INTERPOLAÇÃO, pelo Assistente O. Morbey Rodrigues,

1. Representação aproximada duma lei empírica por uma soma trigonométrica de ordem p.

2. Método de Prony para a interpolação por meio de exponenciais.

INTERPOLAÇÃO, pelo Assistente J. Remy Freire.

1) Problema da derivação numérica: a) Caso em que os valores conhecidos constituem progressão aritmética; b) Caso geral.

2) Problema da integração numérica: a) Fórmula de Euler—Maclaurin; b) Fórmula de Gregory.

3) Problema da somação: a) Fórmula de Woolhouse; b) Fórmula de Lubbock.

4) Resolução numérica das equações diferenciais ordinárias: Método de Adams, sua aplicação às equações do 1.º grau, justificação da aplicação do método às equações de qualquer grau.

EQUAÇÕES INTEGRAIS, pelo Professor A. de Mira Fernandes.

I) Equação de Fredholm — Forma limite dum sistema de equações lineares — Análise de Fredholm — Expressão da resolvente como função mèromorfa de λ.

II) Sistema completo de funções características — Género dum parâmetro — Solução da equação homogénea e da não homogénea de 2.ª espécie.

III) Teoria de Volterra — Núcleo resolvente — Fórmula de Liouville-Neumann — Reciprocidade — Núcleos iterados.

IV) Núcleos simétricos — Teorema de Hilbert-Schmidt — Propriedades dos valores próprios — Teorema de Hilbert-Mercer — Série de Fredholm — Redução do caso geral ao caso simétrico — Equação de primeira espécie de Volterra — Relações com a equação diferencial linear.

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Por lamentável esquecimento não foi citada no n.º 18 da nossa revista a adesão à Junta de Investigação Matemática, logo após a sua creação, de Armando Gibert, Augusto Sá da Costa e Hugo B. Ribeiro, bolseiros do I. A. C. em Zürich. No próximo número da Gazeta será relatada detalhadamente a actividade da Junta bem como a do Centro de Estudos Matemáticos do Porto.

CENTRO DE ESTUDOS DE FÍSICA DA F. C. L.

Além das habituais reüniões do Centro onde se expõem e discutem os resultados obtidos nos trabalhos em curso, realizou em fins de Maio o Prof. A. Proca três conferências subordinados aos títulos seguintes:

1) Sur la notion de particule élémentaire, constituant ultime de la matière. 2) Sur une nouvelle particule élémentaire. 3) Quelques remarques sur la notion de temps physique.

São de notar a elegância e clareza de exposição e a elevação com que foram tratados os assuntos indicados.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto — 2 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 2.

1708 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a 0, à equação

$$(x/3+2)^3=(x-1/3)^2-(5x-1)/6\,.$$

R: $\frac{x^3}{27}+\frac{2}{3}x^2+4x+8=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$ *donde* $\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}+\frac{11}{2}x+\frac{139}{18}=0$ *ou* $2x^3-18x^2+297x+417=0$.

1709 — Determine os valores de m que tornem positivo, para qualquer valor de x, o trinómio

$$(m-1)\,x^2+(m+1)\,x-3\,.$$

R: *Devendo ser positivo o coeficiente do 1.º termo e imaginárias as raízes do trinómio,* m *deve satisfazer às condições seguintes:* $m>1$ *e* $(m+1)^2+12\,(m-1)<0$. *Destas relações deduz-se que o problema não tem solução.*

1710 — Defina cone, tronco de cone e cone recto de base circular.

1711 — Determine por logarímos, com 5 algarismos decimais e com a aproximação que estes permitirem, os valores de α que satisfazem à equação

$$\sec^2\alpha=0{,}34562\times\operatorname{sen}133^\circ\,22'\,20''\,.$$

R: *Como é* $|\,0{,}34562\times\operatorname{sen}133^\circ\,22'\,20''\,|<1$, *o problema é impossível.*

1712 — ¿Como verifica qual das fracções $\frac{2743}{2225}$ e $\frac{2753}{2235}$ é maior, atendendo a uma relação simples a que satisfazem os seus têrmos? R: $\frac{2743}{2225} > \frac{2753}{2235}$ *porque uma fracção superior à unidade diminue, quando a ambos os termos se junta o mesmo número, Com efeito,* $\frac{a+\alpha}{b+\alpha} < \frac{a}{b}$ *quando* $\alpha b < \alpha a$ *ou* $b < a$.

1713 — Defina arranjos de 4 objectos, 3 a 3. Forme estes arranjos com as 4 primeiras letras do alfabeto e verifique o seu número pela fórmula respectiva.

