

terior conteria também um quadrado, visto que uma das famílias admissíveis de visinhanças de um ponto do plano é a família dos quadrados, por exemplo, centrados no ponto. Chama-se arco simples de *Jordan* a um conjunto homeomorfo a um segmento finito, e portanto o arco simples de *Jordan* não tem pontos interiores.

Notemos agora que o facto de se poder tomar o triângulo de vértices a, b, c , da demonstração do teorema com todos os pontos dos seus três lados interiores ao quadrado, permite enunciar imediatamente o seguinte corolário:

Corolário. *O conjunto dos pontos interiores a um quadrado não pode ser homeomorfo ao conjunto dos pontos interiores a um segmento.*

O mesmo raciocínio do teorema, marcha com efeito sem obstáculos até ao fim, demonstrando-nos assim o corolário.

Com este corolário demonstraremos o teorema de *Lüroth* de que se pode dar o seguinte enunciado:

Teorema de Lüroth. *Não pode existir um homeomorfismo entre o plano e a recta.*

Com efeito, o conjunto dos pontos interiores a um quadrado é homeomorfo ao plano, e o conjunto dos pontos interiores a um segmento é homeomorfo à recta. Então se o plano e a recta fôsem homeomorfos também o seriam os interiores de um quadrado e de um segmento, o que contradiz o corolário. *c. q. d.*

Lüroth demonstrou ainda que *não pode existir um homeomorfismo entre o espaço euclidiano e o plano.* A demonstração deste segundo teorema de *Lüroth* é uma generalização da anterior e deixamo-la como exercício aos nossos leitores.

Roma, 24 de Março de 1944.

ASTRONOMIA

IRREGULARIDADES DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA

por **António Perestrello Botelho**

A noção do tempo é uma das que mais têm preocupado o espírito humano. Em constante evolução, a ideia de tempo tem sofrido através das idades duras vicissitudes e sobre ela se têm escrito, e continuam a escrever, dezenas de livros.

Cada filósofo, desde *Heraclito*, apresenta uma noção nova e o aspecto que oferece o confronto das ideias expandidas é, por vezes, bastante confuso. Assim, por exemplo, enquanto *Kant* sustenta a existência subjectiva do tempo, *Spencer* julga-o inconcebível quer objectiva quer subjectivamente considerado.

Ao astrónomo não é, sem dúvida, indiferente este debate em que opiniões tão curiosas se entrecrocaram, e sobre as quais o bem conhecido *quid est ergo tempus?* de *Santo Agostinho* paira possivelmente ainda...

No entanto, o astrónomo não intervém nas discussões sobre a «essência», sobre a «natureza íntima» do tempo; como diz *Eddington*, qualquer que possa ser a natureza do tempo *de jure*, o tempo do astrónomo é o tempo *de facto*. Na verdade ele sabe que pode medir intervalos de tempo e ao aperfeiçoamento dessa medida dedica o melhor do seu esforço, convicto de que procedendo desta maneira novos e interessantíssimos horizontes se vão abrindo à ciência, simultaneamente no campo especulativo e no campo da aplicação.

O «padrão» de medida de intervalos de tempo, há muito adoptado, é o movimento de rotação da Terra.

Entre as qualidades essenciais a que deve obedecer um bom padrão sobressai a da «permanência»: obedecerá o nosso relógio fundamental a esta característica indispensável para que as suas indicações nos possam merecer confiança?

Creio ter sido em 1752 que a não permanência do nosso padrão de tempo foi pela primeira vez abordada. A Academia das Ciências de Berlim, presidida nessa época pelo francês *Maupertuis*, instituiu um prémio para galardoar o melhor trabalho que lhe fôsse apresentado em resposta às seguintes perguntas:

— Teve ou não o movimento de rotação da Terra sempre a mesma velocidade?

— Que meios existem para o comprovar?

— No caso de se descobrir alguma irregularidade, qual seria a sua causa?

Entre os trabalhos recebidos pela Academia de Berlim em resposta aos quesitos formulados figurava um no qual, com extraordinária intuição, era apresentado pela primeira vez o atrito das marés oceânicas como causa retardadora do movimento de rotação da Terra: assinava-o *Kant*.

O prémio foi atribuído ao trabalho apresentado pelo matemático italiano *Paulo Frisi*...

Anos e anos decorreram sem que o problema fôsse retomado e só a espaços uma ou outra voz se levantava — como que receosa de fazer desabar o grande

edifício tão laboriosamente architectado, tal o respeito que infundia a «permanência» dos nosso padrão de tempo.

É só um século depois de Kant ter apresentado, sem bases experimentais que a apoiassem, aquilo a que êle chamou uma «história natural» do céu que Robert Mayer ataca de novo o problema tanto tempo adormecido.

