

TEMAS DE ESTUDO

A NOÇÃO DE GRUPO TOPOLÓGICO — CORRECÇÃO IMPORTANTE

por **Hugo Ribeiro**

(Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura)

Acabamos de reler o nosso artigo da «Gazeta» n.º 17, de Novembro de 1943, sobre a noção de grupo topológico e notar que a nossa preocupação de pôr em relevo uma propriedade dos grupos topológicos que aí indicámos e cujo interesse se estende a outros capítulos da Matemática, aparentemente distantes daquêle, nos levou a formular erradamente a condição de continuidade normalmente imposta ao produto de elementos dum grupo topológico. A propriedade em questão é a de que se deve ter $\bar{X} \cdot \bar{Y} \subset \overline{X \cdot Y}$, quaisquer que sejam os complexos X e Y do grupo. Esta propriedade é de facto, como indicámos, válida em qualquer grupo topológico e equivalente à continuidade da operação de produto relativamente a cada uma das variáveis factores, que nós exigimos na definição apresentada. Porém não é simplesmente esta espécie de continuidade a que intervem no conceito do grupo topológico, mas mais: $x \cdot y$ deve ser uma função contínua no espaço produto do espaço T_1 (que os elementos do grupo devem constituir) por si mesmo (espaço cujos elementos são os pares ordenados $\langle x, y \rangle$ de elementos de G , sendo uma vizinhança de um par, $\langle x, y \rangle$, o conjunto de pares ordenados cujos antecedentes são os elementos de uma vizinhança de x e cujos conseqüentes são os elementos de uma vizinhança de y : pense-se, por exemplo, na topologia do plano como um tal produto das de duas rectas). E é trivial

que a continuidade de uma função de duas variáveis é coisa distinta da continuidade dessa função relativamente a cada uma das variáveis. Também para o produto $x \cdot y$ num grupo topológico a continuidade relativamente a cada um dos factores é implicada pela continuidade do produto $x \cdot y$, mas não a implica: O exemplo do grupo aditivo dos números complexos com uma topologia que difere da ordinária porque, dada uma recta fixa, no plano, se excluíram das vizinhanças ordinárias de cada número complexo z os pontos distintos de z pertencentes à paralela àquela recta, pelo afixo de z , mostra, com simplicidade, êsse facto; com efeito, os números complexos constituem, assim, relativamente à adição, um grupo, a topologia verifica tôdas as condições dos espaços T_1 , tem-se $\bar{x^{-1}} = \bar{x}^{-1}$ e $\bar{X} \cdot \bar{Y} \subset \overline{X \cdot Y}$ mas a continuidade exigida aos grupos topológicos não se dá.

Devemos, pois, acrescentar, (para a definição de grupo topológico) às condições que impuzemos no nosso artigo, uma nova que poderá exprimir-se assim: quaisquer que sejam os elementos x e y e o complexo Z tais que $x \cdot y \notin Z$ há complexos X e Y com $x \notin \bar{X}$, $y \notin \bar{Y}$ e $(1 - \bar{X}) \cdot (1 - \bar{Y}) \subset 1 - \bar{Z}$. ($1 - \bar{X}$, $1 - \bar{Y}$, $1 - \bar{Z}$ representam os complementares dos conjuntos \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , respectivamente). A condição $\bar{X} \cdot \bar{Y} \subset \overline{X \cdot Y}$ torna-se então supérflua. Mas tôdas as questões postas subsistem.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA (J. I. M.)

COLÓQUIOS DE ANÁLISE GERAL

Por iniciativa da Junta de Investigação Matemática, realizam-se todos os sábados, às 16 horas, a partir do dia 15 de Janeiro no Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto uma série de colóquios de Análise Geral que terão por objectivo divulgar entre os estudiosos portugueses as correntes principais do pensamento matemático moderno.

Êste ano os colóquios serão divididos nas cinco secções:

I—*Álgebra Moderna*—sob a direcção do Prof. Dr. A. Almeida Costa.

II—*Teoria das Estruturas*—sob a direcção do Prof. Dr. A. Monteiro.

III—*Topologia Geral*—sob a direcção do Prof. Dr. A. Monteiro.

IV—*Teoria Geral da Medida*—sob a direcção do Prof. Dr. Ruy Luís Gomes.