1714 — Escreva o 3.º têrmo do desenvolvimento de $(1/3.a\sqrt{x}+a^{-1})^5$ e simplifique-o.
R: $T_3 = \binom{5}{2} a^{-2}\left(\frac{1}{3} a\sqrt{x}\right)^3 = \frac{10}{27} ax\sqrt{x}$.

1715 — ¿Em que consistem os métodos geométricos do problema inverso e das figuras semelhantes? Aplique-os à resolução do seguinte problema: Sendo dadas sôbre o plano três rectas que se cortam e uma circunferência, inscreva nesta um triângulo com os lados paralelos àquelas. R: *Circunscrevendo uma circunferência ao triângulo* $[A'B'C']$, *determinado pelas* 3 *rectas, basta construir o triângulo* $[ABC]$, *inscrito na circunferência dada e homotético de* $[A'B'C']$ *em relação a* C *(centro de homotetia directa das duas circunferências). Poderíamos obter uma outra solução considerando o centro de homotetia inversa.*

Soluções dos n.ºs 1708 a 1715 de F. Roldão Dias Agudo, aluno do 1.º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Licenciatura em Ciências Geográficas — Outubro de 1943 — Ponto n.º 2.

1716 — Diga quando é que a equação $px+qy=r$ não admite soluções inteiras e quando é que as admite. R: *Não admite se* p *e* q *não sendo primos entre si o seu m. d. c. não dividir* r. *E admite soluções inteiras se* p *e* q *forem primos entre si ou quando o não forem o seu m. d. c. for divisor de* r.

1717 — Qual é a condição necessária e suficiente para que as fracções a/b e ab/d sejam iguais? R: $ad=ab^2$ *ou* $d=b^2$.

1718 — Imagine um cone de revolução. Corte-o por um plano paralelo à base e que passe pelo meio da geratriz. Diga qual é a relação entre a área do cone e a do tronco. R: *O enunciado é pouco rreciso. A relação que pede diz respeito ao cone primitivo e tronco obtido pela truncatura, ou ao cone e tronco em que se decompõe o cone inicial? No primeiro caso será: Área do cone* $\pi r(g+r)$ *se forem* g *e* r *a geratriz e o raio da base do cone. A área do tronco é* $\pi r(g+r) - \pi r g/4 + \pi r^2/4 = \pi r(3g+5r)/4$ *e a razão é* $\pi r(g+r) : \pi r(3g+5r)/4 = 4(g+r) : (3g+5r)$. *No segundo caso como a área do cone menor é* $\pi r(g+r)/4$ *virá:* $\pi r(g+r)/4 : \pi r(3g+5r)/4 = (g+r) : (3g+5r)$.

Soluções dos n.ºs 1716 a 1718 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia — 9 de Outubro de 1943 — Ponto n.º 2.

I

1719 — Um lavrador vendeu 30 hectolitros de cereais *(trigo e aveia)* por 1.890$00. O preço total do trigo foi o mesmo que o preço total da aveia e o preço de cada hectolitro de trigo excedeu em 60$00 o preço de cada hectolitro de aveia. ¿Quantos hectolitros de cada cereal vendeu e quais os preços de venda do hectolitro de cada um dos cereais? R: *Designando por* X *o número de hectotitros de trigo vendido e por* Y *o preço em Escudos de cada hectolitro de trigo, o número de hectolitros de aveia será* $30-X$, *e o preço de cada hectolitro de aveia* $Y-60$ *Escudos. Como os valores vendidos são iguais, temos:* $XY=(30-X)(Y-60)=1890/2$. *Por substituição chega-se à equação:* $2X^2-123X+945=0$. *Das duas soluções só uma é aproveitável, que é* $X=9$ *e portanto* $Y=105$ Escudos. *O lavrador tinha portanto vendido 9 Hectolitros de trigo a* Escudos 105$00 *e* 21 *Hectolitros de Aveia a* Escudos 45$00.

1720 — Escreva e simplifique o antepenúltimo têrmo do desenvolvimento de $\left(\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{11\cdot a}} - \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}}\right)^{11}$.
R: *Como sabemos, no desenvolvimento de* $(X-A)^m$, *se chamarmos* T_n *ao termo que é precedido por* n *termos é* $T_n = \binom{m}{n} A^n X^{m-n}$. *Neste caso tem-se:* $T_9 = \binom{11}{9}\left(-\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}}\right)^9\left(\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{11\,a}}\right)^2 = -\frac{11!\times\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{a}}{9!\,2!\,11\,a} = -5\frac{\sqrt[6]{a^{11}}}{a} = -5\,a^{\frac{5}{6}}$.

