donde $x = \frac{bc \pm \sqrt{b^2 c^2 - 4bcS}}{2b}$. *Se* $b^2c^2 - 4bcS > 0 \to$ $\to S < bc/4$ *haverá dois pontos* M *satisfazendo ao problema (duas raizes reais e distintas em* x, *por se ter a soma e o produto das raizes positivas). Se* $b^2 c^2 - 4bcS = 0 \to S = bc/4$ *haverá um só ponto* M *que satisfaz ao problema. Não existem soluções quando* $b^2 c^2 - 4bcS < 0 \to S > bc/4$.

Geometria no Espaço

1731 — *a)* Superfícies prismática e piramidal; definições e propriedades mais importantes.

1732 — *b)* É dada uma esfera de raio r e nela inscreve-se um cone circular recto cuja altura é dupla do diâmetro da base; calcule a área e o volume dêsse cone e a área da secção nêle produzida por um plano passando pelo centro da esfera e paralelo à base do cone. R: *Chamemos* O *o centro da esfera,* A *o vértice do cone circular recto nela inscrito, cujo diâmetro da base é* $\overline{BC}$ *e de altura* $\overline{AH} = 2\,\overline{BC}$. *Ter-se-á:* $\overline{AH} = r + \overline{OH} = 2\,\overline{BC}$ *e* $r^2 - \overline{OH}^2 = \overline{BC}^2/4$ *ou:* $r^2 - x^2 = \frac{r^2 + x^2 + 2rx}{16}$ *(fazendo* $\overline{OH} = x$*), donde* $17x^2 + 2rx - 15r^2 = 0 \to x = 15r/17$ *e* $x = -r$ *(solução sem interêsse). Será portanto,* $\overline{AH} = 32r/17$; $\overline{BH} = \overline{BC}/2 = 8r/17$ *e* $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = 8\sqrt{17} \cdot r/17$. *Sendo* R *o raio da base,* g *a geratriz e* h *a altura dum cone circular recto, sabemos ser:* a) *área total,*

$$S = \pi R\,(g + R) = \pi \cdot 8r/17 \cdot (8\sqrt{17}r/17 + 8r/17) = 64\,(1 + \sqrt{17})\,\pi r^2/289\,;$$

b) *volume,* $V = 1/3 \cdot \pi R^2 h = 2048\pi r^3/14 \cdot 739$.

A secção produzida no cone por um plano passando pelo centro da esfera e paralelo à sua base, é uma circunferência. Estas duas circunferências são homotéticas, de razão de homotetia $\overline{AH}/\overline{AO} = 32/17$. *E assim,* $S_1/S_2 = (32/17)^2$ *sendo* S_1 *e* S_2 *respectivamente as áreas dos dois círculos, base do cone e secção plana, donde,* $S_2 = \pi r^2/16$.

Trigonometria

1733 — Exprima $\frac{(\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha)^2}{\cos^4\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha}$ em função de $\operatorname{sen} 2\alpha$. R: *A expressão dada pode escrever-se:*

$$\frac{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)^2\,(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)^2}{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)^2 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha)^2}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha}{2}} = \frac{2\,(1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha)^2}{2 - \operatorname{sen}^2 2\alpha}.$$

Soluções dos n.os 1727 a 1735 de O. Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

CONCURSO PARA ACTUÁRIO DO INSTITUTO NACIONAL DE TRABALHO

Publicam-se seguidamente os problemas saídos nas provas de matemática bem como as suas soluções.

Observa-se que nas soluções publicadas se usam apenas os conhecimentos correspondentes ao programa do concurso publicado na «Gazeta de Matemática».

I.ª prova — 24 de Março de 1944

1.° — Prove que as curvas definidas pela equação: $f(x, y) = k$, onde para cada curva k é constante, não se cruzam.

Supondo as coordenadas referidas a um sistema de eixos rectangulares e considerando:

$$f(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - 1)\,(4x^2 - 4y^2 + 1)$$

determine a curva que separa as regiões do plano para as quais $k > 0$ das regiões nas quais $k < 0$.

Indique o traçado aproximado de tal curva e, no desenho assim executado, marque por meio de sinais $+++$ e $---$ as regiões do plano para as quais respectivamente é $k > 0$ e é $k < 0$, apresentando a correspondente justificação.

Tendo em atenção o desenho executado indique a posição dos pontos em que degeneraram certos ramos das curvas para valores especiais de k completando, quando fôr necessário, a determinação da sua posição pela teoria dos máximos e mínimos aplicada a funções reais de uma variável real. Apresente a configuração aproximada de uma curva que não contenha pontos isolados à qual corresponda um valor negativo de k.

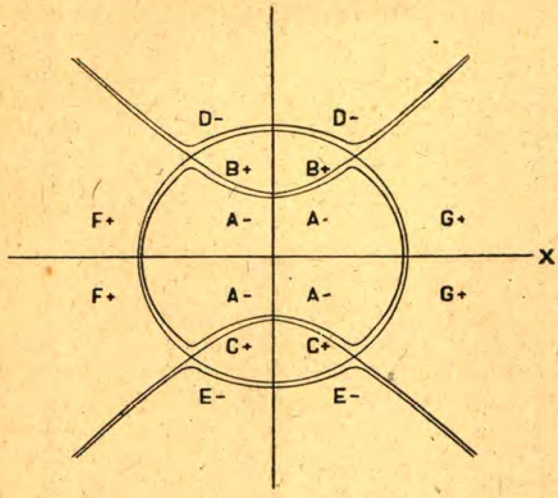
Deduza a equação diferencial a que satisfazem tôdas as curvas e verifique o resultado por integração.

Solução — Se duas das curvas $f(x, y) = k_1$ e $f(x, y) = k_2$ tivessem um ponto comum ter-se-ia: $f(x_1, y_1) = k_1$ e $f(x_1, y_1) = k_2$ donde $k_1 = k_2$ e as curvas não seriam distintas.

