadas rectangulares).

1877 — Verificar que o laplaciano do módulo duma função analítica (excepto nos pontos em que a função ou a sua derivada se anulam) é sempre positivo; e que o logaritmo do módulo da mesma função (com as mesmas excepções) é sempre nulo.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **1.º exame de freqüência extraordinário, 14-3-944.**

1878 — Demonstre que, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem ortogonais dois a dois, se tem $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2=a^2b^2c^2$.
R: *O paralelepípedo construído sôbre os três vectores é rectângulo. Qualquer dos membros da igualdade mede o quadrado do seu volume.*

1879 — Demonstre que, se A e B forem dois pontos fixos dum sólido em movimento, a velocidade de C, exterior a AB, é constantemente perpendicular ao plano ABC.

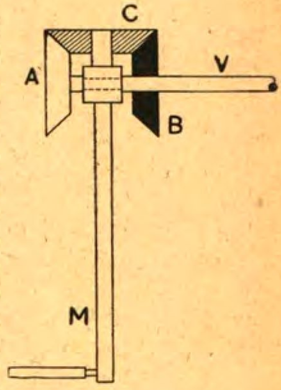
1880 — Considere um biela-manivela em que o comprimento da biela é igual ao raio da manivela (biela-manivela isósceles). Verifique que, se a rotação da manivela fôr uniforme, o centro do cavilhão está animado de movimento harmónico simples.

1881 — Demonstre que tôdas as soluções da equação vectorial $\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b}$, em que os vectores constantes $\vec{a}$ e $\vec{b}$ satisfazem às condições $\vec{a}\neq 0$ e $\vec{a}\,|\,\vec{b}=0$, são dadas por $\vec{x}=\frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{a^2}+\lambda\vec{a}$, onde λ é um escalar arbitrário.

1882 — Do ponto A, situado 19,60 m acima do solo, deixam-se cair sucessivamente, sem velocidade inicial, dois grãos de chumbo P e Q. Quando o grão Q inicia a sua queda, já P percorreu 4,90 cm. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura a que se encontra o grão Q ao atingir P o solo. Sugere-lhe o resultado dêste problema alguma explicação, mesmo parcial, para o facto dos jactos líquidos tenderem a dividir-se em gôtas? R: *Altura pedida,* $x=1{,}91$ m.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **2.º exame de freqüência ordinário, 23-5-944.**

1883 — A figura representa uma manivela manual com multiplicador. A manivela M, em vez de estar, como habitualmente, solidária com o veio V, forma com êle um par rotóide. O satélite C une-se à manivela por um par rotóide e engrena com as rodas planetárias iguais A e B. A primeira destas é solidária com o veio V; a roda B faz parte do fixe, formando um par rotóide com V. Por cada volta da manivela, quantas rotações faz o veio? *(Feraudi).* R: *Notando que o mecanismo é o diferencial dos automóveis com uma das rodas planetárias fixa, vê-se imediatamente que o veio* V *efectua duas rotações por cada volta da manivela.*



1884 — Os perfis dos dentes duma colecção de rodas cicloidais de engrenamento avulso foram gerados por uma rolante auxiliar com 3 cm de diâmetro. A roda de flancos rectilíneos tem 14 dentes. Qual é o diâmetro primitivo da roda de 56 dentes? R: *Numa colecção de rodas de engrenamento avulso, os diâmetros primitivos são directamente proporcionais aos números de dentes. O raio primitivo do carreto de flancos rectilíneos, igual ao diâmetro da rolante auxiliar, vale* 30 mm. *Logo, a roda de 56 dentes tem por diâmetro primitivo*

$$2R=\frac{2\times56\times30}{14}=240\text{ mm}.$$

1885 — Demonstre que o lugar geométrico das rectas, paralelas a uma dada direcção, em relação às quais o momento de inércia dum sistema material tem o mesmo valor, é uma superfície cilíndrica de revolução em tôrno do eixo que passa pelo centro de gravidade do sistema e é paralelo à direcção dada. R: *É conseqüência imediata do Teorema de Lagrange.*

1886 — Calcule o momento quadrático da esfera homogénea do raio R e densidade ρ, em relação: *a)* ao centro; *b)* a um ponto da superfície.
R: a) *Decompondo em camadas esféricas, vem*

$$I_c = 4\pi\rho \int_0^R r^4\, dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5;$$ b) *o Teorema de Lagrange fornece, a partir do resultado anterior,* $I_P = \frac{32}{15}\pi\rho R^5$.

1887 — A um elevador com 1 tonelada de pêso, foi em 3 s e com aceleração constante, imprimida a velocidade de 4 m/s. Desprezando o atrito, calcule a fôrça de tracção exercida pelos cabos e a altura subida durante aquêle tempo. *(Poorman)* R: *Fôrça pedida,* F = 1136,1 kg; *altura subida,* s = 6,00 m.

Soluções dos n.os 1878, 1882 e 1883 a 1887 de P. de Varennes e Mendonça.

I. S. T. — 2.º exame de freqüência — 1943

1888 — Verificar que as equações de Lagrange num espaço de configuração definido pela métrica $ds^2 = 2T\,dt^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$, têm a forma $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = X^i - \sum_{r} \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}$, sendo (X^i) o vector fôrça.

1889 — Um fio flexível, inextensível e simplesmente pesado, suspenso por dois pontos situados sôbre a mesma horizontal, toma a forma duma semi-circunferência. Achar a lei de variação da densidade.

1890 — Um ponto material é atraído por um centro fixo na razão inversa do cubo da distância. Dada a distância inicial a, calcular a duração da queda. (Supõe-se nula a velocidade inicial).

1891 — Quando um cilindro de revolução gira uniformemente em tôrno duma generatriz, o sistema das fôrças de inércia é equivalente a um vector único, cuja linha de acção é a perpendicular baixada do centro de gravidade sôbre o eixo. Qual é a grandeza dêsse vector?

I. S. T. — Mecânica — Exame final, Outubro de 1943.

1892 — Num movimento central, seja r a distância do centro ao ponto móvel M, p a distância do mesmo centro à tangente à trajectória em M, c a constante das áreas e F a grandeza da fôrça, por unidade de massa, suposta atractiva. Verificar a relação: $F = \frac{c^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$. E ainda a relação $F = \frac{c^2\, r}{\rho p^3}$, sendo ρ o raio de curvatura da trajectória em M.

1893 — Um sólido formado por três hastes rectilíneas homogéneas idênticas (de massa M e comprimento $2a$), cada uma delas perpendicular às outras duas, gira uniformemente em tôrno da haste média. Achar o vector principal e o momento resultante do sistema das fôrças de inércia, em relação ao ponto 0, meio dessa haste média.

1894 — Desenvolver $\frac{1}{2}(\pi - x)\operatorname{sen} x$ em série de cosenos, válida no intervalo $0 \le x \le \pi$.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta»

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1895 — Calcular os catetos e a hipotenusa dum triângulo rectângulo, conhecendo-se as superfícies (A_1 e A_2) dos dois triângulos, em que a altura correspondente à hipotenusa, o divide.

(Bach. do Ens. Esp.al Poitier — 2-8.º-88).

1896 — Encontrar quatro números inteiros consecutivos tais que o cubo do maior seja igual à soma dos cubos dos outros três.

(*Generalizar:* — quatro números formando progressão aritmética).

1897 — Resolver a equação

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b\,.$$

1898 — Dividir o volume dum cone recto de revolução, em média e extrema razão, por um plano paralelo à base.

(Bach. em ciências — Marselha — 25-4.º-88).

Problemas n.os 1895 a 1898 propostos por J. Faria de Abreu (de Penafiel).