abstractos, permitiram a concepção de novas idéias intuítivas e o descobrimento de novos factos experimentais ; a história das ciências dá-nos disso numerosos exemplos.

Permitir-me-ão, portanto, que eu veja nas matemáticas não só um instrumento muito útil para as ciências e a técnica não só a linguagem que nos permite relacionar os fenómenos, formular leis e deduzir conseqüências, mas muito mais : *Vejo nelas a expressão da nossa maneira de pensar.* E, se o matemático, como um geógrafo que se não contenta com o conhecimento da geografia da sua aldeia natal, parece afastar se cada vez mais dos esquemas correntes e ousa passar de uma abstracção e generalização a outra, não se afasta mais do real por isso ; pelo contrário, cria novas possibilidades de pensar, de encarar e compreender o nosso mundo.

NOTA BIBLIOGRÁFICA

Não indicámos as memórias e livros que tratam dos problemas matemáticos abordados nesta conferência. Encontram-se citados nas duas obras seguintes consagradas à teoria da dimensão :

K. Menger, *Dimensionstheorie* (Leipzig, 1928).

W. Hurewicz e **H. Wallmann**, *Dimension Theory* (Princeton, 1941),

Consulte-se também a obra de **P. Alexandroff** e **H. Hopf**, *Topologie I* (Berlin, 1935), da qual vários capítulos são dedicados à noção de dimensão.

Estes problemas são tratados de uma maneira mais geral em :

H. Poincaré, *Dernières pensées* (Paris, 1913), o capítulo intitulado *Porquoi l'espace a trois dimensions*, p. 57-97 ;

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften (Leipzig und Wien, 1933), cinco conferências, das quais, em particular, as seguintes :

H. Hahn, *Die Krise der Anschauung*, p. 42-64.

G. Nœbeling, *Die vierte Dimension und der krumme Raum*, p. 66-92.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

PEDAGOGIA

ACÊRCA DO ENSINO DA MATEMÁTICA NOS LICEUS

por ***José Cardoso Guerra***

Há realmente qualquer coisa de muito grave no ensino da matemática elementar, e por isso não nos causou surprêsa alguma o artigo do professor Bento Caraça.

Deve acrescentar-se ainda que os alunos que prestam provas de exame de aptidão, fazem parte de um reduzido número que conseguiu saltar as barreiras do sexto e sétimo anos, onde a percentagem de reprovados chega a ser pavorosa !

No ano passado, por exemplo, na época de Julho, num liceu em que prestavam provas cêrca de 241 examinandos, só 41 conseguiram aprovação, o que corresponde a uma percentagem de reprovações de 83 %! Num outro houve uma percentagem de 79 % e em muitos outros os resultados foram semelhantes.

Isto no 2.º ciclo e só em Matemática. Os examinadores tiveram ocasião de observar o elevado grau de ignorância que os alunos revelam através dos pontos. Os disparates são tantos e tão variados que nem vale a pena exemplificá-los.

Verdade seja que a percentagem de reprovações nos alunos internos dos liceus é de uma maneira geral bastante inferior à percentagem final, o que se explica muito fàcilmente. O aluno do liceu vai geralmente a exame se der provas de bom aproveitamento, para o que tem de estudar com relativo cuidado, mas se por qualquer motivo fraqueja e resolve não se maçar, passa para o ensino particular em qualquer altura até ao final do 2.º periodo escolar e então vai de certeza a exame puramente *à sorte*, depois de ter comprado tôdas as colecções de exercícios do mercado, porque tem confiança cega nos receituários da última hora, que uns malfadados professores se vêem na necessidade de lhes ministrar. Muitos dêstes alunos realmente freqüentam o liceu como quem freqüenta um parque de diversões.

De uma maneira geral a maioria dos alunos do ensino particular não estuda convenientemente, porque sabe que vai a exame, facto êste que se transforma em causa final.

O professor pode querer reprová-lo mas o pai exige o exame porque paga...

E não convém analisar profundamente qual é finalmente o moral do professor, o do pai do aluno e sobretudo o do próprio aluno. A projecção dêste estado de coisas na educação em geral, é fácil de calcular.