A curva que separa as regiões do plano para as quais $k > 0$ daquelas nas quais $k < 0$, é: $(x^2 + y^2 - 1)\,(4x^2 - 4y^2 + 1) = 0$, atendendo à continuïdade de $f(x, y)$.

Tal curva é portanto constituída por uma circunferência de centro na origem e de raio unidade e por uma hipérbole, como a figura indica.

No interior da circunferência tem-se $x^2+y^2-1<0$ e, portanto, no exterior $x^2+y^2-1>0$.



Na região do plano compreendida entre os dois ramos da hipérbole tem-se $4x^2-4y^2+1>0$ (repare-se que na origem $4x^2-4y^2+1=1$).

Da combinação dos sinais dos dois factores resulta que nas regiões A, D e E se tem $k<0$; nas regiões B, C, F e G se tem $k>0$.

Como as curvas se não cruzam, e $f(x,y)$ é uma função contínua, nas regiões B e C haverá ramos de curvas fechados no interior de cada um dos quais existirão os ramos nas mesmas condições e correspondentes aos valores de k superiores ao valor especial de k correspondente ao ramo considerado. Nestas condições haverá, atendendo ao que sucede nas regiões F e G e ao facto de uma recta paralela ao eixo dos XX' não cortar cada curva em mais de quatro pontos, dois ramos nas regiões B e C que degeneram em pontos isolados. Tais pontos estarão evidentemente situados no eixo dos YY' e a sua determinação será feita procurando os valores de y que tornam máxima a função: $k(y)\equiv f(0,y)$, o que conduz a $y_1=0$ (origem), $y_2=\sqrt{5/8}$, $y_3=-\sqrt{5/8}$.

A origem corresponde efectivamente a um mínimo e, para o estudo do caso especial correspondente a esta posição, repare-se que a configuração aproximada de uma curva a que corresponde um valor de k negativo está indicada na figura. Tôdas as curvas para as quais é $k<0$, passam por quatro máximos e quatro mínimos situados sôbre as ordenadas que correspondem aos pontos de intersecção da hipérbole com a circunferência e ainda por dois máximos e dois mínimos situados sôbre YY'.

A origem é um ponto duplo da curva que por ela passa e que corresponde a $k=-1$ e os dois ramos da curva têm neste ponto como tangente o eixos dos XX'. Isto faz supor que para valores de k inferiores a -1 as curvas situadas na região A se decompõem em dois ramos fechados separados e que portanto haverá pontos isolados sôbre o eixo dos XX' que correspondem a mínimos de k, mínimos cujo valor deverá ser inferior a -1.

Efectivamente a função $k(x)\equiv f(x,0)$ passa por mínimos para $x=\pm\sqrt{3/8}$ que, é interessante notar, corresponde à pontos situados sôbre as duas ordenadas acima indicadas e onde, para cada uma das quais, estão situados dois máximos e dois mínimos para as restantes curvas a que corresponde $k<0$. O valor mínimo de k é $-25/16$ inferior a -1 como previsto. A origem é também solução de $k'(x)=0$, fornecendo todavia um máximo, o que podia ser fàcilmente explicado.

Para se obter a equação diferencial a que satisfazem tôdas as curvas bastará derivar ambos os membros da equação $(x^2+y^2-1)(4x^2-4y^2+1)=k$ em ordem a x.

Obter-se-á: $8x^3-3x-8y^3y'+5yy'=0$.

A integração de tal equação é imediata pois que, por separação de variáveis, se tem: $(8y^3-5y)\,dy=(8x^3-3x)\,dx$. Integrando vem: $4y^4-5y^2-4x^4+3x^2=c$, isto é, $(x^2+y^2-1)(4x^2-4y^2+1)=-c-1=k$, fazendo $-c-1=k$, como se pretendia mostrar.

2.º — Escolhe-se um número real maior do que 1 ao acaso.

Convenciona-se que a probabilidade de tal número ficar compreendido entre x e $x+dx$ é $\dfrac{dx}{x^2}$.

Justifique a legitimidade de tal convenção.

Calcule a probabilidade de que, escolhendo nas mesmas condições dois números, a sua diferença seja inferior a a, e indique o seu valor limite para $a\to\infty$. Explique o resultado.

Calcule, sem o emprêgo de tabelas, com êrro inferior a uma milésima o valor numérico daquela probabilidade para $a=0,1$.

Solução: A legitimidade da convenção resulta de se ter $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=1$. Sejam x e y os dois números.

A probabilidade de que tais números fiquem compreendidos entre x e $x+dx$ e y e $y+dy$ é $dP=2\dfrac{dx}{x^2}\dfrac{dy}{x^2}$ notando-se que o factor 2 é empregado para permitir supor sempre no raciocínio que $y > x$. A probabilidade pedida será:

$$(1) \quad P(a) = 2\int_1^{\infty}\int_x^{x+a} \frac{dx}{x^2}\cdot\frac{dy}{y^2} = 1 - \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}\log(1+a).$$

Quando $a \to \infty$ tem-se $\frac{\log(1+a)}{a^2} \to 0$. Portanto $\lim_{a\to\infty} P(a) = 1$. Tal resultado é explicado pelo facto de, quaisquer que sejam os dois números, ser sempre satisfeita a condição do enunciado. Fazendo em (1) $a=0{,}1$ vem: $P = 1 - 20 + 200\log(1+0{,}1)$.

Ora $\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$ $(|a| \leq 1)$ sendo o êrro cometido, desprezando os termos da série a partir duma certa ordem, inferior ao valor absoluto do primeiro termo desprezado.

Então deverá ter-se: $200a^n/n < 10^{-3}$ ou $a^n/n < 10^{-5}/2$. Ora $a^5/5 = 10^{-5}/5 < 10^{-5}/2$ e $a^4/4 = 10^{-4}/4 = 10^{-5}/0{,}4 > > 10^{-5}/2$. Portanto há que considerar os termos do desenvolvimento até $a^4/4$.

Efectuadas as operações obtem-se $P(0,1) = 0{,}062$.