1721 — Dada a equação $x^2+px-2q=0$, determine a relação que deve existir entre p e q para que a razão entre as raízes seja 2/3. R: *Se designarmos por* x' *e* x'' *as raízes da equação, temos:* $\frac{x'}{x''}=\frac{2}{3}$, $x'+x''=-p$, e $x'x''=-2q$ *donde, por eliminação de* x' *e* x'', $3p^2+25q=0$. *Se* p *e* q *forem reais e verificarem esta relação (para o que tem de ser* $q<0$*), as raízes serão reais pois o descriminante da equação será positivo, como fàcilmente se verifica.*

II

1722 — Um dos catetos de um triângulo rectângulo mede 12,675 m e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede 10,143 m. Calcule o menor ângulo interno do triângulo. (Utilize logarítmos). R: *Designando por* α *o ângulo oposto ao catéto dado, e atendendo a que a hipotenusa é o diâmetro do círculo circunscrito, temos:* sen $\alpha = \dfrac{12,675}{2 \times 10,143}$ *Aplicando logarítmos vem:* log sen $\alpha =$ log. 12,675 + colog. 20,286 = $= \bar{1}, 795754$ *e* $\alpha = 38^\circ\ 40'\ 9''$.

1723 — Calcule o ângulo α do 4.º quadrante tal que colog $\sqrt[3]{\cos^2 \alpha} = 0,040209$. (Utilize logarítmos). R: *Atendendo à definição de cologaritmo, vem:*

log. $\sqrt[3]{\cos^2 \alpha} = \bar{1},959791$ *mas* log. $\sqrt[3]{\cos^2 \alpha} = \dfrac{2}{3}$ log. cos α logo, log. cos $\alpha = \dfrac{3}{2} \times \bar{1},959791 =$ $\bar{1},9396865$ donde $\alpha_1 = 29^\circ\ 30'\ 8,6''$ ou, finalmente, $\alpha = 360^\circ - \alpha_1 = 330^\circ\ 29'\ 51'',4$.

1724 — Determine os ângulos x compreendidos entre 0 e 2π radianos que verificam a igualdade $\mathrm{tg}(x + \pi/3) = \mathrm{cotg}\ (\pi/2 - 3x)$. R: *É* cotg. $(\pi/2 - 3x) =$ tg. $3x$ *por serem complementares os ângulos. Então fica* tg. $(\pi/2 + x) =$ tg. $3x$ *o que implica os dois ângulos difirirem de* $K\pi$ *radianos* (K *inteiro*). *Então* $3x - (\pi/3 + x) = K\pi$ *donde* $x = \pi \left(\dfrac{3K+1}{6}\right)$ *E terá de ser* $0 < \pi \left(\dfrac{3K+1}{6}\right) < 2\pi$ *donde* $-1/3 < K < 11/3$ e $x = \pi/6, 2\pi/3, 7\pi/6, 5\pi/3$.

III

1725 — Calcule o raio interior de um tubo cilíndrico de vidro que, vazio, pesa 90 gramas e pesa 247 gramas quando se lhe introduz uma coluna de 8 centímetros de mercúrio. (Densidade do mercúrio: 13,6; $\pi = 3,14$). R: *Pêso do mercúrio:* $247 - 90 = 157$ gr. *Volume do mercúrio:* $\dfrac{157}{13,6}$ c c. *Como a coluna tem 8 cm. de altura, vem:* $8\pi R^2 = \dfrac{157}{13,6}$ *donde* $R = \sqrt{\dfrac{157}{8 \times 3,14 \times 13,6}}$. *Aplicando logarítmos, vem* $R = 0,6779$ cm.

1726 — Demonstre que em qualquer triângulo rectângulo o diâmetro do círculo inscrito é igual ao excesso da soma dos catetos sôbre a hipotenusa. R: *Seja* [A B C] *com* $\hat{A} = 90^\circ$ *o triângulo dado,* E, P e D *os pontos de tangência com a hipotenusa e os catetos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *respectivamente, e* O *o centro da circunferência inscrita. Da figura:* $\overline{BE} = \overline{BP}$, $\overline{EC} = \overline{DC}$ *(tangentes tiradas do mesmo ponto). Logo,* $BP + \overline{DC} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC}$. *E como* [APOD] *é um quadrado,* $\overline{AP} + \overline{AD}$, *que é o excesso de que se fala, é igual a* $\overline{PO} + \overline{OD}$, *que é o valor do diâmetro.*

Soluções dos n.ºs 1719 a 1726 de José M. S. Arriaga e Cunha, aluno do 1.º ano do Instituto Superior de Agronomia.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras 2 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 2.