Uma outra causa que a nosso ver influi no grande número de reprovações, comparadamente ao que era aqui há uns anos atrás, é da maneira como são feitos os exames. Aqui melhorou-se muito. Os alunos são colocados todos em igualdade de circunstâncias, o que sob o ponto de vista da justiça é óptimo.

Apenas não nos parece bem a extensão dos pontos que continua a ser demasiada e a preocupação de muitas preguntas relativamente miúdas, que por vezes não chegam a dar a ideia das verdadeiras possibilidades matemáticas, digamos assim, do examinando. Em matemática liceal, desde que a prova escrita seja bem feita, não se justificam duas provas independentes sôbre o mesmo assunto e muito menos uma prova oral.

A existência de pontos-modêlos estabelecendo normas rígidas para a manufactura dos pontos, foi um autêntico desastre para o ensino. O ponto deu aparentemente ao aluno a ideia da desnecessidade do conhecimento da demonstração, interessando-lhe apenas a simples aplicação de regras e de fórmulas.

Daí resulta um conhecimento demasiado superficial dos assuntos e a ilusão de que se está apto, depois de se terem resolvido superficialmente centenas de exercícios semelhantes aos do ponto modêlo.

Depois do inevitável fracasso vêm as habituais imprecações contra a prova escrita, geradora de nervosismos mais ou menos hereditários e a amargura da inexistência de uma prova oral em que o aluno mostraria os seus grandes conhecimentos...

O enfado evidenciado pelos estudantes perante tudo que lhes pareça demonstração e a resistência ao estudo da mesma, constituem motivo de surda luta que o professor tem que manter hàbilmente, se não quere concorrer demasiado para o despovoamento dos liceus, facto grave que se tem acentuado de ano para ano.

Um dos objectivos dêste sistema de pontos é o de limitar tanto quanto possível a influência pessoal do classificador. Porém, isso é muito difícil e como se sabe, basta por vezes um décimo de valor para um aluno reprovar.

Ora vejamos um pequeno exemplo: Numa certa pregunta de geometria do 1.º ciclo do ano transacto, tivemos ocasião de observar a variedade de pontuação atribuída à mesma resposta, desde zero até seis pontos e provàvelmente deve ter havido quem desse sete ou mesmo oito pontos, máximo atribuído.

E êstes casos não são, infelizmente, muito raros. Parece-nos que as provas deveriam ser classificadas independentemente por, pelo menos, dois professores e comparados os resultados. Evitar-se-iam possíveis enganos dada a grande acumulação de serviço e uniformizar-se-iam mais os critérios da classificação.

Depois das classificações afixadas, o aluno pode recorrer, o que é justo. Por vezes há realmente enganos. Quando o examinador do recurso reconhece que o aluno tem razão, êste ganha a questão, mas para isso teve que pagar, o que é injusto. O ideal seria que todos os alunos pudessem analisar as suas provas depois de classificadas. Quem quizesse recorreria, mas os casos anormais seriam tratados devidamente.

SÔBRE OS EXAMES DE APTIDÃO

por ***W. L. Stevens***

Numa discussão dos resultados dos exames de aptidão, no n.º 17 da «Gazeta de Matemática», num artigo intitulado «Algumas reflexões sôbre os exames de aptidão», o Sr. Prof. Dr. Bento Caraça apresenta alguns dados sôbre o número de aprovações e reprovações nos referidos exames dos candidatos vindos do liceu e do ensino técnico médio.

Dêstes dados conclui o autor que, duma maneira geral, as percentagens de reprovações são superiores nos candidatos vindos do ensino técnico do que naquêles que vêm do Liceu.

A questão pode, no entanto, ser encarada de maneira um tanto diferente.

Com efeito os dados referentes às duas épocas de exame, depois de convenientemente agrupados, são os seguintes:

	Aprovações	Reprovações	Sub-totais
Liceus....	92	51	143
Ens. Téc...	28	24	52
Sub-totais.	120	75	195

Se a aprovação do candidato não dependesse da natureza da escola freqüentada (liceu ou escola técnica) os números esperados correspondentes às quatro entradas desta tabela de contingência seriam:

	Aprovações	Reprovações	Sub-totais
Liceus. . . .	88,00	55,00	143
Ens.Téc. . .	32,00	20,00	52
Sub-totais.	120,00	75,00	195

Êstes números foram calculados de acôrdo com a hipótese anterior, isto é, na suposição de que a percentagem de aprovações é a mesma para os dois grupos de candidatos.