2.ª prova — 25 de Março de 1944

1.º — Sabe-se que as condições de Cauchy-Riemann a que satisfazem certas funções de variável complexa são: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$, sendo a função $\Phi(z) = = f(x,y) + ig(x,y)$. Prove que a função $\Phi(z) = e^z z^2$ satisfaz às condições enunciadas.

Solução — Tem-se:

$\Phi(z) = e^{x+iy}(x+iy)^2 = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)(x^2 - y^2 + 2ixy)$.

Portanto

$$f \equiv e^x\,[(x^2-y^2)\cos y - 2xy\,\mathrm{sen}\, y];$$
$$g \equiv e^x\,[2xy\cos y + (x^2-y^2)\,\mathrm{sen}\, y]$$

logo $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = f + e^x(2x\cos y - 2y\,\mathrm{sen}\, y)$;

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^x\,[2x\cos y - 2xy\,\mathrm{sen}\, y - 2y\,\mathrm{sen}\, y + (x^2-y^2)\cos y] =$$
$$= f + e^x(2x\cos y - 2y\,\mathrm{sen}\, y) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Anàlogamente se verificaria que: $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$.

2.º — Um ponto P é lançado ao acaso sôbre uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB} = 2r$, por forma que é igualmente provável a sua queda em qualquer arco da semi-circunferência de comprimento constante.

Pede-se: *a)* — A probabilidade de que a área do triângulo $[APB]$ seja superior a metade da área do triângulo $[AP_1B]$ a que corresponde a sua área máxima; *b)* O valor médio da área do triângulo $[APB]$.

Solução — *a)* Como os triângulos $[APB]$ têm, qualquer que seja a posição de P, a mesma base, a altura h de $[APB]$ deve ser superior, para satisfazer as condições do enunciado, a $r/2$.

Então o ângulo $A\widehat{O}P$, sendo O o centro da semi-circunferência, deve estar compreendido entre 30° e 150°. Donde o valor da probabilidade pedida $120^\circ/180^\circ = 2/3$.

b) Designando por θ o ângulo $A\widehat{O}P$ tem-se que a área do triângulo $[APB]$ é $1/2\cdot 2r\cdot h = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta$ e o valor médio S é: $S = \int_0^{\pi} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{\pi} = \frac{2r^2}{\pi}$.

3.º — Sabe-se que $y(x)$ é um polinómio do 3.º grau em x, que toma os valores y_0, y_1 e y_3 nos pontos a, $a+h$ e $a+3h$. Sabendo-se que tal polinómio passa por um ponto de inflexão para $x=a$ e por um máximo para $x=a+h$, determine y_3 expresso em y_0 e y_1.

Solução — Usando a notação das diferenças finitas tem-se $h^2D^2 \equiv \Delta^2 - \Delta^3 + \cdots$. Para o ponto de inflexão ter-se-á, como $D^2 \equiv 0$,

$$(1) \qquad \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0,$$

visto o polinómio ser do terceiro grau.

Para o máximo vem: $Dy_1 = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right)y_1 = 0$ ou $\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right)(1+\Delta)\,y_0 = 0$, isto é:

$$(2) \qquad \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6} = 0,$$

visto o polinómio ser do 3.º grau.

Substituindo em (2) o resultado dado por (1) vem:

$$(3) \qquad \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 = -3\Delta y_0$$

Ora $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$ ou, utilizando a expressão (3): $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 - 9\Delta y_0 - 3\Delta y_0 = y_0 - 9\Delta y_0 = = 10y_0 - 9y_1$.

4.º — Uma roleta R_k está dividida em k sectores numerados de modo que a probabilidade de saída de um número seja $1/k$.

Um jogador aposta num dos números consecutivamente até perder. Por cada vez, além da primeira, que ganha recebe a quantia a. Pela primeira vez que ganha nada recebe. O jogador joga nestas condições sucessivamente nas roletas $R_2, R_3 \cdots R_n$.

¿ Qual deveria ser a sua entrada para que o jôgo fôsse equitativo?

Solução — A esperança matemática correspondente à roleta R_k é: $\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots\right)a=\frac{1}{k(k-1)}a$, visto $k>1$. A entrada total será:

$$E=a\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right].$$

Para somar as $n-1$ parcelas contidas no colchete note-se que: $u_{x+1}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=(x+1)^{(-2)}$. Logo $\Delta^{-1}u_{x+1}=-\frac{1}{x+1}$ e $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{(n-1)n}=$ $=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{n-1}=\frac{n-1}{n}$. Portanto $E=a\frac{n-1}{n}$.

Carlos A. F. Carvalho

PONTOS DE EXAME DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra — **2.º Exame de freqüência, 1942-43.**

1734 — Calcular $\lim\limits_{x=1}\frac{1-\cos(1-x^2)^2}{\operatorname{sen}^2(x-1)^2}$.

1735 — Traçar aproximadamente a curva $y=\frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-5)}$ indicando os máximos, mínimos e as assíntotas (Eixos rectangulares).

1736 — Achar a equação geral dos círculos tangentes na origem das coordenadas à recta $y=x$ (Eixos rectangulares).

1737 — Existindo $f'(x)$ em (a,b), pode $f(x)$ ser máxima ou mínima num ponto onde $f'(x)$ se não anule?

1738 — Se a função $f(x)$ tem derivadas de tôdas as ordens no intervalo $(-r,r)$, que é necessário e suficiente para que a possamos desenvolver em série de Mac-Laurin? Conhece alguma condição suficiente de imediata aplicação?

1739 — Qual a equação da normal em $M(a,b)$ à curva $f(x,y)=0$? (Eixos rect.).

1740 — Que razões nos levam a considerar as assíntotas como tangentes?

1741 — Enuncie alguma condição, a verificar por $f'_x(x,y)$ ou $f'_y(x,y)$, que garanta a diferenciabilidade de $f(x,y)$ num ponto fixo $M(a,b)$.

1742 — Como desenvolver ràpidamente em série $1/(2x-3)^2$?

1743 — Conhece algum triângulo notável na parábola?

1744 — Como se justifica a relação $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$?

1745 — Por que construção geométrica se determina, na elipse, o diâmetro conjugado com uma dada direcção?

