resultaria, con notacion semejante: $\hat{B}=\hat{B}_2$, $\hat{C}=\hat{C}_2+\hat{E}$; $\hat{A}=\hat{A}_2+\hat{E}$; $\hat{C}=\hat{C}_3$, $\hat{B}=\hat{B}_3+\hat{E}$, $\hat{A}=\hat{A}_3+\hat{E}$, es decir: $3\hat{A}=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+2\hat{E}$, $3\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2+\hat{B}_3+2\hat{E}$, $3\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{C}_3+2\hat{E}$. Pero $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ son los ángulos del triángulo cuyos lados valen $B'C'=\dfrac{R \operatorname{sen} a/2}{\cos b/2 \cdot \cos c/2}$, $OB'=R\cdot \operatorname{tg} c/2$, $OC'=R\cdot \operatorname{tg} b/2$ segun fórmulas conocidas de Trigonometria, siendo a, b, c los lados del triángulo esférico ABC; luego, si a, b, c, son muy pequeños con relación a R, podemos tomar como equivalentes a sus arcos las lineas trigonométricas seno y tangente, con lo cual, en el limite, los lados del triángulo se podrán reemplazar por: $Ra/2$, $Rb/2$, $Rc/2$; los ángulos: A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3; tenderán, respectivamente, a los ángulos del triángulo cuyos lados son $Ra/2$, $Rb/2$, $Rc/2$ o a los de su semejante cuyos lados valgan: Ra, Rb, Rc, y si a estos ángulos los llamamos, respectivamente: α', β', γ', resultará $A=\alpha'+2E/3$, $B=\beta'+2E/3$, $C=\gamma'+2E/3$; que era lo que queriamos demonstrar.

Para la demostracion del teorema de Lexell, observemos en la fig. 1 que si es β' la proyección estereográfica de β y siendo β el punto diametralmente opuesto al B, el angulo $B'\beta'C'$ es igual al $B'C't$ y por tanto igual a E.

Ahora, sean A y B dos puntos de la esfera (fig. 2) y llamemos α y β a los diametralmente opuestos a ellos. Sea M un punto genérico del circulo menor de diâmetro $\alpha\beta$ y cuyo plano es perpendicular a AOB. El triángulo esférico ABM se proyecta estereográficamente en el mixtilineo $OB'M'$. La proyeccion

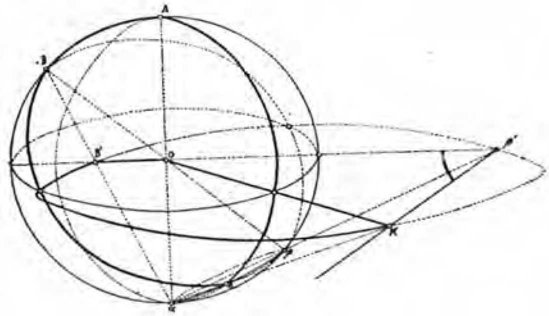

Fig. 2

estereográfica del circulo menor $\alpha M\beta$ será la recta $\beta'M'$ y la constancia del ángulo $O\beta'M'$ — cuando M describe el circulo menor considerado — nos prueba que el área del triángulo esférico ABM es constante. Y, reciprocamente, dado el lado AB; si el triangulo ABM ha de ser de área constante, el ángulo $O\beta'M'=E$ debe ser fijo y para ello, el lugar geométrico de M debe ser un circulo menor que pase por α y β.

A IDÉIA DE DIMENSÃO

por **Benno Eckmann**

(Encarregado de curso na Faculdade de Ciências e na Escola de Engenharia da Universidade de Lausanne e *privat dozent* na Escola Politécnica Federal de Zürich)

Lição inaugural proferida em 1943, Fevereiro, 5 e publicada na *Revue de Théologie et de Philosophie*, n.º 127, Abril-Junho de 1943

(Continuação do número anterior)

5. Tudo isto não nos impede, naturalmente, a nós matemáticos, de fa ar do espaço a quatro dimensões ou mais, considerado ùnicamente como sistema lógico, e de examinar as suas propriedades. Conserva-se a mesma linguagem geométrica e fala-se de pontos, de rectas, de planos, de ângulos, etc., se bem que, em geral, estas coisas não possam ser postas em correspondência com os objectos do espaço real! Todavia, esta construção é muito importante e eficaz pelas razões seguintes:

Permite ao matemático a tradução em linguagem geométrica de factos e problemas analíticos ou algébricos, o que simplifica, por vezes grandemente, a resolução e sugere métodos e resultados; quasi se pode dizer que, ao praticar esta geometria, se alcança uma certa intuição do espaço a n dimensões — não sei se é a grande analogia com o espaço a três dimensões (que, naturalmente, pode também enganar-nos!) ou, muito simplesmente, o hábito de pensar nestas coisas.

