académico, Rey Pastor fundó en Madrid la Revista Matemática Hispano Americana y el Seminario Matemático, y en él, rodeado de selectos discipulos y colaboradores, puede decirse que se incia un nuevo periodo de la Matemática española. Al cabo de algunos años las contribuciones de Rey Pastor y su escuela son estimadas en Europa y aparecen publicadas en las más importantes revistas: «Acta Mathematica», «Mathematische Annalen», «Ergebnisse del Coloquio de Viena», «Abhandlungen de Hamburgo», «Rendiconti di Palermo», «Memorias de la Academia de Italia», 'Mathematische Zeitschrift', 'Duke Mathematical', etc.

Expuesto esto, resulta superfluo reseñar una vez más todos los elogios que matemáticos extranjeros han hecho repetidas veces del maestro.

No es nuestra finalidad, ya que ello requería un espacio muy superior al que nos hemos señalado, hacer un análisis de las obras y trabajos de Rey Pastor. Una reseña de los mismos puede leerse en la interesante monografía de Loria «Le matematiche in Spagna e in Argentina», publicada en la Revista de la Unión Matemática Argentina (1938). Refiriendose a la producción matemática española, dice Loria en dicho artículo: «En ella el puesto de honor corresponde por derecho a Rey Pastor, cuya maravillosa producción científica abarca todos los campos de la Matemática; se encuentran, en efecto, trabajos relativos a las siguientes ramas: Aritmética elemental y teoría de números, Algebra clásica y moderna, Análisis algebraico e infinitesimal, Teoría de series e integrales, Teoría general de funciones y funciones especiales, Cálculo de diferencias finitas, Representación conforme, Teoría de conjuntos, Geometría del triangulo, Geometría proyectiva, Geometria no euclídea, Topología, Probabilidades, Espacios abstractos, Física matemática, Filosofía e Historia».

La influencia de Rey Pastor en el desarrollo de la Matemática en Hispano América es aun mayor, si cabe, que en España. Sus cursos de la Universidad, de la Facultad de Ingeniería, la fundación de Seminarios de Investigación, de revistas (Boletín del Seminario Matemático argentino, Revista de la Unión Matemática Argentina, etc.), la pléyade de discípulos y sus notables publicaciones que tan alto han puesto el nombre de España en Hispano-América, evidencian que nunca con mayor oportunidad y motivos se habrá hecho un homenaje como el que ahora recibe de sus colegas y discípulos el gran matemático español.

Una nueva demostracion de los teoremas de Legendre y Lexell

*por **José Gallego Diaz** (professor da Universidade de Madrid)*

La demostracion clásica del teorema de Legendre, relativo a los triángulos esféricos cuyos lados son muy pequeños con relacion a la esfera, exige, como es bien sabido, cálculos artificiosos y largos. Nos proponemos aquí dar una demostracion geométrica, sencilla, mediante la proyeccion estereográfica, que creemos no está desprovista de interés didáctico. Tiene, además, la ventaja de hacer patente el valor del exceso de un triángulo esférico cualquiera, pudiéndose, pues, determinar con sencillez su área. Finalmente, damos otra aplicacion del método, demostrando, de manera inmediata, el teorema de Lexell.

Sea el triángulo esférico ABC (fig. 1) y $OB'C'$ su proyeccion estereográfica sobre el plano del ecuador. Sean $B't$ y $C't$ las tangentes en B' y C' al arco $B'C'$ proyeccion estereográfica del BC. Se cumple: $\widehat{OB't}=\hat{B}$, $\widehat{OC't}=\hat{C}$. Llamando x al ángulo $C\,B'\,t=B'\,C'\,t$, resulta, en el triángulo rectilineo $OB'C'$: $B-x+C-x+A=\pi$, $2x=A+B+C-\pi=2E$ luego $x=E$; es decir que el ángulo que forma la cuerda $B'C'$ con la tangente en uno cualquiera de los extremos es igual al semi-exceso esférico del triángulo ABC. Haciendo: $\widehat{OB'C'}=\hat{B}_1$, $\widehat{OC'B'}=\hat{C}_1$, $\widehat{B'OC'}=\hat{A}_1$ podemos escribir: $\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{E}$, $\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{E}$,