1746 — Como se obtêm as equações paramétricas da elipse?

1747 — Achar o termo geral do desenvolvimento de $f(x)=\sqrt[3]{8-x^2}$ em série de Mac-Laurin e indicar o intervalo de convergência dêsse desenvolvimento.

1748 — Calcular a distância $D(h,m)$ do ponto $M(x_0+h, f(x_0+h))$ à recta $y-f(x_0)=m(x-x_0)$ e determinar m de forma que $\left[\frac{\partial D(h,m)}{\partial h}\right]_{h=0}=0$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º Exame de freqüência, 1942-43.**

1749 — Calcular o limite de $y=\frac{e^{x^2}-\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$ para $x=0$.

R: $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\operatorname{sen} x}{4\operatorname{sen}^3 x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+\operatorname{sen} x/x}{4\operatorname{sen} x/x.\operatorname{sen}^2 x}=\infty$.

1750 — Estudar a curva $\frac{x^2}{x-1}$ (máximos e mínimos, inflexões e assíntotas). R: *Para* $x>1$ *e* $y>0$; *para* $x<1$, $y<0$. *Quando* $x\to 1$, $y\to\pm\infty$: $x=1$ *é uma assíntota. Para* $x=0$ *é* $y=0$. *Também* $\lim\limits_{x=\infty} y/x=1$ *e* $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=1$; *a recta* $y=x+1$ *é portanto outra assíntota. De* $y'=x(x-2)/(x-1)^2$ *conclui-se que a função é crescente em* $(-\infty,0)$, *decrescente em* $(0,1)$ *e* $(1,2)$ *e crescente de novo em* $(1,+\infty)$; *tem portanto um máximo para* $x=0$ *e um mínimo para* $x=2$, *respectivamente* 0 *e* 4. *De* $y''=2/(x-1)^3$ *conclui-se que para* $x<1$ *a curva volta a sua concavidade no sentido* Oy', *para* $x>1$, *no sentido* Oy, *e que tem para* $x=1$ *um ponto de inflexão impróprio. A curva é uma hipérbole.*

1751 — Achar a área da curva precedente no intervalo $(2,3)$. R: *Ponha-se* $\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+$ $+1+\frac{1}{x-1}$. *Então* $Px^2/(x-1)=x^2/2+x+\log(x-1)$

$$e\ A = \int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,dx = \frac{7}{2} + \log 2\,.$$

1752 — Achar a diferencial total de $xe^y + 2y \cos x$ no ponto $(\pi/2\,,0)$. R: *Pondo* $f(x\,,y) = xe^y + 2y \cos x$, *será* $f'_x = e^y - 2y \operatorname{sen} x$, $f'_y = xe^y + 2 \cos x$ *e* $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy$ *ou* $dx + \pi/2 \cdot dy$, *no ponto indicado.*

1753 — Conduzir pela origem uma perpendicular à recta que passa pelos pontos $(0\,,1)$ e $(2\,,0)$. (Eixos rectangulares). R: *O coeficiente angular desta recta é* $-1/2$. *A recta pedida é pois* $y = 2x$.

1754 — A que equação satisfazem as coordenadas dos pontos da curva $f(x\,,y) = 0$ onde a tangente é paralela a Oy? (Eixos quaisquer). R: *A equação* $y'_x = \infty$ *isto é a* $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ com $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ *ou a* $\frac{\partial f}{\partial x} = \infty$ con $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \infty$. *Veja-se, por exemplo,* $y^2 + \sqrt[3]{x-1} - 4 = 0$.

1755 — Como se dispõem os diâmetros da parábola? R: *São perpendiculares à directriz.*

1756 — Que representa cada uma das equações $x^2 - 2x + y^2 = 0$ e $x^2 - y^2 = 3$ *a)* em eixos rectangulares; *b)* em eixos oblíquos? R: No plano: *A 1.ª representa* a) *uma circunferência,* b) *uma elipse; a 2.ª representa sempre uma hipérbole.* No espaço: *Representam superfícies cilíndricas de geratrizes paralelas a* zz' *cujas directrizes em* xOy *têm por equações, nêsse plano, as equações dadas.*

1757 — Conhece alguma interpretação geométrica da função primitiva duma função contínua? R: *Seja* $Pf(x) = F(x)$. *Se em* $(a\,,b)$ $f(x) > 0$, *e se além disso* $F(a) = 0$, *então* $F(b)$ *é a área limitada pela curva* $y = f(x)$, *o eixo dos* xx *e as perpendiculares a êste eixo nos pontos de abcissa* a *e* b *(eixos rectangulares).*

1758 — Qual é a definição geral de cónica a partir dos conceitos de foco e directriz? R: *Uma cónica é o lugar geométrico das posições dum ponto que se move num plano por forma que a razão das distâncias dêsse ponto a um ponto dado (foco) e a uma recta dada (directriz) se mantém constante durante o movimento.*

1759 — Com que proposição se legitima o desenvolvimento de $\operatorname{sen} x$ em série, dispensando a discussão do resto da fórmula de Mac-Laurin? R: *São desenvolvíveis em série no intervalo* $(a-k\,,a+k)$ *tôdas as funções* $f(x)$ *tais que, qualquer que seja* x *nêsse intervalo e qualquer que seja* n *se tenha um número* M, *independente de ambos, para o qual* $|f^{(n)}(x)| \leq M$.