Mais importante ainda é a aplicação seguinte: quer no mundo da experiência e da intuição, quer na física, quer ainda nos diferentes ramos das matemáticas, há objectos e fenómenos relativamente aos quais é vantajoso tomar o espaço a n dimensões como *esquema*, no sentido de que êles podem descrever-se por n números reais variando independentemente, como as coordenadas no espaço a n dimensões. Êste diz-se então, *um contínuo a* n *dimensões ou a* n *graus de liberdade.*

Encontram-se exemplos disso em todos os domínios da ciência:

a) *Uma curva é um contínuo a uma dimensão*; é possível *numerar* os seus pontos com um número variável, isto é, pelo comprimento do arco da curva a partir de um certo ponto fixo. Por outras palavras, pode fazer-se corresponder aos pontos da curva os pontos de uma recta (espaço a uma dimensão!) de modo tal que a dois pontos distintos correspondem dois pontos distintos e que a dois pontos vizinhos correspondem dois pontos vizinhos. Neste caso a correspondência diz-se biunívoca (isto é, unívoca nos dois sentidos e contínua.

b) Outro exemplo: *o tempo* é um contínuo a uma dimensão, pois fixam-se os instantes por *um* número.

c) *Uma porção de superfície*, por exemplo de uma esfera, é um contínuo a duas dimensões, cujos pontos podem ser descritos por dois números. as duas coordenadas duma carta topográfica da superfície (por exemplo, a longitude e a latitude).

d) *Os movimentos no plano* (por exemplo, de um segmento) constituem um contínuo a três dimensões: qualquer movimento é dado por duas translacções independentes e por uma rotação. Diz-se que um corpo possui, para os movimentos no plano, três graus de liberdade e podem representar-se êsses movimentos por três números, portanto, pelos pontos de um espaço a três dimensões.

e) Anàlogamente, *os movimentos de um corpo no espaço* têm seis graus de liberdade: três translacções independentes e uma rotação que é dada por três números. Os movimentos no espaço, dados por seis números, podem, portanto, representar-se por pontos do espaço a seis dimensões. (Se se fixa um ponto de um corpo em movimento, êste tem apenas três graus de liberdade, os da rotação. Se se fixam dois pontos, fica só um grau de liberdade, o da rotação em tôrno da recta definida pelos dois pontos.)

Os físicos têm bem presente a muito particular importância do número dêstes graus de liberdade, por exemplo, na teoria do calor específico.

f) Para fixar o lugar e o tempo de um ponto que se desloca, ou de uma observação, necessitamos de quatro números: o contínuo *espaço-tempo* é a quatro dimensões, podemos representá-lo pelos pontos do espaço a quatro dimensões o que é de uma grande importância na teoria da relatividade.

g) *O estado de uma molécula* em movimento pode ser dado por seis números: as três coordenadas do lugar e as três componentes da sua velocidade. Na teoria cinética dos gases, o estado de um gaz constituído por N moléculas será dado, então, por $6N$ números e os diversos estados do gaz podem ser representados pelos pontos do espaço a $6N$ dimensões, digamos 10^{24} dimensões [1]. Poderá parecer exquisito, mas é muito prático na teoria estatística das moléculas.

Não quero referir-me aos numerosos exemplos que o matemático encontra na geometria algébrica e na análise.

6. Em resumo:

À pregunta: Porque se diz que o nosso espaço tem três dimensões?, responder-se-à: Porque tem por esquema o espaço geométrico a três dimensões ou coordenadas.

E, à pregunta: ¿Qual é a razão pela qual êste ou aquêle contínuo tem n dimensões ou n graus de liberdade?, responder-se-à: Porque pode ser descrito por n números, variando independentemente, como as n coordenadas no espaço a n dimensões, por outras palavras: porque os elementos dêsse contínuo podem ser representados pelos pontos dêste espaço, ou *postos em correspondência com os pontos dêste espaço a* n *dimensões*.