A questão começa a interessar os astrónomos e os trabalhos sôbre êste tema vão-se sucedendo agora: o assunto é tratado sucessivamente por Ferrel, Croll, Delaunay, Adams, Thomson, Darwin...

Mercê de tais cultores a teoria evoluciona incessantemente e atinge nos primeiros anos dêste século, como Simon Newcomb, um extraordinário brilho. Já não restam dúvidas de que o comprimento do dia está continuamente aumentando por efeito do atrito das marés oceânicas!

A técnica das observações aperfeiçoa-se, entretanto, cada vez mais; o erro médio de uma determinação de tempo diminui de forma continua desde o século XVI. Assim, êste erro que era, no período áureo dos descobrimentos portugueses, de dois minutos é hoje de cerca de doze mil vezes menor, isto é, inferior a uma centésima de segundo.

O atraso do movimento de rotação da Terra devido ao atrito das marés é apenas de um milésimo de segundo por século. Pequeno, embora, êste atrazo envolve um grande dispêndio de energia.

Um cálculo simples mostra que a energia dissipada em calor é de $1,5 \times 10^{10}$ ergs por segundo, ou sejam mais de dois mil milhões de cavalos-vapor!

As medidas effectuadas directamente no sentido de se avaliar a quantidade de energia dissipada pelas marés nas costas e no fundo dos mares, apesar de incompletas e do seu carácter necessariamente grosseiro, forneceram o número $1,1 \times 10^{19}$ ergs por segundo que concorda bem com aquêle que a teoria indica.

É interessante notar que enquanto nos mares profundos é relativamente pequena a dissipação de energia ela é muito elevada nos mares fechados e de pouca profundidade, como o mar do Norte, a Mancha, etc. Cerca de dois terços do número encontrado são devidos a um único mar — o de Bering — onde a dissipação de energia é muito forte.

Como as marés oceânicas são um fenómeno regular e constante a perturbação que elas trazem ao movimento de rotação da Terra não teria, se fôsse única, importância de maior: uma fórmula simples nos daria a correcção devida ao atraso do nosso relógio fundamental.

Mas o problema é mais complicado e tem sido, com frequência, pôsto de uma forma pouco nítida mesmo em trabalhos de responsabilidade.

De facto, além do atraso constante originado pelo atrito das marés oceânicas o movimento de rotação da Terra está sujeito a outras perturbações, a irregularidades imprevisíveis, de causa ainda desconhecida, «saltos» na marcha semelhantes àquêles que são inerentes às melhores pêndulas construídas pelo homem.

Foi a comparação entre as observações das posições dos astros e aquelas que a teoria lhes assinalava que revelou a existência destas irregularidades. Na realidade, a observação mostrava ora um avanço ora um atraso sôbre a teoria; como isto sucedia para todos os astros e duma quantidade proporcional ao respectivo movimento médio na órbita, só uma explicação havia que satisfizesse, salvando ao mesmo tempo o edificio da Mecânica Celeste — a variação do «padrão» de medida.

A importância excepcional do assunto foi magistralmente posta em relêvo por William Brown, o grande impulsor dêste estudo e «um dos gigantes da Astronomia», como lhe chamou um seu biógrafo.

Para a Lua se voltaram então as atenções gerais, pois é a Lua o astro que é dotado do maior movimento médio diário ($13^{\circ},2$) e aquêle que, por êsse motivo, nos pode dar uma maior precisão.

A sua teoria, o problema mais difficil de tóda a Mecânica Celeste, foi levada por Brown a um grau de perfeição nunca dantes atingido e difficilmente ultrapassável. Para dar uma idéia, embora ligeira, do seu gigantesco trabalho basta dizer que nas tabelas por êle elaboradas, tabelas que nos dão a posição do nosso satélite em qualquer data com a aproximação de um centésimo de segundo, cerca de mil e quinhentas perturbações foram calculadas. (Hansen, nas suas tábuas da Lua, tinha considerado apenas trinta perturbações).

No Observatório de Yale começaram, sob a direcção de Brown, a ser retinidas e discutidas tódas as observações da Lua que podem contribuir para o esclarecimento do problema; entre estas occupam lugar de destaque as observações de occultações de estrêlas, pois nelas não intervêm os erros instrumentais. O Observatório da Tapada inclui, desde 1938, no seu plano de trabalhos o estudo das irregularidades do movimento de rotação da Terra; desde aquela data que êle contribui com as suas observações de occultações para a campanha internacional, e esta colaboração tem neste momento um especial interesse pois a grande maioria dos observatórios europeus está impossibilitada de trabalhar no mesmo sentido.

Graças ao clima, as observações da Tapada ultrapassam já em número as de qualquer outro observatório; sôbre a sua qualidade só diremos que nunca nenhuma observação deixou de ser aproveitada pelo organismo que superintende internacionalmente no assunto.