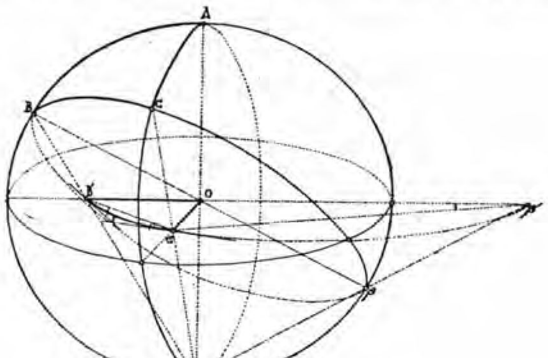

Fig. 1

$\hat{A}=\hat{A}_1$ y, si efectuamos una permutacion circular o, lo que es análogo, proyectásemos estereográficamente desde los puntos diametralmente opuestos a los B y C, resultaria, con notacion semejante: $\hat{B}=\hat{B}_2$, $\hat{C}=\hat{C}_2+\hat{E}$; $\hat{A}=\hat{A}_2+\hat{E}$; $\hat{C}=\hat{C}_3$, $\hat{B}=\hat{B}_3+\hat{E}$, $\hat{A}=\hat{A}_3+\hat{E}$, es decir: $3\hat{A}=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+2\hat{E}$, $3\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2+\hat{B}_3+2\hat{E}$, $3\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{C}_3+2\hat{E}$. Pero $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ son los ángulos del triángulo cuyos lados valen $B'C'=\dfrac{R \operatorname{sen} a/2}{\cos b/2 \cdot \cos c/2}$, $OB'=R\cdot \operatorname{tg} c/2$, $OC'=R\cdot \operatorname{tg} b/2$ segun fórmulas conocidas de Trigonometria, siendo a, b, c los lados del triángulo esférico ABC; luego, si a, b, c, son muy pequeños con relación a R, podemos tomar como equivalentes a sus arcos las lineas trigonométricas seno y tangente, con lo cual, en el limite, los lados del triángulo se podrán reemplazar por: $Ra/2$, $Rb/2$, $Rc/2$; los ángulos: A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3; tenderán, respectivamente, a los ángulos del triángulo cuyos lados son $Ra/2$, $Rb/2$, $Rc/2$ o a los de su semejante cuyos lados valgan: Ra, Rb, Rc, y si a estos ángulos los llamamos, respectivamente: α', β', γ', resultará $A=\alpha'+2E/3$, $B=\beta'+2E/3$, $C=\gamma'+2E/3$; que era lo que queriamos demonstrar.

Para la demostracion del teorema de Lexell, observemos en la fig. 1 que si es β' la proyección estereográfica de β y siendo β el punto diametralmente opuesto al B, el angulo $B'\beta'C'$ es igual al $B'C't$ y por tanto igual a E.

Ahora, sean A y B dos puntos de la esfera (fig. 2) y llamemos α y β a los diametralmente opuestos a ellos. Sea M un punto genérico del circulo menor de diâmetro $\alpha\beta$ y cuyo plano es perpendicular a AOB. El triángulo esférico ABM se proyecta estereográficamente en el mixtilineo $OB'M'$. La proyeccion

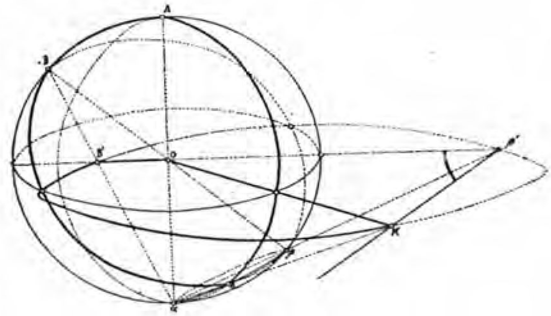

Fig. 2

estereográfica del circulo menor $\alpha M\beta$ será la recta $\beta'M'$ y la constancia del ángulo $O\beta'M'$ — cuando M describe el circulo menor considerado — nos prueba que el área del triángulo esférico ABM es constante. Y, reciprocamente, dado el lado AB; si el triangulo ABM ha de ser de área constante, el ángulo $O\beta'M'=E$ debe ser fijo y para ello, el lugar geométrico de M debe ser un circulo menor que pase por α y β.

A IDÉIA DE DIMENSÃO

por **Benno Eckmann**

(Encarregado de curso na Faculdade de Ciências e na Escola de Engenharia da Universidade de Lausanne e *privat dozent* na Escola Politécnica Federal de Zürich)

Lição inaugural proferida em 1943, Fevereiro, 5 e publicada na *Revue de Théologie et de Philosophie*, n.º 127, Abril-Junho de 1943

(Continuação do número anterior)

5. Tudo isto não nos impede, naturalmente, a nós matemáticos, de fa ar do espaço a quatro dimensões ou mais, considerado ùnicamente como sistema lógico, e de examinar as suas propriedades. Conserva-se a mesma linguagem geométrica e fala-se de pontos, de rectas, de planos, de ângulos, etc., se bem que, em geral, estas coisas não possam ser postas em correspondência com os objectos do espaço real! Todavia, esta construção é muito importante e eficaz pelas razões seguintes:

Permite ao matemático a tradução em linguagem geométrica de factos e problemas analíticos ou algébricos, o que simplifica, por vezes grandemente, a resolução e sugere métodos e resultados; quasi se pode dizer que, ao praticar esta geometria, se alcança uma certa intuição do espaço a n dimensões — não sei se é a grande analogia com o espaço a três dimensões (que, naturalmente, pode também enganar-nos!) ou, muito simplesmente, o hábito de pensar nestas coisas.

Mais importante ainda é a aplicação seguinte: quer no mundo da experiência e da intuição, quer na física, quer ainda nos diferentes ramos das matemáticas, há objectos e fenómenos relativamente aos quais é vantajoso tomar o espaço a n dimensões como *esquema*, no sentido de que êles podem descrever-se por n números reais variando independentemente, como as coordenadas no espaço a n dimensões. Êste diz-se então, *um contínuo a* n *dimensões ou a* n *graus de liberdade*.