vimentos em série de Taylor e Maclaurin. Uso das derivadas no estudo da variação de uma função de uma variável real. O integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Diferenças de uma função. Notação simbólica, os símbolos Δ e E. Notação factorial. Diferenças de um polinómio. Fórmula de interpolação de Newton e sua extensão às diferenças divididas. Fórmula de interpolação de Lagrange. Subdivisão de intervalos.

Somação. A função $U_x\,V_x$; somação por partes. O operador Σ e a sua relação com o operador Δ. Determinação da soma de séries.

Operador $D \equiv \frac{d}{dx}$ e operador Δ. Aplicações simples a derivação numérica.

Fórmula de Euler-Maclaurin. Aplicacões simpl[es à] integração numérica.

Probabilidade. Probabilidades totais. Probabili[da]des compostas. Esperança matemática. Provas re[pe]tidas. Probabilidades geométricas. A lei da probab[ili]dade de Gauss.

b) Uma prova elementar sôbre os princípios ge[rais] do sistema português de previdência social.

As provas indicadas na alínea *a)* poderão ter duração de duas horas e meia cada uma e a menc[io]nada na alínea *b)* a duração de uma hora.

O concurso é válido por um ano».

ANTOLOGIA

CIÊNCIA E TÉCNICA

Passagem da alocução de Paul Langevin proferida na Sorbonne em 18 de Maio de 1939 no jubileu científico de Élie Cartan

Há quatro ou cinco anos, um engenheiro americano, Gabriel Kron, resumia uma série de artigos destinados aos técnicos numa memória intitulada «Dinâmica não riemanniana das máquinas electricas rotativas». Aí mostrou o autor que as novas geometrias permitem realizar ao electrotécnico o equivalente do que Lagrange conseguiu com a mecânica analítica. Afirma que o problema da rede eléctrica mais geral, isto é, dum conjunto de máquinas eléctricas rotativas associadas dum modo qualquer, se reduz ao problema do movimento duma partícula num espaço não riemanniano a um número de dimensões igual ao número de graus de liberdade do sistema, com conexão afim disimétrica, isto é, com torsão, sendo a partícula submetida a uma fôrça não conservativa determinada pela sua posição e a uma resistência de atrito proporcional à sua velocidade.

O intuito desta memória é o de mostrar aos engenheiros electrotécnicos que existe um novo e podero[so] ramo das matemáticas admiràvelmente adaptado [à] verificação das teorias respeitantes aos inúmeros tip[os] de máquinas rotativas.

O emprêgo dêste novo método permite, nos cálcul[os] práticos, uma economia de tempo considerável e[m] relação aos processos actuais.

Além disso, e em contrapartida, as máquinas eléct[ri]cas parece fornecerem uma representação muito ma[is] concreta das geometrias não riemannianas do que [a] teoria do campo unitário na Relatividade Genera[li]zada. O leitor da memória de Kron constatará co[mo] êste está familiarizado com a maioria das noçõ[es] novas, mas que em logar de lhes dar os nomes de te[n]sor métrico ou de símbolo de Christoffel, as conhe[ce] já sob os nomes de indutância ou de fôrça electr[o]-motriz induzida.

Tradução de M. ZALUAR

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1943)

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 1

I

1556 — Forme a equação biquadrada de que são raízes os números que constituem uma solução inteira e positiva da equação $5x+3y=11$.
R: *Uma solução inteira da equação proposta é:* $x_1=1$, $y_1=2$ *e as soluções gerais* $x=1+3m$, $y=2-5m$ *o que mostra ser* x_1, y_1 *a única soluçã[o] inteira e positiva. A biquadrada terá então po[r] raízes* $1, -1, 2$ *e* -2 *e será* $x^4-5x^2+4=0$ *visto a[s] raízes da resolvente serem* 1 *e* 4.

1557 — Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=$[0] para que as suas raízes sejam reais e o valor d uma delas seja inverso do da outra. R: $b^2-4ac>0$ *e* $c=a$, *ou seja* $b^2-4a^2>0$ *com* $c=a$.

1558 — Defina radicais semelhantes. Efectue a operação $\sqrt{810}-\sqrt{250}+\sqrt{40}$. R: $\sqrt{810}-\sqrt{250}+\sqrt{40}=9\sqrt{10}-5\sqrt{10}+2\sqrt{10}=6\sqrt{10}$.