Tudo isto parece muito simples e é bem o que durante muito tempo foi aceite como definição da dimensão, sem precisar muito o que se entende por esta *correspondência* (talvez pensando, sôbretudo, em correspondências dadas por fórmulas simples). Mas, é neste momento que se erguem graves *dificuldades*, de carácter matemático, isto é, intervindo na construção lógica e que devem ser vencidas antes que a definição de dimensão seja justificada.

7. Eis as dificuldades:

Se se consegue a descrição de um contínuo por, digamos, dois números, ¿não se poderá fazê-la também por três (ou quatro, ou um) — naturalmente, procedendo de uma maneira inteiramente diferente? ¿Haverá, em suma, diferença entre os espaços a diversas dimensões, por exemplo, entre o de duas e o de três? ¿Não poderá estabelecer-se uma *correspondência* entre os pontos dêstes dois espaços que permitisse a substituïção, pura e simples, de um pelo outro, sôbretudo para a descrição de um contínuo?

Vejam: A noção de dimensão que se afigura tão simples e que é tão importante para numerosas aplicações, parece não possuir um sentido!

Responder-me-ão: O que pode descrever-se com dois números, variando independentemente, não o pode ser com três, visto que no plano não ha tantos pontos como no espaço!

Ora, isto não é verdade num certo sentido (muito embora, se se considera um plano imerso no espaço, haja pontos fora do plano!). Com efeito, dois factos extremamente surpreendentes, descobertos nos fins do século XIX, o puzeram bem em evidência.

Primeiramente, a escola de *Cantor* encontrou corres-

---

[1] Observar-se-à que 10^{24} não é um múltiplo de 6. Note-se que, se em $6N$ se substitui N pelo número de *Avogadro* tem-se $6N \simeq 10^{24}$. (N. do T.)

pondências entre dois espaços a diferentes dimensões (por exemplo, entre o plano e o espaço, ou recta e espaço a quatro dimensões, etc.), correspondências que são biunívocas, isto é, que a dois pontos diferentes fazem corresponder dois pontos diferentes. Poderia dizer-se que, dêste modo, os dois espaços contêm *o mesmo número de pontos*, e poderia, com efeito, substituir-se um dos espaços pelo outro!

E, ¿ agora? ¿ Será necessário, por isso, abandonar a idéia de dimensão como a formulámos? Não. Porque esta correspondência de *Cantor*, embora seja biunívoca, *não é contínua*, isto é, que a pontos vizinhos correspondem pontos afastados no outro espaço, ou no contínuo que se pretende descrever e cuja conexão será assim completamente destruída! Mas, para definir a dimensão, não se encararam, seguramente, tais correspondências; elas devem excluir-se.

O segundo facto é a célebre *curva de Peano*. É uma curva no sentido de que é um conjunto de pontos percorridos por um ponto que se desloca no plano: é possível numerar êstes pontos por intermédio do tempo, portanto, de *um* número, isto é, é possível pô-los em correspondência com os pontos de uma recta. Ora, esta curva de *Peano* possui a propriedade de preencher completamente um quadrado, portanto, um contínuo a duas dimensões e estabelece, assim, uma correspondência entre recta e plano. Desta vez a correspondência é contínua — mas, *não é biunívoca*, visto que há pontos do quadrado que são percorridos várias vezes, e por isso ela deve também excluir-se.

8. Se êstes resultados vos parecem um pouco estranhos, não esqueçais que se trata de espaços geométricos abstractos; não se trata, portanto, da intuição, mas da construção lógica que, embora inspirada no real, ultrapassa — mesmo na sua base axiomática! — as possibilidades da nossa intuição e experiência. E, como esta construção está na base da idéia de dimensão, expressa na definição, vê-se agora o que é necessário para *salvar* esta idéia de dimensão: é necessário demonstrar a impossibilidade do estabelecimento, entre dois espaços de diferentes dimensões, de uma correspondência que seja, ao mesmo tempo, biunívoca e contínua. Por outras palavras: que é impossível construir uma imagem biunívoca e contínua do espaço a n dimensões num espaço de número inferior de dimensões, por exemplo, de um plano numa recta.