No quadro abaixo é dado um resumo dos resultados obtidos (em correcções à longitude tabular da Lua) em comparação com os valores determinados pelo serviço internacional:

	Tapada	S. I.
1938	2'',09	1'',88
1939	1'',32	1'',34
1940	0'',96	0'',92
1941	0'',93	—
1942	0'',24	—
1943	0'',20	—

Embora continue a servir para as necessidades da

geodesia e da navegação, o nosso padrão de medida de tempo, durante tantos séculos julgado permanente, deixou de merecer confiança aos astrónomos.

Já hoje êle não é empregado no cálculo rigoroso dos eclipses totais do Sol, no estudo das estrêlas duplas espectroscópicas e das variáveis de curto período.

Qual a causa destas irregularidades do nosso padrão de tempo? Haverá possibilidade de o substituímos por outro mais rigoroso?

A resposta a estas perguntas é de capital importância para a Astronomia; num outro artigo apresentaremos a nossa opinião, numa tentativa para o esclarecimento do problema.

PEDAGOGIA

SOBRE O TREINO DE ESTUDO DOS NOSSOS PROFESSORES

por Hugo B. Ribeiro (bolseiro em Zürich do I. A. C.)

No seu artigo «Algumas reflexões sobre os exames de aptidão» («Gazeta de Matemática», n.º 17) o prof. Bento Caraça indica-nos resultados dos exames de aptidão na sua escola que podem fornecer elementos para o estudo da coordenação entre os nossos ensinos, secundário e superior, de Matemática. Em conclusão, sublinha como as insuficiências dos candidatos a estes exames revelam falta de espírito crítico e automatismo e apela para um longo debate sobre esta questão que «envolve muito profundamente o interesse nacional». Muitos dos nossos professores considerarão, naturalmente, como um simples dever profissional o contribuírem com a sua experiência para se esclarecer, nesta oportunidade, origens e remédios de tais deficiências e, especialmente, para se averiguar da extensão delás. Mas as experiências dos estudantes interessam também no debate. Por isto nos resolvemos a indicar o que segue, com o que não pretendemos senão sublinhar observações oportunas, algumas das quais, já repetidamente foram feitas, mesmo neste jornal ⁽¹⁾.

1. Falta de espírito crítico e automatismo em Matemática, aparecem naturalmente juntos e significam ignorância e inconsciência da ignorância, aí, onde o conhecimento não se tem sem exercício aturado da faculdade crítica e com o puro automatismo (talvez porque na utilização, com êxito, dos resultados matemáticos êsse predicado do conhecimento em geral intervem a cada passo). O mal colectivo diagnosticado não resultará, decerto, de deficiências fisiológicas a manifestarem-se em determinadas gerações; mas as suas causas, nem tôdas novas, residem num meio social

propício, e parece que se manifestam entre nós, neste momento, mais agudamente. Não podemos esperar que tôdas essas causas se conheçam e facilmente possam resolver-se para actuarmos de uma forma progressiva: é também na medida em que soubermos encarar os problemas singulares e, nestes, as causas singulares, que tomamos consciência das relações de interdependência entre estas, que nos fortalecemos para apressarmos a construção de novas relações e, finalmente, da solução aceitável. Isolaremos, aqui, uma, entre as causas próximas, que provavelmente é decisiva: ¿ Não será normal, entre nós, a impreparação matemática dos que ensinam e se destinam a ensinar, Matemática? ⁽²⁾ E, se assim é, ¿ não resulta já, esta normal falta de treino de estudo dos nossos professores, de que só excepcionalmente a Matemática terá sido considerada, entre nós, como um objecto, próprio, independente, de estudo? O que estas interrogações significam, aqui, é o que rapidamente procuramos explicar no que segue.

2. Na hipótese mais favorável, o nosso, comum, professor de Matemática tem, depois da preparação mate-

⁽²⁾ Não se põem aqui em questão os esforços individuais dos nossos professores de matemática no sentido da elevação do nível da sua preparação profissional; trata-se somente da qualidade de treino que é exigida para a sua profissão.

A Sociedade Portuguesa de Matemática, e especialmente o prof. Bento Caraça, tem procurado reunir informações sobre a preparação exigida no estrangeiro aos professores de matemática das escolas secundárias. Só agora podem enviar-se à S. P. M. alguns dados, com êste fim, relativos à Suíça. Publicar-se-ão provavelmente na «Gazeta de Matemática»; e estão em inteiro acôrdo com as impressões que deixamos neste artigo.

⁽¹⁾ Leia-se, por exemplo, o artigo de António Monteiro «O prémio nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira», «Gazeta de Matemática», n.º 15.