II

1559 — Determine, por logaritmos, a área de um triângulo isósceles inscrito num círculo de 5 metros de raio, sabendo que é de $24^o 15'$ a medida do ângulo oposto à base. R: *A metade do lado da base do triângulo é dada pela expressão:* $5 \operatorname{sen} 24^o 15'$, *visto o ângulo ao centro cujos lados passam pelas extremidades da base, medir* 49^o. *A altura do triângulo é* $5+5\cos 24^o 15' = 5(1+\cos 24^o 15')=10\cos^2 12^o 7' 30''$ *e a área terá por medida* $A=5\cdot 10\cdot \operatorname{sen} 24^o 15' \cos^2 12^o 7' 30''$ *donde* $\log A = 1+\log 5+\log \operatorname{sen} 24^o 15' + 2\log\cos 12^o 7' 30'' = 1+0{,}69897+\overline{1}{,}61354+\overline{1}{,}98040=1{,}29291$ *e* $A=19{,}63\ m^2$.

1560 - Determine, sem recorrer às tábuas, o valor de $\sec 960^o$. R: $\sec 960^o = 1:\cos 960^o = 1:\cos 240^o = -1:\cos 60^o = -1:1/2=-2$.

III

1561 — Desenhe um paralelogramo e uma sua diagonal; por um ponto desta tire paralelas aos lados do paralelogramo. Formam-se assim quatro novos paralelogramos, dois dos quais não são atravessados pela diagonal traçada; demonstre que êstes são equivalentes. R: *Seja* [ABCD] *o paralelogramo e* CB *uma das suas diagonais. Seja* E *um ponto dessa diagonal e* C'D' *uma paralela ao lado* CD *e* A'B' *uma paralela ao lado* AC *passando ambas pelo ponto* E. *Consideremos na figura os paralelogramos* [AC'EB'] *e* [A'ED'D], *cuja equivalência queremos demonstrar. Os triângulos* [ABC] *e* [BCD] *são iguais assim como* Δ[C'EC] = Δ[CEA'] *e* Δ[BED'] = Δ[BB'E]. *Ora* Ar. [A'ED'D] = Ar. [BCD] − Ar. [BD'E] − Ar. [EA'C] *e* Ar. [AB'EC] = Ar. [ABC] − Ar. [B'BE] − Ar. [C'EC] *donde resulta* Ar. [A'ED'D] = Ar. [AB'EC'].

1562 — *a)* Considere um triângulo escaleno. ¿Poderão não ser agudos os ângulos internos adjacentes ao seu lado maior? Justifique a resposta. R: *Não; porque ao lado maior opõe-se o ângulo maior e se um só que fôsse dos ângulos adjacentes a êsse lado fôsse recto ou obtuso, como o ângulo oposto ao lado maior seria maior que êste, a soma dos ângulos do triângulo seria maior que* 180^o.

b) Defina o ângulo e distância de duas rectas não complanas.

IV

1563 — Demonstre que a soma de duas fracções irredutíveis cujos denominadores sejam números primos entre si é uma fracção irredutível. R: *Sejam* a/p *e* b/q *as duas fracções em que* $(p, q)=1$; $(a, p)=1$ *e* $(b, q)=1$. *A soma das duas fracções é* $\frac{aq+bp}{pq}$; *ora para que esta fracção não fôsse irredutível era necessário que os seus termos admitissem um divisor comum diferente de* 1. *Êsse divisor dividindo* pq *teria que dividir ou* p *ou* q. *Se dividisse* p *como divide* aq+bp *dividiria* aq *e como não divide* q *dividiria* a *o que é impossível visto que* $(a, p)=1$. *Se dividisse* q, *dividindo* aq+bp *dividiria* bp *e não dividindo* p *dividiria* b *o que é também impossível pois* $(b, q)=1$. *Então não existe divisor comum ao numerador e denominador e a fracção é irredutível.*

Soluções dos n.^{os} 1556 a 1563 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras 29 de Julho de 1943. — Ponto n.º 1.

ARITMÉTICA

1564 — Definições, propriedades e determinação do m. d. c e m. m. c. Determine os números de quatro algarismos que são múltiplos comuns de 24, 72 e 150. R: *Os múltiplos comuns de* 24, 72 *e* 150 *com quatro algarismos são os múltiplos do* m. m. c. (24, 72, 150) = 1800 *compreendidos entre* 1000 *e* 10000 *que são* 1800, 3600, 5400, 7200 *e* 9000.

ÁLGEBRA

1565 — ¿Existem valores reais de x para os quais a soma $1+1/x+1/x^2$ seja negativa? Porquê? R: *Para a soma* $1+1/x+1/x^2=(x^2+x+1)/x^2$ *ser negativa, deve ter-se* $x^2+x+1<0$, *para* x *real qualquer, por ser* $x^2>0$. *Ora esta inequação é impossível visto que os zeros do trinómio, primeiro membro, são* $\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$, *números complexos, e, como sabemos, nesta hipótese, para* x *real qualquer, será* $x^2+x+1>0$. *Não há pois valores reais de* x *que tornem negativa a soma em questão.*

CÁLCULO NUMÉRICO

1566 — Calcule a área de um triângulo equilátero cujo lado é igual a 273,47 metros. R: *É fácil ver que, num triângulo equilátero de lado* a, *é* $\sqrt{3}\cdot a^2/4$ *a sua área. No nosso caso teremos:* $S=1/4\cdot(273{,}47)^2\cdot\sqrt{3}$ *e portanto, aplicando logaritmos,* $\log S = 2\log 273{,}47 + 1/2\cdot\log 3 + \operatorname{colog} 4 = 4{,}873824+0{,}23856+\overline{1}{,}39794=4{,}510324$, *donde* $S=32458{,}769\ m^2$.

Geometria Plana

1567 — *a)* Semelhança de polígonos; definições, propriedades e relações numéricas mais importantes. *b)* São dadas duas circunferências de raios r e R, tangentes exteriormente. Calcule o perímetro e a área do quadrilátero determinado pelos dois centros e os dois pontos de tangência correspondentes a uma tangente exterior comum. R: *Se chamarmos* O *e* O′ *os centros das circunferências de raios respectivamente* R *e* r, *tangentes exteriormente,* A *e* B *os pontos de tangência correspondentes a uma tangente exterior comum, respectivamente sôbre as circunferências* O *e* O′, *teremos, no quadrilátero* [ABO′O], *que é fácil ver ser um trapézio rectângulo:* $\overline{OO'}=R+r$, $\overline{OA}=R$, $\overline{O'B}=r$ *e* $\overline{AB}^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4rR \to \overline{AB}=2\sqrt{rR}$. *Virá portanto:*

a) — *perímetro de* $[ABO'O]=2\,[R+r+\sqrt{rR}]$.

b) — *área de* $[ABO'O]=(R+r)\sqrt{rR}$.

Geometria no Espaço

1568 — Calcule o volume e a área do sólido gerado pela rotação, em tôrno da hipotenusa, de um triângulo rectângulo de catetos $2a$ e $3a$. R: *O sólido gerado é constituído por dois cones de revolução de geratrizes* 3a *e* 2a, *de base comum, cujo raio é a altura, referente à hipotenusa, do triângulo dado, e de alturas* m *e* n, *sendo* m *e* n *os segmentos determinados sôbre a hipotenusa do triângulo pela sua altura referente a esta;* $m+n=\sqrt{9a^2+4a^2}=a\sqrt{13}$. *O raio da base dos cones em questão, determina-se fàcilmente atendendo à relação* $R\cdot a\sqrt{13}=3a\cdot 2a \to R=6a/\sqrt{13}$ *(num triângulo rectângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura referente a esta). Teremos portanto:*

1) — *área* $S=\pi R(g+g')$, *com* $g=3a$ *e* $g'=2a$, $\to S=11\sqrt{13}\,a^2\pi/13$;

2) — *volume* $V=\pi R^2 m+\pi R^2 n=\pi R^2(m+n)=12\cdot\sqrt{13}\,a^3\pi/13$.

Trigonometria

1569 — Exprima a soma $S=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}3\alpha$ em função de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. R: $S=\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos2\alpha=\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha=\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,[1+2\cos\alpha]$.

Soluções dos n.os 1564 a 1569 de O. Morbey Rodrigues.

Instituto Superior Técnico — 30 de Julho de 1943.

1570 - Três ciclistas fazem o mesmo percurso. A velocidade do primeiro é superior à do segundo em 5 km. à hora. O terceiro, depois de acompanhar o primeiro durante 30 km., toma a velocidade do segundo, chegando à meta 18 minutos antes dêle, mas 42 minutos depois do primeiro. Calcule a velocidade de cada ciclista e o número de quilómetros do percurso. R: *Designemos por* v km/h *a velocidade do primeiro ciclista e por* e km. *o percurso. O tempo* t_1 *por êle dispendido no percurso de* e km. *será* $t_1=e/v$ *(referiremos todos os tempos à unidade hora). A velocidade do segundo ciclista é, portanto, de* $(v-5)$ km/h *e o tempo por êle dispendido no percurso será pois,* $t_2=e/(v-5)$. *O terceiro ciclista percorreu* e km. *no tempo* t_3 *igual à soma dos tempos gastos em percorrer* 30 km. *à velocidade* v km/h *e* $(e-30)$ km. *à velocidade* $(v-5)$ km/h; *isto é:*

$$t_3=\frac{30}{v}+\frac{e-30}{v-5}. \quad \textit{Sabemos ser} \quad \begin{cases} t_3=t_2-0{,}3 \\ t_3=t_1+0{,}8 \end{cases}.$$

Estamos em face dum sistema de duas equações a duas incógnitas, que resolvido dará:

$$\begin{cases} e=110\text{ km} \\ v=\ 25\text{ km/h}. \end{cases}$$

É fácil calcular as velocidades dos outros dois ciclistas.

1571 — É dado um triângulo equilátero de lado a. Forme outro triângulo cujos vértices sejam os pontos médios dos lados dêste triângulo. Proceda em relação ao triângulo obtido como procedeu com o triângulo dado e assim sucessivamente. Exprima em função de a o limite da soma dos perímetros das circunferências circunscritas aos triângulos. R: *Tendo em atenção o teorema que nos diz, que é paralelo à base e igual a* 1/2 *desta, o segmento de recta que tem por extremos os pontos médios dos outros dois lados dum triângulo qualquer, é fácil ver que os lados dos triângulos equiláteros que se vão formando pelo processo de construção indicado, têm respectivamente por medida* $a, a/2, a/2^2, a/2^3, \dots a/2^{n-1}, \dots$. *Sabendo que o lado* l *dum triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio* R *é* $l=R\sqrt{3}\to R=l\sqrt{3}/3$, *é fácil concluir que os perímetros das circunferências circunscritas àqueles triângulos, são respectivamente:*

$$\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2\cdot 3},\ \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2^2\cdot 3},\ \cdots\ \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2^{n-1}\cdot 3},\ \cdots.$$

O limite da sua soma, é o limite da soma de n *termos duma progressão geométrica de 1.º termo* $2\pi a\sqrt{3}/3$ *e cuja razão é* 1/2. *Teremos pois que calcular*

$$L=\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)=\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/2^n}{1-1/2}=\frac{4\pi a\sqrt{3}}{3}.$$

1572 — Verifique a identidade $\cos(2B-C)=(3a^2-4b^2)\cdot b/a^3$ sendo B e C ângulos de um triângulo rectângulo em A, e b, c e a os lados opostos a êsses ângulos. R: *Como* $B=\pi/2-C$, *teremos* (1) $\cos(2B-C)=\cos(\pi-3C)=-\cos 3C=\cos C(3-4\cos^2 C)$. *No triângulo rectângulo em questão, sabemos que se verifica a relação* $b=a\cos C \to \cos C=b/a$ *que substituido no 2.º membro de* (1) *conduzirá a* $\cos(2B-C)=b/a\cdot(3-4b^2/a^2)=b/a^3\cdot(3a^2-4b^2)$ c. q. v.

1573 — É dado um triângulo isósceles $[ABC]$ de base $\overline{AB}=2a$. Exprima a distância entre os centros das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo em função da base e do ângulo oposto. Verifique a partir da relação obtida que o triângulo é equiângulo se os dois centros coïncidirem. R: *Designemos por* O *e* O', *respectivamente, os centros das circunferências circunscrita e inscrita ao triângulo dado e por* $\overline{CH}$ *a altura relativa à base* $\overline{AB}$. *É sôbre a recta* CH *que se encontram, evidentemente,* O *e* O'; *escolhendo sôbre ela um sentido positivo, e considerando segmentos orientados, teremos em qualquer caso, isto é, para qualquer valor de* $\widehat{C}$, *a relação:* $\overline{OO'}=\overline{OH}-\overline{O'H}$. *Desenhando uma figura deduz-se fàcilmente que:* $\overline{OH}=a\cot g\, C$ *e* $\overline{O'H}=a\,tg(\pi/4-C/4)$ *e, portanto,* $\overline{OO'}=a\,[\cot g\, C-tg(\pi/4-C/4)]$. *O caso de coïncidência dos centros* $\overline{OO'}=0$ *corresponde aos valores de* $\widehat{C}\,(0<C<2\pi)$, *raizes da equação*. $\cot g\, C-tg(\pi/4-C/4)=0$, *que é fácil de ver ser verificada para* $C=\pi/3$, *caso do triângulo equilátero.*

1574 — Num círculo de centro C e raio R trace dois raios CA e CM que formem entre si um ângulo dado α. Calcule, em função de R e de α, o volume do sólido gerado pelo triângulo $[CAM]$ quando faz uma rotação completa em tôrno da tangente à circunferência no ponto A. R: *O volume gerado* V *é a diferença dos volumes* V_1 *e* V_2, *respectivamente dos dois sólidos seguintes:*
1) — Tronco de cone de revolução, *de raios das bases* R *e* $\overline{MP}$, *de geratriz* R *e de altura* $\overline{AP}$ *em que* P *é o pé da perpendicular baixada de* M *sôbre a tangente à circunferência no ponto* A.

2) — Cone de revolução, *de geratriz* $\overline{AM}$, *altura* $\overline{AP}$ *e raio da base* $\overline{MP}$.

Vê-se fàcilmente que $\overline{AM}=2R\cdot\text{sen}\,\alpha/2$, $\overline{MP}=\overline{AM}\cdot\text{sen}\,\alpha/2=2R\cdot\text{sen}^2\alpha/2$, $\overline{AP}=\overline{AM}\cdot\cos\alpha/2=R\,\text{sen}\,\alpha$. *Tendo em atenção às expressões dos volumes dum tronco de cone de revolução e dum cone circular recto, respectivamente:* $V'=\pi h(r^2+r_1^2+rr_1)/3$ (h *altura,* r *e* r_1 *raios das bases*), $V''=\pi r^2 h/3$ (r *raio da base e* h *altura*) *teremos, no nosso caso:*
$V_1=\pi/3\cdot R\,\text{sen}\,\alpha\cdot(R^2+4R^2\cdot\text{sen}^4\alpha/2+2R^2\cdot\text{sen}^2\alpha/2)$,
$V_2=\pi/3\cdot R\,\text{sen}\,\alpha\cdot 4R\cdot\text{sen}^4\alpha/2$,
$V=V_1-V_2=\pi R^3/3\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot(1+2\,\text{sen}^2\alpha/2)$.

1575 — Sôbre as três arestas de um triedro tri-rectângulo de vértice V marque respectivamente os comprimentos $\overline{VA}=3a$, $\overline{VB}=\overline{VC}=3a\sqrt{2}$. Determine a distância do vértice V ao plano do triângulo $[ABC]$. R: *A distância* $\overline{VH}$ *do vértice* V *ao plano do triângulo* $[ABC]$ *não é mais do que a altura relativa à hipotenusa dum triângulo* $[VAD]$ *rectângulo em* V, *de catetos* $\overline{VA}=3a$ *e* $\overline{VD}$ (*altura do triângulo* $[BVC]$ *rectângulo em* V *e isósceles*) *e hipotenusa* $\overline{AD}$ (*altura do triângulo* $[ABC]$). *É facil ver que se tem* $\overline{VD}=3a$, $\overline{AD}=3a\sqrt{2}$ *e que portanto* $3a\cdot 3a=\overline{VH}\cdot 3a\sqrt{2}\to\overline{VH}=3a\sqrt{2}/2$.

Soluções dos n.os 1570 a 1575 de Orlando M. Rodrigues.

CORRECÇÃO

Problema **1524,** pág. 22, do n.º 17, onde se lê *diâmetro* deve ler-se *raio.* A ser o *diâmetro* e não o *raio* igual a 13,17 m deveria ter-se $l_7=13{,}17\,\text{sen}\,25°\,43'\,51''=5{,}714$ m.

J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º exame de freqüência, 1943-44.** — Ponto n.º 4.

I

1576 — Para que valores de x converge a série $\frac{2x}{x-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3+\cdots$? R: *A série dos módulos converge para os valores de* x *tais que* $\frac{2|x|}{|x-1|}<1$, i. e., *para os valores de* x *cujas imagens são os pontos do interior da circunferência com centro na imagem de* $-1/3$ *e raio* $2/3$; *para êsses valores a série dada converge absolutamente. Para os pontos da circunferência a série dos módulos é a série harmónica*