1760 — Que fórmula permite calcular (com qualquer aproximação prefixa) o valor de $\log 6$, conhecido que seja o valor de $\log 5$? R: *A fórmula*

$$\log q = \log q + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{q-p}{p+q}\right)^{2n+1}$$

ou, nêste caso,

$$\log 6 = \log 5 + \frac{2}{11} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{121^n}\,.$$

1761 — Seja C uma curva plana fechada (uma elipse, por exemplo). Que se entende por área da curva C? R: *Considere-se o plano da curva decomposto em rectângulos não sobrepostos por dois sistemas de rectas. Variando a decomposição, podem obter-se rectângulos constituídos exclusivamente por pontos do interior da curva. A soma das áreas dêsses rectângulos é variável com a decomposição; o conjunto dos seus valores para tôdas as decomposições possíveis é, porém, limitado superiormente. A área da curva é o limite superior dêsse conjunto.*

1762 — Calcular, para $x = 1$, a 2.ª derivada da função y de x definida implìcitamente, em tôrno do valor $x = 1$, pela equação $3x^2 - y^3 x + 5 = 0$. R: *Tem-se* $y'_x = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = 2/y^2 - y/3x$, *que toma para* $x = 1$ *e* $y = 2$ *o valor* $-1/6$. *Agora* $y''_{x^2} = -4y'/y^3 - 1/3\,(y'/x - y/x^2)$ *que para* $x = 1$ *toma o valor* $29/36$.

1763 — Achar a envolvente da família de curvas $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 - 1 = 0$. R: *Ponha-se* $f(x\,,y\,,\alpha) = (x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 - 1$; *será* $f'_\alpha = -2(x-\alpha) - 2(y-\alpha)$. *Pondo* $f'_\alpha = 0$ *tem-se* $(y-\alpha)^2 = (x-\alpha)^2$ *e* $\alpha = \frac{x+y}{2}$. *A eliminação de* α *dá* $\left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ *ou* $y = x \pm \sqrt{2}$. *A equação dada representa a família das circunferências com centro em* $y = x$ *e raio* 1; *a equação da envolvente mostra que esta é constituída pelas duas tangentes comuns às infinitas circunferências, como se podia esperar.*

Solução dos n.os 1749 a 1763 de G. Ramos de Castro

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de freqüência, 1942-43.**

1764 — Estudar a curva $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$ (máximos e mínimos, inflexões e assíntotas).

1765 — Área da curva anterior no intervalo $(0\,,\pi)$.

1766 — Que valor tem no ponto $x = \infty$ a função que nos mais pontos é igual a $(1 + x^2)^{1/x}$?

1767 — Que curva representam as equações $x = a \cos u$ e $y = b \operatorname{sen} u$ e que significa u geomètricamente?

1768 — Tomando OX como eixo polar e O como polo, escreva em coordenadas polares a equação da recta que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(1,0)$.

1769 — Que é parâmetro duma parábola?

1770 — De quantos modos se pode transformar $f(x+h, y+h)-f(x, y)$ pelo teorema dos acréscimos finitos?

1771 — Têm as funções contínuas primitivas? Justifique a resposta.

1772 — Como pode obter o desenvolvimento em série de $\dfrac{x^2}{1+x}$?

1773 — Que representa a equação $2x^2-3y^2=4$ em coordenadas oblíquas? Que são os eixos coordenados para a curva?

1774 — Como se levanta uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$?

1775 — Em que consiste o teorema de Euler para as funções homogéneas?

1776 — Pode uma função contínua $y=f(x)$ ter máximos e mínimos onde não admite derivada? Porquê?

1777 — Seja P o ponto em que a tangente em $M(x, y)$ à curva $y=f(x)$ encontra o eixo dos XX. Calcular o comprimento do segmento MP, supondo os eixos ortogonais.

1778 — Considerando na curva $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$ negativas as áreas das arcadas de ordenada negativa, calcule o limite para $n=\infty$ da área da curva no intervalo $(0, n\pi)$.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de freqüência — Ponto n.º 1.

1779 — Determinar a, b e c, de modo que a equação $x^3-ax^2+bx+c=0$ admita por raizes a, b e c. R: *As fórmulas de Newton, conduzem a:* $a+b+c=a$, $ab+ac+bc=b$ *e* $abc=-c$.
O sistema admite as duas soluções: 1) $a=c=1$, $b=-1$ *e* 2) $b=c=0$, a *qualquer. A equação proposta revestirá, respectivamente, as formas* $x^3-x^2-x+1=0$, *e* $x^3-ax^2=0$.

1780 — Determinar: *a)* $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{du}{dx}$ sendo $u=x^2+y^2$ e $y=\operatorname{tg} x$. *b)* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}$ sendo $V=f(x, y, z)$ e $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $z=t$. R: a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ *e* $\dfrac{du}{dx}=2x+2y\sec^2 x$.

b) $\dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$ *e* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\cos\theta+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\operatorname{sen}\theta$.

1781 — Considere-se um conjunto de planos paralelos equìdistantes, em que é 3 a distância de 2 planos consecutivos. Sabendo que um dêsses planos, passa pelo ponto $P(1, 2, -1)$ e é perpendicular à recta $x=y=2z$, determinar a equação dêsse conjunto de planos. R: *Um plano genérico desta família, dista em valor absoluto,* 3k *(*k *é variável inteira), do plano indicado no enunciado. A equação dêste plano é pois:*
(1) $x-1+y-2+1/2\,.\,(z+1)=0$ *ou* $2x+2y+z-5=0$.
A equação da família de planos paralelos a êste, será: $2x+2y+z+\lambda=0$. *Desta família de planos interessam-nos só aquêles que distam, em valor absoluto, do plano* (1) 3k *ou seja aquêles planos para os quais se tem* $3k=(5+\lambda)/\sqrt{9}$ *donde* $\lambda=9k-5$; *a equação da família considerada no problema será pois* $2x+2y+z+9k-5=0$.

1782 — Determinar a e b de modo que a função $y=(a+bx)e^{a+bx}$ admita um mínimo no ponto de abcissa $x=a-3b$ e um ponto de inflexão para $x=a-4b$. Estudar e representar gràficamente a função nêsse caso. Calcular o seu desenvolvimento em série de potências. R: *Tem-se* $y'=(a+1+bx)\,be^{a+bx}$ *e* $y'=0$ *para* $x=-(a+1)/b$ *com* $b\neq 0$ *(o caso* $b=0$ *não apresenta interêsse, por reduzir* y *a constante). A êste valor de* x *corresponde um mínimo por tornar* $y''>0$ *como é fácil verificar.* $y''=(a+2+bx)\cdot b^2 e^{a+bx}\to y''=0$ *para* $x=-(a+2)/b$, *que é a abcissa dum ponto de inflexão por tornar* $y'''\neq 0$.