Isto pode demonstrar-se. Desta vez a intuição não nos engana. A primeira demonstração foi dada em 1911 por *Brouwer* [2]; em 1913, êle próprio deu uma outra, mais profunda do que a primeira, precisando as ideias enunciadas em 1912 por *Poincaré* na sua célebre memória: *Pourquoi l'espace a trois dimensions* [2]. As investigações de *Brouwer* e a importância dos seus resultados permaneceram ignorados durante vários anos. Em 1922, as mesmas ideias foram retomadas, independentemente, por *Menger* e *Urysohn* [2] e muito aprofundadas. É então que uma bela teoria surge com a colaboração de um grande número de matemáticos. Pode dizer-se que o ponto final dêste desenvolvimento, embora muitos problemas aguardem resolução, é o livro de *Hurewicz* e *Wallmann*, *Dimension Theory*, publicado em 1941, em Princeton [2].

9. Um dos principais resultados de tôdas estas investigações, — mas não o único! — é, portanto, que a antiga definição comum de dimensão, tal como a formulámos, subsiste, tem sentido. ¿ Qual é no fundo, o significado dêste facto? ¿ A que ordem de ideias pertence?

O ponto essencial, vimo-lo nós, reside nas correspondências ou imagens biunívocas e contínuas. Consideremos, por exemplo, uma circunferência e uma circunferência mal desenhada, isto é, uma deformação da primeira. Esta é, sem dúvida, uma imagem biunívoca e contínua da circunferência. Constata-se que quási tôdas as propriedades geométricas se perderam, comprimento, ângulos, direcções, a curva já não tem centro, etc. Contudo, há qualquer coisa que subsiste: a curva é sempre um contínuo a uma dimensão e é fechada (não aberta). Estas propriedades que não se modificaram são de uma ordem diferente da das que se consideram em geometria ordinária, dir-se-à de uma ordem mais elementar. A disciplina que de tais propriedades se ocupa chama-se *analysis situs* ou *topologia*.

Por exemplo, não há diferença topológica entre uma esfera e um ovo, ou um elipsoide, ou ainda uma superfície fechada dêste género, o que já não sucede entre uma esfera e um toro. E, afirma-se uma propriedade topológica ao dizer que duas curvas fechadas num espaço estão enlaçadas ou não. O célebre teorema de *Euler* relativo aos poliedros (a soma dos vértices e das faces menos a soma das arestas é igual a dois) é de carácter topológico; visto que é sòmente necessário que o poliedro tenha a conexão, o género de uma esfera; a forma, os ângulos, os lados das faces não desempenham papel algum neste caso.

E, o sentido do teorema de *Brouwer*, que era necessário para salvar a idéia de dimensão (que afirma a impossibilidade de alterar o número de dimensões por uma simples deformação) — é que *a dimensão de um espaço é uma propriedade topológica*, embora tenha sido definido por intermédio das coordenadas, portanto, atravez de elementos não topológicos, a saber ângulos, comprimentos, rectas, etc.

Pode dizer-se — os exemplos mostraram bem — que

---

[2] Veja-se a nota bibliográfica final.

as propriedades topológicas são sugeridas pelas experiência e pela intuição puramente geométricas, ao passo que, na geometria ordinária, se recorre a noções aritméticas e analíticas de uma outra ordem. Por outras palavras: Para chegar à geometria ordinária, é necessário restringir o domínio das correspondências consideradas até aqui; por exemplo, se se considera, em vez das deformações biunívocas e contínuas, sòmente os movimentos no espaço, então, os comprimentos e os ângulos, etc., permanecem invariantes, e estas são as coisas de que se ocupa a geometria elementar métrica. Assim, os diferentes pontos de vista geométricos são caracterisados pelas correspondências admitidas; o caso mais geral é o da topologia; o caso mais restricto, o da geometria métrica, e há casos intermédios.

10. Constatou-se, então, que a idéia de dimensão é de carácter topológico; deve, portanto, procurar-se uma definição que o ponha em evidência, isto é, uma definição utilizando apenas noções topológicas.