V—*Teoria Geral da Integração*—sob a direcção do Prof. Dr. Ruy Luís Gomes.

Em cada sessão, que durará cêrca de 1 hora e 30 minutos realizar-se-ão 3 colóquios.

1.ª Sessão

- 1) Álgebra Moderna: *Grupos*—por José Morgado.
- 2) Topologia Geral: *Espaços de Sierpinski*—por Dr.ª Maria Odette Botelho.
- 3) Teoria Geral da Medida: *Introdução*—por Dr. Laureano de Barros.

No próximo número da «Gazeta» serão indicados os programas de trabalho de cada uma das secções.

Já foram publicados:

«Cadernos de Análise Geral» n.ºs 1 e 2 cujos títulos são respectivamente:

Topologia Geral—1—Espaços de Sierpinski | António Aniceto Monteiro; Teoria geral da Medida—Introdução por Laureano Barros.

Para condições de assinatura da colecção vide anúncios na capa deste número.

ADESÕES À JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Desde que foi anunciada a criação da J. I. M., no último número da «Gazeta de Matemática», foram comunicadas as adesões de: Prof. Sarmiento de Beires; Prof. Bento Caraça; dos seguintes trabalhadores do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto: Prof. Almeida Costa, Drs. Luís Neves Real, A. Pereira Gomes,

Laureano M. de Barros, José Gaspar Teixeira, Mar Odette Botelho, Maria Helena Costa Ferreira, En Bernardino de Barros Machado e José Morgado; Nuno Fidelino de Figueiredo Cotter; Fernando Neve Ferrão; Dr. José D. da Silva Paulo; Prof. Manuel Zaluar Nunes.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

ASSEMBLEIA GERAL—CURSOS A REALIZAR

No dia 14 de Janeiro de 1944 reuniu-se no Anfiteatro de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa a Assembleia Geral da S. P. M. Foram lidos e aprovados o relatório da Direcção e as contas relativas ao período de 30 de Abril a Dezembro de 1943. Para o cargo vago de Secretário Geral da Sociedade foi eleito o Dr. Carlos Fernandes de Carvalho e para o lugar de 1.º secretário o Dr. J. Xavier de Brito.

Pela Direcção da Sociedade foram propostos e aprovados os seguintes votos:

1.º—de agradecimento à Faculdade de Ciências pelas facilidades concedidas.

3.º—de louvor à «Gazeta de Matemática» e à «Portugaliae Mathematica» pela forma como tais revistas têm contribuído para o desenvolvimento do gosto pela Matemática em Portugal.

3.º—de agradecimento à Imprensa, com especial menção da «Gazeta de Matemática», pela atenção com que seguiu a actividade da Sociedade.

Do relatório destacamos:

a) a decisão da Direcção de publicar o Boletim da S. P. M. nos primeiros meses de 1944 para o que está já constituída a respectiva Comissão de Redacção;

b) a narração dos esforços feitos pela Direcção da Sociedade para levar a bom caminho a criação da «Biblioteca Ibero-Americana de Matemática» junto da «Sociedade Matemática Espanhola» de quem se encontrou a melhor boa vontade para o empreendimento.

c) a concessão de um donativo de 500\$000 feito pela S. P. M. à «Gazeta de Matemática».

Na última reunião da Direcção, em 21 de Janeiro de 1944, foi resolvido intensificar a actividade da Sociedade tendo-se já tomado, entre outras resoluções, a de efectivar um pequeno curso sobre *Diferenças finitas* de que se encarregou o Secretário Geral da Sociedade, Dr. Carlos A. F. Carvalho. Oportunamente serão notificadas outras manifestações de actividade da S. P. M.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA

Desde Outubro passado é o Seminário de Física Teórica anexo ao C. E. M. da Faculdade de Ciências do Pôrto dirigido superiormente pelo Prof. A. Proca, que com as palavras seguintes estabeleceu as normas e métodos de trabalho adoptados, definindo com clareza a orientação da actividade do Seminário:

«O objectivo deste seminário é duplo:

1.º—Estudar as memórias e obras recentes de Física Teórica Moderna, de maneira a fornecer uma base de partida para a elaboração de trabalhos originais.