ARITMÉTICA

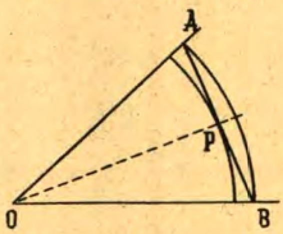
1727 — Decomposição em factores primos; propriedades e aplicações. Dada a decomposição em factores primos do número n: $n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$ estude a maneira como varia o número de divisores quando n se multiplica por q/p. R: *Representemos por* N_1 *e* N_2 *respectivamente, o número de divisores de* n *e de* $n \cdot q/p = p^{a-1} \cdot q^{b+1} \cdot r^c$. *Será portanto:* $N_1 = (a+1)(b+1)(c+1)$ *e* $N_2 = a(b+2)(c+1)$. *O número de divisores de* n *variou, em valor absoluto, de* $|N_1 - N_2| = |(c+1)(ab + a + b + 1 - ab - 2a)| = |(c+1) \cdot (b - a + 1)|$.

ÁLGEBRA

1728 — Determine os valores reais de x para os quais é real a função $y = \sqrt{(x-1)\ (x-2) \cdot (x-3)}$. R: *Os valores reais de* x *para os quais* y *é real, são os valores reais de* x *que tornem* $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$. *Estudando o sinal dêste produto para os valores:* $x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq x \leq 3$ *e* $x \geq 3$ *concluiremos que apenas satisfazem os valores* $x \gtreqless 3$ e $1 \lesseqgtr x \lesseqgtr 2$.

CÁLCULO NUMÉRICO

1729 — Calcule a área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um octógono regular de lado 18,31 metros. R: *Pela figura junta, vê-se que é:* $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi l^2/4$ *em que* $R = \overline{OA}$, $r = \overline{OP}$ *e* $l = AB$.



Portanto: $S = \pi\,(18,31)^2/4 \rightarrow \log S = 2 \log 18,31 + \log \pi + \mathrm{colog}\ 4 = 2 \cdot 1,26269 + 0,49715 + 1,39794 = 2,42047 \rightarrow S = 263,31\ m^2$.

GEOMETRIA PLANA

1730 — Dado um triângulo rectângulo de catetos b e c, localizar sôbre a hipotenusa um ponto M tal que, tirando de M perpendiculares para os catetos, o rectângulo obtido tenha área dada s. Discussão. R: *Considere-se um triângulo rectângulo em* A *e de hipotenusa* $\overline{BC}$. *Seja* M *um ponto sôbre* $\overline{BC}$, P *e* Q *os pés das perpendiculares baixadas de* M *respectivamente sôbre* $\overline{CA} = b$ *e* $\overline{AB} = c$. *Façamos* $\overline{MP} = x$, $\overline{MQ} = y$. *Será pois,* $xy = S$. *Da semelhança dos triângulos* [CPM] *e* [CAB], $b/c = (b-y)/x \rightarrow bx + cy - bc = 0$. *Da primeira equação vem* $y = s/x$ *que substituido na segunda conduz, a* $bx^2 - bcx + cS = 0$, *donde* $x = \dfrac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 4bcS}}{2b}$. *Se* $b^2c^2 - 4bcS > 0 \rightarrow$ $\rightarrow S < bc/4$ *haverá dois pontos* M *satisfazendo ao problema (duas raizes reais e distintas em* x, *por se ter a soma e o produto das raizes positivas). Se* $b^2c^2 - 4bcS = 0 \rightarrow S = bc/4$ *haverá um só ponto* M *que satisfaz ao problema. Não existem soluções quando* $b^2c^2 - 4bcS < 0 \rightarrow S > bc/4$.

Geometria no Espaço

1731 — *a)* Superfícies prismática e piramidal; definições e propriedades mais importantes.