Para isso, deixemo-nos inspirar muito simplesmente pelo espaço real. Nos *Elementos de Euclides* encontra-se a idéia seguinte: A extremidade de uma curva é um ponto, o bôrdo de uma superfície é uma curva, a fronteira de um corpo é uma superfície. Na memória já citada, *Poincaré* propõe que se caracterize a dimensão por tais propriedades ou por propriedades muito vizinhas. A definição de *Menger* e *Urysohn*, admitida hoje como a melhor, quási não difere disso.

Considera-se um ponto do contínuo em questão e uma vizinhança completa dêsse ponto; tenta-se extrair a vizinhança do contínuo. Para isso é forçoso cortar ou rasgar o contínuo em certos pontos que se chamam pontos *da fronteira da vizinhança*.

Se se trata de um contínuo a *uma* dimensão — consideremos uma curva ou um fio de ferro — basta cortá-lo em alguns pontos isolados (que não constituem êles próprios contínuo algum).

Se se trata de um contínuo a *duas* dimensões — consideremos uma superfície — não basta cortá-la em alguns pontos isolados, deve-se cortá-la segundo uma curva (portanto, um contínuo a uma dimensão).

Se se trata de um contínuo a *três* dimensões — consideremos o espaço — nem pontos isolados, nem curvas bastam; a fronteira de uma vizinhança (por exemplo, de uma bola sólida) é constituída por uma superfície (portanto, um contínuo a duas dimensões) — e assim por diante.

Dir-se-á, portanto, que *um contínuo é a* n *dimensões quando os pontos da fronteira de uma vizinhança constituem um contínuo a* $n-1$ *dimensões.*

Pode demonstrar-se, então, que o espaço abstracto a n coordenadas goza precisamente desta propriedade; isto mostra que a antiga e a nova definições são equivalentes. Mas, a nova não utiliza, nem comprimentos, nem ângulos, nem rectas, sòmente vizinhanças que são de carácter puramente topológico (a sua forma não desempenha qualquer papel!). É talvez o melhor método para pôr em evidência o facto de que a dimensão, o número de graus de liberdade, exprime uma propriedade topológica de um contínuo.

11. Poderia ainda falar-vos de outros métodos que permitem a caracterização da dimensão de uma maneira topològica, por exemplo, o proposto por *Lebesgue* utilizando a noção de cobertura; êle foi muito importante para o desenvolvimento da teoria. Poderia também dirigir a vossa atenção para os espaços a um número infinito de dimensões, ou para os espaços (abstractos) mais gerais ainda do que os dados por intermédio de coordenadas; são os *espaços topológicos*, nos quais se não tem quási senão uma única noção geométrica, a de vizinhança; mas, como vimos, estas vizinhanças permitem-nos falar da dimensão e obteve-se mesmo o resultado interessante de que, em princípio, todos estes espaços generalizados são partes dos espaços dados por intermédio de coordenadas. Poderia falar-vos ainda dos problemas não resolvidos, das aplicações à algebra e à análise — mas, isso conduzir-me-ia muito longe e é tempo de concluir.

12. Todos constataram, decerto, que todos os métodos geométricos são caracterizados por uma colaboração muito particular entre a intuição, a experiência e a abstracção, na qual se distingue sempre estrictamente entre o real e a teoria que pode ser o seu esquema. É, de resto, típico no trabalho matemático e mesmo nas ciências, sôbretudo na física teórica.

Nem sempre assim foi. Tempo houve em que se pensou que o espaço geométrico e o espaço real, que uma teoria e o seu objecto, eram a mesma coisa. E, no fundo, digamos de um modo não oficial, talvez se pense o mesmo ainda hoje.

Se se foi forçado a abandonar esta idéia, se se diz sem ambiguidade que tudo o que uma teoria enuncia não se refere à realidade, mas apenas ao seu esquema abstracto — ¿ não é isto fazer da necessidade virtude? ¿ Não é a inteligência assim mais modesta do que quereria sê-lo?

Talvez se deva formular a coisa de um modo um pouco diferente. Pois o que se chama realidade não pode, afinal, ser visto e descrito senão através de um certo esquema abstracto. Sem a idéia pre-existente de um contínuo, tôda a experiência seria impossível, reduzir-se-ia a sensações isoladas sem relações. Conceitos simples, considerados como pertencentes à experiência e à intuição — como o da dimensão — já supõem, afinal, uma teoria abstracta. Freqüentemente, mesmo as matemáticas, com as suas construções e formalismos abstractos, permitiram a concepção de novas idéias intuitivas e o descobrimento de novos factos experimentais; a história das ciências dá-nos disso numerosos exemplos.