O problema impõe que seja: $-(a+1)\,b=a-3b$ *e* $-(a+2)/b=a-4b$, *donde* $b=\pm 1$. *A solução* $b=-1$ *conduz a um absurdo e quando* $b=1$ *vem* $a=1$. *A função a estudar é pois* $y=(1+x)\,e^{1+x}$ *com um mínimo no ponto* $(-2, -1/2)$ *e um ponto de inflexão* $(-3, -2/e^2)$. *A função é contínua em todo o domínio da variável* x *real. A curva passa pelos pontos* $(0, e)$ *e* $(-1, 0)$ *sôbre os eixos coordenados. Tem-se:* $y'=(2+x)e^{1+x}$ *e* $y''=(3+x)e^{1+x}$, *portanto* y *é crescente para* $x>-2$, *decrescente para* $x<-2$; *concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas para* $x<-3$ *e concavidade no sentido das ordenadas negativas para* $x<-3$. *Para* $x\to+\infty, y\to+\infty$; *para* $x\to-\infty$, *levantando a indeterminação do tipo* $0\times\infty$, *conclue-se que* $y\to 0$, *sendo portanto o eixo dos* xx, *uma assíntota da curva. O desenvolvimento em série da função é imediato, multiplicando por* $1+x$, *o desenvolvimento em série de* e^z *com* $z=1+x$; *portanto,*

$$y=(1+x)\,e^{1+x}=1+x+(1+x)^2+\frac{(1+x)^3}{2!}+\cdots+\frac{(1+x)^n}{(n+1)!}+\cdots$$

Soluções dos n.os 1779 a 1782 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. C. E. F. — 2.ª prova de freqüência Ordinária — 16-6-943 — 1.ª Cadeira.—(Exame teórico).

1783 — Relações entre os conceitos de monotonicidade, continuïdade e derivada.

1784 — Estudar a função $y=\operatorname{tg} x+1/\operatorname{tg} x$ é representá-la geomètricamente no intervalo $(0, 2\pi)$.

Estudar a sua inversão.

Indicar aqueles intervalos parciais em que:

a) — Se lhe pode aplicar o teorema dos valores compreendidos; *b)* — Se lhe pode aplicar o teorema de Rolle. — Justificações.

CÁLCULO INFINITESIMAL - ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **2.º exame de freqüência, 1942-43** — 2.ª chamada.

1785 — Integrar a equação $x^2 y' + 2x^2(3x-1)y + x^3 y^2 - 6x^2 + x + 1 = 0$, sabendo que $y = 1/x$ é um integral particular. Determinar a normal no ponto $(1, -5)$ da linha integral que passa por êste ponto. R: *Trata-se de uma equação de Riccati. Pondo* $y = 1/z + 1/x$, *obtem-se a equação tinear* $z' - 6xz = x$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é* $z = C_1 e^{3x^2}$; *variando a constante obtém-se* $z = \frac{6Ce^{3x^2}-1}{6}$, *ou, finalmente,* $y = \frac{6}{6Ce^{3x^2}-1} + \frac{1}{x}\cdot$ *Como* $y'_{(1,-5)} = -1$, *a equação da normal pedida é* $Y + 5 = X - 1$.

1786 — Integrar o sistema $\begin{cases} y' - y - 5z = 0 \\ z' + y + z = 4\cos 2x, \end{cases}$ e determinar o raio de curvatura, na origem, da linha integral que passa por êste ponto. R: *Usando o símbolo* D *fica* $\begin{cases} (D-1)y - 5z = 0 \\ y + (D+1)z = 4\cos 2x; \end{cases}$ *eliminando* z, *vem* $(D^2+4)y = 20\cos 2x$, *cujo integral geral é* $y = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + 5x \operatorname{sen} 2x$; *e, portanto,*

$$z = \frac{2C_2 - C_1}{5}\cos 2x - \frac{2C_1 - C_2}{5}\operatorname{sen} 2x + x(2\cos 2x - \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} 2x.$$

Como $\begin{cases} y'_0 = 0 \\ z'_0 = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} y''_0 = 20 \\ z''_0 = -4 \end{cases}$, *vem* $s' = \sqrt{17}$, $A = -80$, $B = 4$, $C = 20$; *então* $R = \frac{17\sqrt{17}}{\sqrt{6816}}\cdot$

1787 — Calcular $\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2x^2+y^2}}\cdot$ O domínio D é limitado pela linha $\rho = 1 + \cos\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ e pelos eixos coordenados. R: *Tem-se, em coordenadas polares* $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$,

$$I = \iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2x^2+y^2}} = \iint_D \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}\,d\theta \int_0^{1+\cos\theta} d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}\,d\theta = \log\frac{e^{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}-1}\cdot$$

1788 — Sôbre a normal principal em M da linha $x = \frac{\cos 2z}{2}$, $y = \frac{\operatorname{sen} 2z}{2}$, marcar no sentido de $\vec{n}$, um segmento $\overline{MP}$ de comprimento R. Determinar o plano osculador em P da linha lugar dêstes pontos. R: *A linha dada é uma hélice circular, portanto* R *e* T *são constantes. Em notação vectorial teremos* $\bar{P} = \bar{M} + R\bar{n}$; *e a equação do plano osculador em* P *é* $\overline{Q-P} \,\Big|\, \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2} = 0$. *Atendendo às fórmulas de Frenet, temos*

$$\frac{d\bar{P}}{ds} = -\frac{R}{T}\bar{b}, \quad \frac{d^2P}{ds^2} = -\frac{R}{T}\bar{n}; \text{ donde } \frac{d\bar{P}}{ds} \wedge \frac{d^2\bar{P}}{ds^2} = -\frac{R^2}{T^3}\bar{t}.$$

A equação do plano osculador em P *é, então,* $\overline{Q-P} \mid \bar{t} = 0$; *trata-se de um plano paralelo ao plano normal em* M *à linha dada.*

Soluções dos n.os 1785 a 1788 de A. Pereira Gomes

I. S. T. — Cálculo — **2.º exame de freqüência — 1943**

1789 — Dado o vector $\alpha = a_1 I + a_2 J + a_3 K$, sendo $\begin{cases} a_1 = xyz \\ a_2 = xy + yz \\ a_3 = x + y + z; \end{cases}$ e a esfera de raio 1 e de centro na origem; verificar, para êsse vector e para êsse domínio, o teorema da divergência. Verificar, para um dos hemisférios, o teorema de Stokes.