1732 — *b)* É dada uma esfera de raio r e nela inscreve-se um cone circular recto cuja altura é dupla do diâmetro da base; calcule a área e o volume dêsse cone e a área da secção nêle produzida por um plano passando pelo centro da esfera e paralelo à base do cone. R: *Chamemos* O *o centro da esfera,* A *o vértice do cone circular recto nela inscrito, cujo diâmetro da base é* $\overline{BC}$ *e de altura* $\overline{AH} = 2\,\overline{BC}$. *Ter-se-á:* $\overline{AH} = r + \overline{OH} = 2\,\overline{BC}$ *e* $r^2 - \overline{OH}^2 = \overline{BC}^2/4$ *ou:* $r^2 - x^2 = \dfrac{r^2 + x^2 + 2rx}{16}$ *(fazendo* $\overline{OH} = x$*), donde* $17x^2 + 2rx - 15r^2 = 0 \rightarrow x = 15r/17$ *e* $x = -r$ *(solução sem interêsse). Será portanto,* $\overline{AH} = 32r/17$; $\overline{BH} = \overline{BC}/2 = 8r/17$ *e* $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = 8\sqrt{17}\cdot r/17$. *Sendo* R *o raio da base,* g *a geratriz e* h *a altura dum cone circular recto, sabemos ser:* a) *área total,*

$$S = \pi R\,(g + R) = \pi\cdot 8r/17\cdot(8\sqrt{17}r/17 + 8r/17) =$$
$$= 64\,(1 + \sqrt{17})\,\pi r^2/289\,;$$

b) *volume,* $V = 1/3\cdot\pi R^2 h = 2048\pi r^3/14\cdot 739$.

A secção produzida no cone por um plano passando pelo centro da esfera e paralelo à sua base, é uma circunferência. Estas duas circunferências são homotéticas, de razão de homotetia $\overline{AH}/\overline{AO} = 32/17$. *E assim,* $S_1/S_2 = (32/17)^2$ *sendo* S_1 *e* S_2 *respectivamente as áreas dos dois círculos, base do cone e secção plana, donde,* $S_2 = \pi r^2/16$.

Trigonometria

1733 — Exprima $\dfrac{(\cos^4\alpha - \mathrm{sen}^4\alpha)^2}{\cos^4\alpha + \mathrm{sen}^4\alpha}$ em função de $\mathrm{sen}\,2\alpha$. R: *A expressão dada pode escrever-se:*

$$\frac{(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha)^2\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha)^2}{(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha)^2 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{(1 - \mathrm{sen}^2 2\alpha)^2}{1 - \dfrac{\mathrm{sen}^2 2\alpha}{2}} = \frac{2\,(1 - \mathrm{sen}^2 2\alpha)^2}{2 - \mathrm{sen}^2 2\alpha}.$$

Soluções dos n.os 1727 a 1735 de O. Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

CONCURSO PARA ACTUÁRIO DO INSTITUTO NACIONAL DE TRABALHO

Publicam-se seguidamente os problemas saídos nas provas de matemática bem como as suas soluções.

Observa-se que nas soluções publicadas se usam apenas os conhecimentos correspondentes ao programa do concurso publicado na «Gazeta de Matemática».

I.ª prova — 24 de Março de 1944

1.º — Prove que as curvas definidas pela equação: $f(x, y) = k$, onde para cada curva k é constante, não se cruzam.

Supondo as coordenadas referidas a um sistema de eixos rectangulares e considerando:

$$f(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - 1)\,(4x^2 - 4y^2 + 1)$$

determine a curva que separa as regiões do plano para as quais $k > 0$ das regiões nas quais $k < 0$.

Indique o traçado aproximado de tal curva e, no desenho assim executado, marque por meio de sinais $+++$ e $---$ as regiões do plano para as quais respectivamente é $k > 0$ e é $k < 0$, apresentando a correspondente justificação.

Tendo em atenção o desenho executado indique a posição dos pontos em que degeneraram certos ramos das curvas para valores especiais de k completando, quando fôr necessário, a determinação da sua posição pela teoria dos máximos e mínimos aplicada a funções reais de uma variável real. Apresente a configuração aproximada de uma curva que não contenha pontos isolados à qual corresponda um valor negativo de k.

Deduza a equação diferencial a que satisfazem tôdas as curvas e verifique o resultado por integração.

Solução — Se duas das curvas $f(x,y) = k_1$ e $f(x,y) = k_2$ tivessem um ponto comum ter-se-ia: $f(x_1, y_1) = k_1$ e $f(x_1, y_1) = k_2$ donde $k_1 = k_2$ e as curvas não seriam distintas.

A curva que separa as regiões do plano para as quais $k > 0$ daquelas nas quais $k < 0$, é: $(x^2 + y^2 - 1)\,(4x^2 - 4y^2 + 1) = 0$, atendendo à continuïdade de $f(x, y)$.

Tal curva é portanto constituída por uma circun-