1572 — Verifique a identidade $\cos(2B-C)=$ $=(3a^2-4b^2)\cdot b/a^3$ sendo B e C ângulos de um triângulo rectângulo em A, e b, c e a os lados opostos a êsses ângulos. R: *Como* $B=\pi/2-C$, *teremos* (1) $\cos(2B-C)=\cos(\pi-3C)=-\cos 3C=$ $=\cos C(3-4\cos^2 C)$. *No triângulo rectângulo em questão, sabemos que se verifica a relação* $b=a\cos C \rightarrow \cos C=b/a$ *que substituido no 2.º membro de* (1) *conduzirá a* $\cos(2B-C)=b/a\cdot$ $\cdot(3-4b^2/a^2)=b/a^3\cdot(3a^2-4b^2)$ c. q. v.

1573 — É dado um triângulo isósceles $[ABC]$ de base $\overline{AB}=2a$. Exprima a distância entre os centros das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo em função da base e do ângulo oposto. Verifique a partir da relação obtida que o triângulo é equiângulo se os dois centros coïncidirem. R: *Designemos por* O *e* O', *respectivamente, os centros das circunferências circunscrita e inscrita ao triângulo dado e por* $\overline{CH}$ *a altura relativa à base* $\overline{AB}$. *É sôbre a recta* CH *que se encontram, evidentemente,* O *e* O'; *escolhendo sôbre ela um sentido positivo, e considerando segmentos orientados, teremos em qualquer caso, isto é, para qualquer valor de* $\widehat{C}$, *a relação:* $\overline{OO'}=\overline{OH}-\overline{O'H}$. *Desenhando uma figura deduz-se fàcilmente que:* $\overline{OH}=a\,\mathrm{cotg}\,C$ *e* $\overline{O'H}=a\,\mathrm{tg}(\pi/4-C/4)$ *e, portanto,* $\overline{OO'}=a\,[\mathrm{cotg}\,C-\mathrm{tg}(\pi/4-C/4)]$. *O caso de coïncidência dos centros* $\overline{OO'}=0$ *corresponde aos valores de* $\widehat{C}\,(0<C<2\pi)$, *raizes da equação*. $\mathrm{cotg}\,C-\mathrm{tg}(\pi/4-C/4)=0$, *que é fácil de ver ser verificada para* $C=\pi/3$, *caso do triângulo equilátero.*

1574 — Num círculo de centro C e raio R trace dois raios CA e CM que formem entre si um ângulo dado α. Calcule, em função de R e de α, o volume do sólido gerado pelo triângulo $[CAM]$ quando faz uma rotação completa em tôrno da tangente à circunferência no ponto A. R: *O volume gerado* V *é a diferença dos volumes* V_1 *e* V_2, *respectivamente dos dois sólidos seguintes:*

1) — Tronco de cone de revolução, *de raios das bases* R *e* $\overline{MP}$, *de geratriz* R *e de altura* $\overline{AP}$ *em que* P *é o pé da perpendicular baixada de* M *sôbre a tangente à circunferência no ponto* A.

2) — Cone de revolução, *de geratriz* $\overline{AM}$, *altura* $\overline{AP}$ *e raio da base* $\overline{MP}$.

Vê-se fàcilmente que $\overline{AM}=2R\cdot\mathrm{sen}\,\alpha/2$, $\overline{MP}=\overline{AM}\cdot$ $\cdot\,\mathrm{sen}\,\alpha/2=2R\cdot\mathrm{sen}^2\alpha/2$, $\overline{AP}=\overline{AM}\cdot\cos\alpha/2=R\,\mathrm{sen}\,\alpha$. *Tendo em atenção às expressões dos volumes dum tronco de cone de revolução e dum cone circular recto, respectivamente:* $V'=\pi h(r^2+r_1^2+rr_1)/3$ (h *altura,* r *e* r_1 *raios das bases*), $V''=\pi r^2 h/3$ (r *raio da base e* h *altura*) *teremos, no nosso caso:*
$V_1=\pi/3\cdot R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot(R^2+4R^2\cdot\mathrm{sen}^4\alpha/2+2R^2\cdot\mathrm{sen}^2\alpha/2)$,
$V_2=\pi/3\cdot R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot 4R\cdot\mathrm{sen}^4\alpha/2$,
$V=V_1-V_2=\pi R^3/3\cdot\mathrm{sen}\,\alpha\cdot(1+2\,\mathrm{sen}^2\alpha/2)$.