Permitir-me-ão, portanto, que eu veja nas matemáticas não só um instrumento muito útil para as ciências e a técnica não só a linguagem que nos permite relacionar os fenómenos, formular leis e deduzir conseqüências, mas muito mais: *Vejo nelas a expressão da nossa maneira de pensar.* E, se o matemático, como um geógrafo que se não contenta com o conhecimento da geografia da sua aldeia natal, parece afastar se cada vez mais dos esquemas correntes e ousa passar de uma abstracção e generalização a outra, não se afasta mais do real por isso; pelo contrário, cria novas possibilidades de pensar, de encarar e compreender o nosso mundo.

NOTA BIBLIOGRÁFICA

Não indicámos as memórias e livros que tratam dos problemas matemáticos abordados nesta conferência. Encontram-se citados nas duas obras seguintes consagradas à teoria da dimensão:

K. Menger, *Dimensionstheorie* (Leipzig, 1928).

W. Hurewicz e **H. Wallmann**, *Dimension Theory* (Princeton, 1941),

Consulte-se também a obra de **P. Alexandroff** e **H. Hopf**, *Topologie I* (Berlin, 1935), da qual vários capítulos são dedicados à noção de dimensão.

Estes problemas são tratados de uma maneira mais geral em:

H. Poincaré, *Dernières pensées* (Paris, 1913), o capítulo intitulado *Porquoi l'espace a trois dimensions*, p. 57-97;

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften (Leipzig und Wien, 1933), cinco conferências, das quais, em particular, as seguintes:

H. Hahn, *Die Krise der Anschauung*, p. 42-64.

G. Nœbeling, *Die vierte Dimension und der krumme Raum*, p. 66-92.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

PEDAGOGIA

ACÊRCA DO ENSINO DA MATEMÁTICA NOS LICEUS

por **José Cardoso Guerra**

Há realmente qualquer coisa de muito grave no ensino da matemática elementar, e por isso não nos causou surprêsa alguma o artigo do professor Bento Caraça.

Deve acrescentar-se ainda que os alunos que prestam provas de exame de aptidão, fazem parte de um reduzido número que conseguiu saltar as barreiras do sexto e sétimo anos, onde a percentagem de reprovados chega a ser pavorosa!

No ano passado, por exemplo, na época de Julho, num liceu em que prestavam provas cêrca de 241 examinandos, só 41 conseguiram aprovação, o que corresponde a uma percentagem de reprovações de 83%! Num outro houve uma percentagem de 79% e em muitos outros os resultados foram semelhantes.

Isto no 2.º ciclo e só em Matemática. Os examinadores tiveram ocasião de observar o elevado grau de ignorância que os alunos revelam através dos pontos. Os disparates são tantos e tão variados que nem vale a pena exemplificá-los.

Verdade seja que a percentagem de reprovações nos alunos internos dos liceus é de uma maneira geral bastante inferior à percentagem final, o que se explica muito fàcilmente. O aluno do liceu vai geralmente a exame se der provas de bom aproveitamento, para o que tem de estudar com relativo cuidado, mas se por qualquer motivo fraqueja e resolve não se maçar, passa para o ensino particular em qualquer altura até ao final do 2.º período escolar e então vai de certeza a exame puramente *à sorte*, depois de ter comprado tôdas as colecções de exercícios do mercado, porque tem confiança cega nos receituários da última hora, que uns malfadados professores se vêem na necessidade de lhes ministrar. Muitos dêstes alunos realmente freqüentam o liceu como quem freqüenta um parque de diversões.

De uma maneira geral a maioria dos alunos do ensino particular não estuda convenientemente, porque sabe que vai a exame, facto êste que se transforma em causa final.

O professor pode querer reprová-lo mas o pai exige o exame porque paga...

E não convém analisar profundamente qual é finalmente o moral do professor, o do pai do aluno e sobretudo o do próprio aluno. A projecção dêste estado de coisas na educação em geral, é fácil de calcular.

Uma outra causa que a nosso ver influi no grande número de reprovações, comparadamente ao que era aqui há uns anos atrás, é da maneira como são feitos