1790 — Calcular a área do segmento do paraboloide $z = x^2/6 + y^2/10$ que é interior ao cilindro $x^2/9 + y^2/25 = 1$.

1791 — Integrar a equação $x(1-1^3)\,dy/dx = x^2 + y - 2xy^2$.

1792 — A equação diferencial

$$a^2 yp^2 - 4xp + y = 0 \qquad (p = y')$$

admitirá as rectas $2x = \pm ay$ como soluções singulares?

I. S. T. — Cálculo — **2.º exame de freqüência — 1943**

1793 — Dada um vector α, função dum ponto variável $P(x, y, z)$, discutir a equação $\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\alpha$ sendo $f(P)$ uma incógnita escalar. Inversamente, dada a função escalar $f(P)$, discutir a mesma equação em relação à incógnita α. As funções $f(P)$ e $\alpha(P)$ podem ser ambas harmónicas?

1794 — Uma curva torsa projecta-se no plano xy segundo a senusoide $y = \operatorname{sen} x$. Determinar a segunda equação da curva, $z = z(x)$, de modo tal que as normais principais sejam paralelas ao plano yz.

1795 — Integrar a equação

$$y(1+p^2)^{1/2} = n(x + yp) \qquad (p = y')$$

1796 — Achar a equação diferencial das curvas planas cuja raio de curvatura é igual a n vezes o segmento da normal; e mostrar que ela é sempre integrável quando n é inteiro.

F. C. P. — Análise Superior — 2.º Exame de freqüência, 1942-43.

1797 — Decompor em fracções simples, segundo o teorema de Mittag-Leffler a função $\frac{1}{e^z-1}$. R: *Os polos da função são:* $0, 2i\pi, 4i\pi, \cdots 2ki\pi, \cdots$ *cujos resíduos respectivos são todos iguais a* 1. $\lim_{z=2ki\pi} e^{-z}=1$. *Teremos:*

$$\frac{1}{e^z-1}=P(z)+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z\pm 2k\,i\pi}+P_{kr}\right].$$

Como a série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\,i\pi}\right)^2$ *é convergente será* $r=1$ *e portanto:*

$$\frac{1}{e^z-1}=P(z)+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-2k\,i\pi}+\frac{1}{z+2k\,i\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2ki\pi}-\frac{1}{2ki\pi}\right\}=P(z)+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4k^2\pi^2}.$$

1798 — Calcular $\iiint_V x^2\,y^2\,dx\,dy\,dz$. O volume é limitado pela superfície $4x^2+y^4+\frac{z^4}{16}=1$. R: *Teremos*

$$I=\iiint_V x^2y^2\,dx\,dy\,dz=\frac{2\cdot(1/2)^3}{32}\,\frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/2+1+1)}.$$

Ora $\Gamma(3/2)=1/2.\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)=\pi\sqrt{2}$, $\Gamma(3/2+1+1)=15/8.\sqrt{\pi}$. *Portanto:*

$$I=\frac{1}{128}\,\frac{1/2.\sqrt{2}\pi\pi}{15/8.\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{480}\pi.$$

1799 — Calcular $A=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^3-7x-6}}$ em função de I_0, I_1 e J_1.

R: $A=\frac{\sqrt{x^3-7x-6}}{12(x-1)}-\frac{1}{6}J_1-\frac{1}{24}(I_1-I_0)$.

1800 — Calcular $\int_0^i\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ seguindo o caminho seguinte: de 0 a $2-2i$, $y+x=0$; de $2-2i$ a $2+i$, $x-2=0$; de $2+i$ a i, $y-1=0$.

R: $I=\pi-i\int^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\pi+i\log(\sqrt{2}-1)$.

Soluções dos n.os 1797 a 1800 de Jayme Rios de Sousa

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta»

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1554 — Resolver a equação biquadrada:

$$\left[x^2+\sqrt{x}+2x(1+\sqrt{x})\right]\cdot\left[x^2+\sqrt{x}(2x-1)\right]=159600.$$

R: *O 1.º membro da equação proposta pode escrever-se sucessivamente:* $[x^2+\sqrt{x}+2x+2x\sqrt{x}]\,[x^2+2x\sqrt{x}-\sqrt{x}]=[x^2+2x\sqrt{x}+x+x+\sqrt{x}]\,[x^2+2x\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}]=[(x+\sqrt{x})^2+(x+\sqrt{x})]\,[(x+\sqrt{x})^2-(x+\sqrt{x})]=(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2$. *A equação proposta pode pois escrever-se:* $(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2-159600=0$, *donde*

$$x+\sqrt{x}=\pm\sqrt{\frac{1\pm 799}{2}}=\begin{cases}\pm 20\\ \pm\sqrt{-399}\end{cases};$$

De $x+\sqrt{x}=20$ *vem* $\sqrt{x}=4$ e $\sqrt{x}=-5$; *De* $x+\sqrt{x}=-20$ *vem* $\sqrt{x}=\frac{1-i\sqrt{79}}{2}$ *e* $\sqrt{x}=\frac{-1-i\sqrt{79}}{2}$; *De* $x+\sqrt{x}=\sqrt{-399}$ *vem* $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{-399}}}{2}$ *e* $\sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{-399}}}{2}$;

De $x+\sqrt{x}=-\sqrt{399}$ *vem* $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1-4\sqrt{-399}}}{2}$ e $\sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{1-4\sqrt{-399}}}{2}$.