2.º—Desenvolver não somente entre os estudantes mas também num público especializado, tão numeroso

quanto possível, o gosto pelas investigações físicas, de modo a criar um clima favorável e um meio propício às descobertas no domínio mencionado.

Para atingir este duplo objectivo sem que, ao mesmo tempo, se dispersassem esforços, decidiu-se agrupar este ano os trabalhos do Seminário à volta de um assunto central, suficientemente vasto para oferecer interesse geral, mas preciso bastante para evitar toda a dispersão.

O assunto escolhido foi um dos que dominam actualmente as investigações de Física Teórica, a saber: o *Estudo teórico geral das partículas elementares*.

Foi estabelecido um programa, dividindo este estudo em sessões cada uma das quais comporta a análise duma memória, dum grupo de memórias ou mais geralmente duma questão, permitindo examinar sucessivamente os diversos aspectos do problema geral. Esse programa prevê tanto a análise de memórias de natureza teórica, como conferências de conjunto sobre os resultados de ordem experimental destinados a precisar as bases físicas dos fenómenos de que se estuda a teoria.

As memórias inscritas no programa devem ser estudadas e expostas no seminário, tanto quanto possível pelos próprios alunos; essas exposições devem ser seguidas duma discussão ou de observações críticas, que permitem situar a questão no quadro dos conhecimentos já adquiridos e apreciar as suas relações com outros problemas, exercício duma importância capital para todos os que se dedicam ao trabalho de investigação.

O Prof. A. Proca iniciou as sessões de trabalho com uma lição subordinada ao tema: I—*Les particules élémentaires: position du problème, méthodes d'attaque, principes fondamentaux des mécaniques nouvelles*; a que se seguiram outras lições do mesmo professor com o tema seguinte: II—*Rappel des notions fondamentales de mécanique ondulatoire: théorie générale, opérateurs, matrices, grandeurs observables, probabilités*.

Enquadrada no programa acima traçado, efectuou o Assistente Carlos Braga uma comunicação sob o título: I—*As partículas elementares do ponto de vista experimental*, em que foram referidos os dados experimentais mais recentes sobre o assunto.

Dando a sua valiosa colaboração à actividade do Seminário, o Prof. R. Sarmento de Beires fez um conjunto de quatro notáveis lições sobre os temas seguintes: I—*Equações de Lagrange, principio de Hamilton e principio da menor acção*. II—*Teoria de Hamilton — Jacobi*. III—*Equações de Maxwell, propagação das ondas*. IV—*Trem de rodas, velocidade de grupo; onda associada a um corpúsculo*; destinadas a completar os conhecimentos de mecânica clássica de uma parte do auditório, indispensáveis ao desenvolvimento ulterior dos trabalhos.

Em trabalho dedicado mais especialmente aos colaboradores do Seminário, o Prof. A. Proca analisou as duas memórias originais seguintes: I—de Belifante: *On the spin angular momentum of mesons*. II—de Iskraut: *Bemerkungen zum Energie — Impuls — Tensor der Feldtheorien der Materie*. A. P. G.

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA APLICADOS À ECONOMIA

No Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, iniciou-se em 20 de Janeiro de 1944 um curso intitulado «Complementos de Análise» organizado por este Centro. As três primeiras lições são proferidas pelo Prof. Bento Caraça nos últimos dias de Janeiro e versarão os seguintes temas: *Funções Γ e β* .

Sistemas ortogonais. Em Março, em dias a fixar, serão tratados ainda os seguintes assuntos: *Polinómios de Legendre; Polinómios de Hermite; Derivação e integração numérica; Interpolação*. Estes temas serão expostos pelos assistentes do Instituto Drs. Alfredo Miranda, João Remy Freire e Orlando Morbey Rodrigues.

CONCURSO PARA ACTUÁRIO DO INSTITUTO NACIONAL DE TRABALHO

Do «Diário do Governo», 3.ª série, n.º 20, de 25 de Janeiro de 1944, julgamos curioso transcrever, para levar ao conhecimento dos nossos leitores, a parte relativa ao programa das provas a efectuar.

«O concurso constará das seguintes provas escritas:

a) Duas provas de resolução de problemas envolvendo conhecimentos das matérias seguintes:

Noções gerais sobre: análise combinatória, convergência de séries, derivação e diferenciação das fun-

ções de variável real, integração (integração como operação inversa da diferenciação, integração das funções racionais, mudança de variável, integração por partes, aplicação ao cálculo de áreas planas, integração por séries) e equações diferenciais (generalidades, equações de 1.ª ordem e do 1.º grau — diferencial exacta, separação de variáveis, equação homogénea, equação linear —).

Fórmula de Moivre na teoria dos números complexos. Relação entre a função exponencial e as funções circulares. Fórmula dos acréscimos finitos. Desenvol-

vimentos em série de Taylor e Maclaurin. Uso das derivadas no estudo da variação de uma função de uma variável real. O integral $\int_0^{\infty} e^{-x'} dx$.

Diferenças de uma função. Notação simbólica, os símbolos Δ e E . Notação factorial. Diferenças de um polinómio. Fórmula de interpolação de Newton e sua extensão às diferenças divididas. Fórmula de interpolação de Lagrange. Subdivisão de intervalos.

Somação. A função $U_x V_x$; somação por partes. O operador Σ e a sua relação com o operador Δ . Determinação da soma de séries.

Operador $D \equiv \frac{d}{dx}$ e operador Δ . Aplicações simples a derivação numérica.

Fórmula de Euler-Maclaurin. Aplicações simples a integração numérica.

Probabilidade. Probabilidades totais. Probabilidades compostas. Esperança matemática. Provas repetidas. Probabilidades geométricas. A lei da probabilidade de Gauss.

b) Uma prova elementar sobre os princípios gerais do sistema português de previdência social.

As provas indicadas na alínea a) poderão ter duração de duas horas e meia cada uma e a mencionada na alínea b) a duração de uma hora.

O concurso é válido por um ano.

A N T O L O G I A

CIÊNCIA E TÉCNICA

Passagem da alocução de Paul Langevin proferida na Sorbonne em 18 de Maio de 1939 no jubileu científico de Élie Cartan

Há quatro ou cinco anos, um engenheiro americano, Gabriel Kron, resumia uma série de artigos destinados aos técnicos numa memória intitulada «Dinâmica não riemanniana das máquinas eléctricas rotativas». Aí mostrou o autor que as novas geometrias permitem realizar ao electrotécnico o equivalente do que Lagrange conseguiu com a mecânica analítica. Afirma que o problema da rede eléctrica mais geral, isto é, dum conjunto de máquinas eléctricas rotativas associadas dum modo qualquer, se reduz ao problema do movimento duma partícula num espaço não riemanniano a um número de dimensões igual ao número de graus de liberdade do sistema, com conexão afim disimétrica, isto é, com torsão, sendo a partícula submetida a uma força não conservativa determinada pela sua posição e a uma resistência de atrito proporcional à sua velocidade.

O intuito desta memória é o de mostrar aos engenheiros

electrotécnicos que existe um novo e poderoso ramo das matemáticas admiravelmente adaptado à verificação das teorias respeitantes aos inúmeros tipos de máquinas rotativas.

O emprego deste novo método permite, nos cálculos práticos, uma economia de tempo considerável e relação aos processos actuais.

Além disso, e em contrapartida, as máquinas eléctricas parece fornecerem uma representação muito mais concreta das geometrias não riemannianas do que a teoria do campo unitário na Relatividade Generalizada. O leitor da memória de Kron constatará com este está familiarizado com a maioria das noções novas, mas que em lugar de lhes dar os nomes de tensor métrico ou de símbolo de Christoffel, as conhece já sob os nomes de indutância ou de força electromotriz induzida.

Tradução de M. ZALUAR

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1943)

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 1

I

1556 — Forme a equação biquadrada de que são raízes os números que constituem uma solução inteira e positiva da equação $5x + 3y = 11$. R: Uma solução inteira da equação proposta é:

$x_1 = 1, y_1 = 2$ e as soluções gerais $x = 1 + 3m$ $y = 2 - 5m$ o que mostra ser x_1, y_1 a única solução inteira e positiva. A biquadrada terá então por raízes 1, -1, 2 e -2 e será $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ visto as raízes da resolvente serem 1 e 4.

1557 — Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ para que as suas raízes sejam reais e o valor d