A variância de qualquer das entradas na tabela dada é aproximadamente igual ao recíproco da soma dos recíprocos dos valores esperados:

$$\frac{1}{V}=\frac{1}{88}+\frac{1}{55}+\frac{1}{32}+\frac{1}{20}=0{,}1108$$

$$V=9{,}003 \quad \text{Desvio padrão}=\sqrt{V}=3{,}00$$

O desvio observado é $92-88{,}00=4{,}00$ mas para julgar da sua significância é conveniente, por uma questão de rigor, aplicar a correcção de Yates, o que dá para o referido desvio o valor final 3,50. A razão entre êste e o seu desvio padrão é, portanto $\frac{3{,}50}{3{,}00}=1{,}17$

Ora uma tabela de áreas da curva normal mostra que êste desvio corresponde a um nível de significância de $P=24\,^0/_0$. Isto é, mesmo que os dois grupos de estudantes fôssem amostras casuais da mesma população seria de esperar, aproximadamente, uma vez em cada quatro, um desvio da proporcionalidade calculada, tão grande ou maior que o revelado pelos dados.

Não há portanto razão para suspeitar que as escolas técnicas sejam menos eficientes do que os liceus no ensino das matemáticas visto os dados não fornecerem evidência que justifique tal conclusão.

ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MÉDIAS DE UNA SERIE ESTADISTICA

por **O. Fernández Baños** (professor da Universidade de Madrid)
e **Jimenez Montoya** (licenciado em Ciências)

Es sabido que según la definicion corriente, se llama valor medio de una serie estadistica cuantitativa a todo valor intermedio entre el menor y el mayor de ella, no siendo todos iguales; y, por consiguiente, es obvio que toda serie estadistica cuantitativa de términos no todos iguales admite infinitas medias.

Muchas son las fórmulas ideadas para expresar valores medios de una serie estadistica de números reales; y segun la definicion genérica dicha se presenta naturalmente el problema de hallar una expresion general que represente todas las medias posibles en funcion de un parámetro real, que sea de cálculo sencillo y que, a ser posible, contenga como casos particulares a las usadas habitualmente.

La cuestion queda resuelta mediante la llamada media general:

$$f(m)=\sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^m}{n}}=M_m \qquad (1)$$

siendo m un número real, n un número entero y positivo y X_i números positivos reales; condicion esta última que no restringe el valor práctico de la fórmula porque basta un simple cambio de origen en la serie primitiva dada.

La fórmula (1) cumple las condiciones siguientes:

a) el limite de $f(m)$ cuando m decrece indefinidamente es el más pequeño de la serie y cuando crece indefinidamente tiene como limite al mayor de la misma.

En efecto, ordenando los X_i en orden creciente, tendremos:

$$X_i=\alpha_i X_n\,;\ \alpha_i<1 \qquad i=1,2,\cdots n-1$$

$$X_i=\beta_i X_1\,;\ \beta_i>1 \qquad i=2,3,\cdots n$$

$$\log f(m)=\frac{1}{m}\log\left[X_n^m\,\frac{\alpha_1^m+\alpha_2^m+\cdots+\alpha_{n-1}^m+1}{n}\right]=$$

$$=\log X_n+\frac{1}{m}\log\left[\frac{\alpha_1^m+\alpha_2^m+\cdots+\alpha_{n-1}^m+1}{n}\right]$$

$$\log f(m)=\frac{1}{m}\log\left[X_1^m\,\frac{1+\beta_2^m+\beta_3^m+\cdots+\beta_n^m}{n}\right]=$$

$$=\log X_1+\frac{1}{m}\log\left[\frac{1+\beta_2^m+\beta_3^m+\cdots+\beta_n^m}{n}\right]$$

$$\lim_{m\to\infty}\log f(m)=\log X_n\,;\quad \lim_{m\to\infty} f(m)=X_n$$

$$\lim_{m\to-\infty}\log f(m)=\log X_1\,;\quad \lim_{m\to-\infty} f(m)=X_1$$

b) Dando valores enteros a m se obtienen las medias