1575 — Sôbre as três arestas de um triedro tri-rectângulo de vértice V marque respectivamente os comprimentos $\overline{VA}=3a$, $\overline{VB}=\overline{VC}=3a\sqrt{2}$. Determine a distância do vértice V ao plano do triângulo $[ABC]$. R: *A distância* $\overline{VH}$ *do vértice* V *ao plano do triângulo* [ABC] *não é mais do que a altura relativa à hipotenusa dum triângulo* [VAD] *rectângulo em* V, *de catetos* $\overline{VA}=3a$ *e* $\overline{VD}$ (*altura do triângulo* [BVC] *rectângulo em* V *e isósceles*) *e hipotenusa* $\overline{AD}$ (*altura do triângulo* [ABC]). *É facil ver que se tem* $\overline{VD}=3a$, $\overline{AD}=$ $=3a\sqrt{2}$ *e que portanto* $3a\cdot 3a=\overline{VH}\cdot 3a\sqrt{2}\rightarrow\overline{VH}=$ $=3a\sqrt{2}/2$.

Soluções dos n.os 1570 a 1575 de Orlando M. Rodrigues.

CORRECÇÃO

Problema **1524,** pág. 22, do n.º 17, onde se lê *diâmetro* deve ler-se *raio*. A ser o *diâmetro* e não o *raio* igual a 13,17 m deveria ter-se $l_7=13{,}17\,\mathrm{sen}\,25°43'51''=$ $=5{,}714$ m.

J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de freqüência, 1943-44.** — Ponto n.º 4.

I

1576 — Para que valores de x converge a série $\frac{2x}{x-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3+\cdots$? R: *A série dos módulos converge para os valores de* x *tais que* $\frac{2|x|}{|x-1|}<1$, i. e., *para os valores de* x *cujas imagens são os pontos do interior da circunferência com centro na imagem de* $-1/3$ *e raio* $2/3$; *para êsses valores a série dada converge absolutamente. Para os pontos da circunferência a série dos módulos é a série harmónica* *e a convergência nunca é absoluta. Para* $x=1/3$ *a série converge; para* $x=-1$ *a série diverge.*

1577 — Primitivar

$$(2x)^2 \log x + \frac{1}{\sqrt{4k^2 - x^2}} + \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{\cos 2x - 1}.$$

R: *Primitive-se o 1.º termo por partes pondo* $v' = x^2$; *obter-se-à* $4/3 \cdot x^3 (\log x - 1/3)$. *O 2.º têrmo é a derivada de* $\operatorname{arc\,sen} x/2k$. *No 3.º têrmo, considere-se que* $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ *e* $\cos 2x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 x$; *decomponha-se: os têrmos obtidos serão as derivadas de* $-\log |\operatorname{sen} x|$ e $\dfrac{1}{2 \operatorname{sen} x}$.

578 — Calcule o valor da derivada da função $y = \log e^{\log e^{\operatorname{arc\,sen} 1/x}}$ para $x=2$. R: *Será* $y = \operatorname{arc\,sen} 1/x = \operatorname{arc\,cosec} x$ *e portanto*

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad e \quad y'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

II

1579 — Sendo A_1 e A_2 as secções que definem $\sqrt{5}$ quais são as que definem $3^{-\sqrt{5}}$? R: *Consideremos todos os racionais* c_1, *taís que para algum número* a_2 *de* A_2, *se tenha* $c_1 < 3^{-a_2}$. *Êsses números constituem uma secção inferior* C_1, *da totalidade dos números racionais.* $3^{-\sqrt{5}}$ *é por definição o número definido pela secção* C_1. *A secção* C_2, *contígua de* C_1, *é a outra que também define o número e é constituída pelos números racionais* c_2 *tais que para algum número* a_1 *de* A_1 *se tenha* $c_2 < 3^{-a_1}$.

1580 — Diga quais são para o conjunto $1 + (-1)^n + (-1)^n/n$ os números l, L, λ, Λ e os seus pontos de acumulação. R: $l = -1$, $L = 5/2$, $\lambda = 0$ *e* $\Lambda = 2$; 0 *e* 2 *são os únicos pontos de acumulação.*

1581 — Mostre que a sucessão $1+1/3$, $1+1/3+1/9$, $1+1/3+1/9+1/27$, $\cdots$ é convergente e indique o seu limite. R: *Admitindo que* $u_n = 1 + 1/3 + 1/9 + \cdots + 1/3^n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}$ *tem-se* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3/2$ *e a sucessão é convergente.*

1582 — Determine os complexos cujos afixos são os outros dois vértices do quadrado de que são dois vértices opostos os afixos de $2-i$ e $2+3i$. R: *São* i *e* $4+i$.

1583 — Escreva na forma trigonométrica o número cujas raízes quárticas têm por afixos os vértices do quadrado inscrito na circunferência de centro na origem e raio 2, tal que o afixo situado no 1.º quadrante tem por argumento $\pi/6$.
R: $2^4 (\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)$.

1584 — Indique a razão pela qual a série alterna $5/4 - 7/6 + 9/8 + \cdots$ é divergente, embora seja $|u_{n+1}| < |u_n|$. R: *Porque* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

1585 — