ANO V-N.º 19 GAZETA DE MATEMATICA MAIO - 1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Os teoremas de Netto e de Lüroth e o conceito de dimensão

por **J. Albuquerque**

(bolseiro em Roma do I. A. C.)

A história de um conceito começa sem dúvida quando êsse conceito é apenas uma noção intuïtiva; as causas da formação dessa noção, os objectos ou os fenómenos naturais que a originaram, o modo como nasceu e tomou corpo, a maneira como resistiu a possiveis esquecimentos e como passou a fazer parte de um património, as relações desde então sempre moventes com os conceitos e noções que já existiam, são sem dúvida a prèistória do conceito, quási sempre misteriosa para nós homens de hoje.

A história de um conceito é necessária porque é conhecendo-a que o homem pode voluntàriamente enriquecê-la e até certo ponto orientá-la, sendo e não sendo escravo dessa história. A história de um conceito é necessária sôbre tudo ao investigador porque tentará adivinhar as leis da evolução dêsse conceito e tentará aplicá-las nos seus esforços de generalização e criação.

Infelizmente para cada conceito falta fazer a respectiva história.

Não é numa conferência ou num artigo que se pode fazer a história de um conceito, geralmente longa e susceptível de preencher o programa de um curso universitário.

Se vamos aqui falar do conceito de dimensão de um espaço, é apenas para em linhas muito largas dizermos qualquer coisa da sua evolução para finalmente nos fixarmos nos teoremas de *Netto* e de *Lüroth* e chamar a atenção dos leitores da «Gazeta de Matemática» para um dos problemas mais interessantes das matemáticas modernas.

A noção intuïtiva de número de dimensões de um espaço durante muito tempo esteve apoiada nas seguintes considerações: sôbre a recta só se podem medir comprimentos, e portanto a recta tem uma dimensão; no plano podem fazer-se medições de comprimentos e larguras, e portanto o plano tem duas dimensões; no espaço euclideano podem fazer-se medições de comprimentos larguras e alturas, e então o espaço euclideano tem três dimensões.

Aos segmentos, áreas planas e volumes eram também atribuídas respectivamente, uma, duas e três dimensões.

Certamente que uma noção intuïtiva como esta, dava ocasião a grandes discussões filosóficas, altamente apreciadas pelos contemporâneos mas absolutamente improductivas. Os matemáticos não procuravam aprofundar esta noção e evitavam falar nela.

Descartes introduzindo as coordenadas veio criar a possibilidade de uma modificação, e essa modificação deu-se, aparecendo uma primeira definição de número de dimensões de um espaço: o número de dimensões de um espaço era precisamente o número 1, 2 ou 3 de coordenadas necessárias para definir a posição de um ponto do espaço.

Em seguida os físicos alargaram a noção de número de dimensões com a necessidade de considerar sistemas em que os pontos não só dependiam das coordenadas que lhes fixavam a posição no espaço, mas ainda de outras grandezas físicas tais como o tempo, a pressão ou a temperatura. A posição do ponto era pois determinada por valores das coordenadas e por valores de grandezas físicas; o elemento do sistema era determinado pelos valores de certos parâmetros numéricos e tais parâmetros perdiam o caracter de uma distância, que as coordenadas tinham, e eram apenas índices numéricos, podendo cada parâmetro ser substituído por uma função dêsse parâmetro.

Chegàmos assim a uma segunda definição de número de dimensões de um espaço: o número de dimensões de um espaço era então o número de parâmetros necessário e suficiente para determinar a posição de um ponto do espaço.

Vê-se que a noção de número de dimensões de um espaço sofria uma evolução e passava a uma fase mais larga, acompanhando uma evolução paralela da noção de espaco.

A confiança dos matemáticos nesta segunda definição era ilimitada e durante anos se manteve até ser abalada por uma sacudidela brutal dada por um matemático de génio.

A descoberta fundamental de *Georg Cantor* estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os pontos de um quadrado e os pontos de um segmento, entre os pontos de um plano e os pontos de uma recta, vinha deitar por terra sem piedade aquela definição.

A genial obra de *Cantor* está perfeitamente enquadrada numa época em que os filósofos revolucionaram o mundo, quebrando como vidro conceitos milenários, criando novas leis do pensamento que lhes permitiram evidenciar a fragilidade das coisas estabelecidas. E *Cantor* teve contra si a massa reaccionária dos matemáticos seus contemporâneos.

Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos é uma lei que a cada elemento de um dos dois conjuntos faz corresponder um e um só elemento do outro, e inversamente. Então poderia determinar-se a posição de um ponto M do plano pela posição do ponto m da recta que se lhe fazia corresponder. A posição do ponto M do plano era determinada por um só parâmetro, a abscissa do ponto m correspondente.

A intuïção levava a conceder ao plano uma nobresa superior à da recta, e a correspondência de Cantor negava essa nobresa, nivelando de um modo brutal os dois espaços. E era de aceitar como um facto um tal nivelamento.

Mas se a conclusão que Cantor impunha, tinha o mérito de destruir o que na intuïção impedia um progresso, tal conclusão destruia igualmente tudo o que na mesma intuïção poderia levar a ultrapassá-la.

Era necessário abandonar a segunda definição e substituí-la por uma outra que a contivesse e que simultâneamente tomasse em consideração a observação de Cantor.

Notou-se então que na correspondência biunívoca entre o plano e a recta, se um ponto de um dêles variasse com regularidade em relação à organização topológica do conjunto, o outro ponto que lhe correspondia não respeitava a topologia do seu espaço e «entregava-se a uma dança louca» executando um movimento formado de saltos bruscos e sem continuïdade.

A noção de continuïdade vinha assim facilitar a síntese, conciliando a nossa intuïção, as aspirações secretas da nossa estructura de matemáticos, com a fria, desumana, mas justa e precisa observação de *Cantor*.

Neto (1899) demonstra que é impossível estabelecer uma correspondência biunívoca e bicontínua entre os pontos de um quadrado e os pontos de um segmento.

Lüroth (1907) demonstra que é impossível estabelecer uma correspondência biunívoca e bicontínua entre os pontos do plano e os pontos da recta, entre os pontos do espaço e os pontos do plano.

O conceito de dimensão entra numa nova fase e a sua história num período áureo.

Conceito e história atravessaram uma crise, crise bela, e é no auge das crises quando tudo parece subverter-se, que nos devemos encher de esperança e olhar a própria crise como uma fôrça tremenda de progresso.

Os resultados de *Netto* e de *Lüroth* domonstravam que o número de dimensões de um espaço, respondendo à nossa intuïção que criava uma diferença fundamental entre o plano e a recta, não podia ser definido considerando sòmente os espaços como cáos de pontos. Punha-se em relêvo o caracter topológico dessa noção.

Em 1909-1910, *Fréchet* dava a sua definição de tipo de dimensão: são do mesmo «tipo de dimensão» todos os conjuntos entre os quais é possível estabelecer uma correspondência biunívoca e bicontínua.

Os tipos de dimensão de *Fréchet* dispõem-se numa escala simplesmente ordenada e contínua; há portanto espaços que não têm um tipo de dimensão inteiro, nem mesmo racional. A definição de *Fréchet* não satisfaz plenamente a intuïção.

O mesmo sucede à teoria de *Hausdorff* (1918) baseada sôbre a noção de medida de um conjunto.

Em 1912, *Poincaré* indicou uma via para a solução do problema, explorada quási imediatamente por *Brouwer, Menger* e *Urysohn*. A definição de Poincaré consiste em permitir passar de um modo topológico de n para $n+1$ dimensões, e daria sòmente dimensões inteiras aproximando-se assim muito da intuïção. Em seguimento destas idéias e já nos nossos dias, estão os resultados das escolas polaca (*Janizewski*, etc.) e francesa (*Bouligand, Ky Fan*, etc.).

¿ Mas de facto o conceito de dimensão é de natureza topológica? Evidentemente que a definição de número de dimensões não pode considerar os espaços como simples colecções de pontos. ¿ Mas não bastará considerá-los ordenados, como uma ordem simples ou com uma ordem dupla?

É neste sentido que a escola americana *(Birkhoff)* tenta hoje uma solução do problema estudando sistemàticamente os sistemas ordenados e as estructuras.

O problema tem mais do que nunca uma extraordinária importância e depois de tão grande impulso como o que sofreu de Cantor perdeu muito da sua velocidade e parece esperar hoje uma nova crise, que lhe virá talvez da física, e que é para desejar seja terrível e fecunda.

Na base de tôdas estas tentativas de resolução encontram-se com notável relêvo os teoremas de *Netto* e *Lüroth*; vamos dar dêstes teoremas uma «demonstração livre», isto é, uma demonstração que expurgàmos de noções estranhas e de complicações inúteis. Quando tal se faz a uma demonstração tornam-se salientes as verdadeiras razões do facto a demonstrar.

Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, como anteriormente dissemos, é uma lei que a cada ponto x de E faz corresponder um ponto $f(x)$ de F de tal modo que se x_1 e x_2 são pontos distintos de E os correspondentes $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são distintos; e inversamente, a cada ponto y de F faz corresponder $f^{-1}(y)$ em E de tal modo que para $y_1 \neq y_2$ se tem $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$.

Temos pois uma transformação f do conjunto E no conjunto F e uma transformação inversa que pode ser representada por f^{-1} e que transforma F em E.

Se os conjuntos E e F estivessem mergulhados em espaços topológicos ou fôssem espaços, cada ponto dêstes conjuntos teria as suas vizinhanças e então poderíamos falar de transformações contínuas ou correspondências contínuas.

Uma transformação f como a anterior será contínua no ponto x do conjunto E se para cada visinhança $V_{f(x)}$ do ponto $f(x)$ existe uma vizinhança V_x de x tal que:

$$f(V_x) \subset V_{f(x)}.$$

A transformação f é contínua em E ou simplesmente contínua se fôr contínua em cada ponto de E. Se a transformação f^{-1} é também contínua então a transformação f diz-se bicontínua.

Uma correspondência biunívoca e bicontínua é uma transformação f unívoca e contínua de E em F tal que a sua inversa f^{-1} é também unívoca e contínua.

Poincaré em 1895 chamou homeomorfismos às transformações biunívocas e bicontínuas; estas transformações formam um grupo.

A topologia ou analysis situs estuda as propriedades dos conjuntos que permanecem invariantes quando se executam homeomorfismos.

A designação de analysis situs é de *Poincaré,* e a designação de topologia é de *Listing* (1847).

Demonstremos agora o teorema de *Netto.*

Teorema de Netto. *Um quadrado não pode ser homeomorfo a um segmento.*

Demonstremos por absurdo. Tomemos um quadrado Q e um segmento S e suponhamos que existe uma correspondência f unívoca e contínua de Q em S tal que f^{-1} é também unívoca e contínua.

Seja (a,b) um segmento de pontos do quadrado Q, que podemos supôr todo formado com pontos interiores ao quadrado o que é possível e permitirá tirar dêste teorema um corolário importante.

A correspondência f dá-nos em particular uma correspondência biunívoca e bicontínua entre o segmento (a,b) e um certo conjunto de S de que conhecemos já dois pontos: os transformados $f(a)$ e $f(b)$. Vamos demostrar antes de mais nada que o intervalo (a,b) é transformado por f no segmento $[f(a), f(b)]$.

Seja com efeito p um ponto de $[f(a), f(b)]$ e suponhamos que nenhum ponto de (a,b) se transforma em p.

Representemos por E o conjunto dos pontos de (a,b) cujos transformados caem em $[f(a), p]$.

Representemos por F o conjunto dos pontos de (a,b) cujos transformados caem em $[p, f(b)]$.

Fàcilmente se vê que: $E+F=(a,b)$ e que $E \cdot F=0$, isto é, os conjuntos E e F são disjuntos e reünidos dão o segmento (a,b).

Tomemos um ponto x de F, portanto com $f(x)$ em $[p, f(b)]$ sendo por hipótese $f(x) \neq p$.

Como f é contínua, a cada visinhança $V_{f(x)}$ de $f(x)$ corresponde uma visinhança V_x de x, cujos pontos são todos transformados em pontos de $V_{f(x)}$. Isto basta para provar que existe uma V_x sem pontos de E e êste resultado é verdadeiro para todo o x de F.

Então o conjunto F não tem pontos de acumulação do conjunto E, e do mesmo modo se demonstraria que E não tem pontos de acumulação de F, o que é impossível porque $E+F$ é o segmento (a,b). Demonstrou-se assim que o transformado do segmento (a,b) é um segmento.

Se tomarmos agora um outro ponto c do quadrado Q fora do segmento (a,b), e que podemos também supor interior ao quadrado, os três segmentos (a,b), (b,c) e (c,a), lados de um triângulo, tranformam-se em segmentos $[f(a), f(b)]$, $[f(b), f(c)]$, $[f(c), f(a)]$ formando um triângulo «achatado» do segmento S, onde encontramos um ponto pertencendo simultâneamente a dois lados do triângulo achatado e que será o transformado de dois pontos distintos do quadrado Q facto em contradição com a biunivocidade de f.

Uma transformação biunívoca e bicontínua entre os pontos do quadrado e do segmento conduz sempre a esta contradição e por isso não existe. *c. q. d.*

Antes de tirar do teorema o corolário que anunciàmos, vejamos uma conseqüência imediata e importante do teorema.