Solução de Paul Richard (de Portalegre)

1704 — Num circulo de centro O, marque-se sôbre o raio $\overline{OA}$, um ponto C; encontrar sôbre a circunferência um ponto P tal que o ângulo $\widehat{OPC}$ seja máximo. R: *Da relação* $\operatorname{sen} O\hat{P}C=\overline{OC}/\overline{OA}.\operatorname{sen} O\hat{C}P$ *conclui-se que* $\operatorname{sen} O\hat{P}C$ *é máximo para* $O\hat{C}P=\pi/2$. *Ora o ângulo* $O\hat{P}C$, *sendo evidentemente compreendido entre* 0 *e* $\pi/2$, *é máximo ao mesmo tempo que o seu seno.*

Logo, o ponto P *procurado é qualquer das extremidades da corda tirada por* C *perpendicular a* OA.

Soluções de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Adelino da Silva Vieira (de Almada); António A. Guimarães (do Pôrto); António B. Lopes (de Leiria); Edmundo Pedro (de S. Tiago, Cabo Verde); F. Roldão Dias Agudo (de Lisboa); Miguel de Almeida (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

1705 — Demonstrar que se num triângulo, os três ângulos $A, B, C,$ são respectivamente proporcionais aos números 2, 3, 4, tem-se : $\cos A/2=(a+c)/2b$.

R : *Tem-se :* $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}\therefore\dfrac{a+c}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} C}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$ ou $(a+c)/2b=\dfrac{\operatorname{sen}(A+C)/2.\cos(A-C)/2}{\operatorname{sen} B}$ mas, por hipótese: $A/2=B/3=C/4\therefore\dfrac{A+C}{2}=B$ e $\dfrac{A-C}{2}=-\dfrac{A}{2}$, donde $(a+c)\,2b=\cos\left(-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\dfrac{A}{2}$.

Solução de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

Enviaram também soluções correctas : Adelino da Silva Vieira (de Almada); Alberto Paes (de Lisboa); Angel Chain Garcia (Gijon-Espanha); António A. Guimarãis (do Porto); António B. Lopes (de Leiria); F. Roldão Dias Agudo (de Lisboa); Paul Richard (de Portalegre); T. Ferreira Rato (S. Tiago-Cabo Verde).

1706 — Sabendo-se que o número $13xy45z$ é divisível por 792, achar os três algarismos x, y, z. R: *Por ser* $792=\dot{8}$, *será* $13xy45z=\dot{8}$ *e também* $45z=\dot{8}$ *ou* $4\times 4+2\times 5+z=\dot{8}$ *donde se conclui que* $z=6$. *Por ser* $792=\dot{99}$, *será* $13xy456=\dot{99}$ *ou* $56+y4+3x+1=\dot{99}$, *ou* $56+y4+3x+1=\dot{99}$, *isto é, a soma das classes de dois algarismos em que o número se pode decompor, a partir da direita, é múltipla de 99. A simples inspecção mostra que esta soma não pode atingir* $2\times 99=198$, *portanto será* $56+y4+3x+1=99$ *donde se conclui que* $x=8$ *e* $y=0$.

Solução de J. Caeiro Murteira (de Perolivas).

Enviaram também soluções correctas : A da Silva Vieira (de Almada); Alberto Paes (de Lisboa); Angel Chain Garcia (Gijon-Espanha); António A. Guimarãis (do Porto); F. R. Dias Agudo (de Lisboa); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); Paul Richard (de Portalegre); T. Ferreira Rato (de S. Tiago —Cabo Verde).

1707 — Três operários executam em certo prazo uma obra que, dividida igualmente pelos três, tomaria o mesmo tempo a um dêles, menos dois dias a outro e mais três ao terceiro. De quantos dias é o prazo? R : *O problema resolve-se mentalmente. É evidente que o trabalho executado pelo terceiro operário em 3 dias, seria executado pelo segundo em 2. Reconhece-se então que os tempos (expressos em dias) que estes dois operários gastam para executar o seu quinhão da obra, estão na razão de* $3/2$ *e a sua diferença é* 5 ; *serão nesse caso, os produtos* $3\times 5=15$ *e* $2\times 5=10$. *Será portanto de* $15-3$ *ou* $10+2$, *isto é, de 12 dias o prazo que se procura.*

Solução de J. Caeiro Murteira (de Perolivas).

Enviaram também soluções correctas: A. da Silva Vieira (de Almada); Alberto Paes (de Lisboa); A. Bernardino Lopes, (de Leiria); F. R. Dias Agudo (de Lisboa); P. Richard (de Portalegre); T. Ferreira Rato (de S. Tiago-Cabo Verde).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

32—FERREIRA NEVES, Francisco—**Elementos de Geometria** para o I, II e III anos dos liceus. 4.ª edição. 1942. Livraria Sá da Costa — Editora. Lisboa. Preço 12$50.

O livro Elementos de Geometria escrito em linguagem clara e acessível tem muito bom aspecto gráfico e é de fácil leitura. Definições e enunciados dos teoremas são correctos. Todo o livro é escrito com o intuito de observar o programa e as suas instruções, como convém a livro que se destina ao ensino liceal, e necessàriamente segue as normas legais fazendo por isso mais verificações do que demonstrações.

O capítulo IV sôbre posição relativa de duas rectas no plano é tratado dum modo francamente experimental, dando indicações e apresentando desenhos das experiências que mostram o paralelismo e a perpendicularidade de rectas. No entanto, e contra as observações do programa, dá algumas demonstrações dedutivas logo a partir do 1.º ano, e não a partir do 3.º, por exemplo no caso da igualdade de triângulos, em que o assunto podia ser tratado por uma forma experimental. No fim de cada capítulo apresenta o autor exercícios de aplicação e revisão bem graduados e nos moldes dos saídos em exames liceais.

J. da Silva Paulo

33-PALMA FERNANDES, António do Nascimento, **Exercícios de Geometria e Álgebra,** para o 4.º ano, 2.ª edição melhorada. Livraria Cruz, Braga, 1943. Preço 8$00,

Êste livro de exercícios tem no início de cada capítulo um breve resumo de matéria teórica, seguido de exercícios com a resolução completa, e do mesmo