Um conjunto plano homeomorfo a um segmento não pode ter pontos interiores. Esta conseqüência é realmente imediata porque se pode considerar o segmento como o transformado do conjunto plano pelo homeomorfismo, e se o conjunto plano tivesse um ponto interior conteria também um quadrado, visto que uma das famílias admissíveis de visinhanças de um ponto do plano é a família dos quadrados, por exemplo, centrados no ponto. Chama-se arco simples de *Jordan* a um conjunto homeomorfo a um segmento finito, e portanto o arco simples de *Jordan* não tem pontos interiores.

Notemos agora que o facto de se poder tomar o triângulo de vértices a, b, c, da demonstração do teorema com todos os pontos dos seus três lados interiores ao quadrado, permite enunciar imediatamente o seguinte corolário:

Corolário. *O conjunto dos pontos interiores a um quadrado não pode ser homeomorfo ao conjunto dos pontos interiores a um segmento.*

O mesmo raciocínio do teorema, marcha com efeito sem obstáculos até ao fim, demonstrando-nos assim o corolário.

Com êste corolário demonstraremos o teorema de *Lüroth* de que se pode dar o seguinte enunciado:

Teorema de Lüroth. *Não pode existir um homeomorfismo entre o plano e a recta.*

Com efeito, o conjunto dos pontos interiores a um quadrado é homeomorfo ao plano, e o conjunto dos pontos interiores a um segmento é homeomorfo à recta. Então se o plano e a recta fôssem homeomorfos também o seriam os interiores de um quadrado e de um segmento, o que contradiz o corolário. *c. q. d.*

Lüroth demonstrou ainda que *não pode existir um homeomorfismo entre o espaço euclideano e o plano.* A demonstração deste segundo teorema de *Lüroth* é uma generalização da anterior e deixamo-la como exercício aos nossos leitores.

Roma, 24 de Março de 1944.

ASTRONOMIA

IRREGULARIDADES DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA

por ***António Perestrello Botelheiro***

A noção do tempo é uma das que mais têm preocupado o espírito humano. Em constante evolução, a idéia de tempo tem sofrido através das idades duras vicissitudes e sôbre ela se têm escrito, e continuam a escrever, dezenas de livros.

Cada filósofo, desde Heraclito, apresenta uma noção nova e o aspecto que oferece o confronto das idéias expendidas é, por vezes, bastante confuso. Assim, por exemplo, enquanto Kant sustenta a existência subjectiva do tempo, Spencer julga-o inconcebível quer objectiva quer subjectivamente considerado.

Ao astrónomo não é, sem dúvida, indiferente êste debate em que opiniões tão curiosas se entrechocam, e sôbre as quais o bem conhecido *quid est ergo tempus?* de Santo Agostinho paira possìvelmente ainda...

No entanto, o astrónomo não intervem nas discussões sôbre a «essência», sôbre a «natureza íntima» do tempo; como diz Eddington, qualquer que possa ser a natureza do tempo *de jure*, o tempo do astrónomo é o tempo *de facto*. Na verdade êle sabe que pode medir intervalos de tempo e ao aperfeiçoamento dessa medida dedica o melhor do seu esfôrço, convicto de que procedendo desta maneira novos e interessantíssimos horizontes se vão abrindo à ciência, simultâneamente no campo especulativo e no campo da aplicação.

O «padrão» de medida de intervalos de tempo, há muito adoptado, é o movimento de rotação da Terra. Entre as qualidades essenciais a que deve obedecer um bom padrão sobressai a da «permanência»: obedecerá o nosso relógio fundamental a esta característica indispensável para que as suas indicações nos possam merecer confiança?

Creio ter sido em 1752 que a não permanência do nosso padrão de tempo foi pela primeira vez abordada. A Academia das Ciências de Berlim, presidida nessa época pelo francês Maupertuis, instituiu um prémio para galardoar o melhor trabalho que lhe fôsse apresentado em resposta às seguintes preguntas:

— Teve ou não o movimento de rotação da Terra sempre a mesma velocidade?

— Que meios existem para o comprovar?

— No caso de se descobrir alguma irregularidade, qual seria a sua causa?

Entre os trabalhos recebidos pela Academia de Berlim em resposta aos quesitos formulados figurava um no qual, com extraordinária intuïção, era apresentado pela primeira vez o atrito das marés oceânicas como causa retardadora do movimento de rotação da Terra: assinava-o Kant.

O prémio foi atribuído ao trabalho apresentado pelo matemático italiano Paulo Frisi...

Anos e anos decorreram sem que o problema fôsse retomado e só a espaços uma ou outra voz se levantava — como que receosa de fazer desabar o grande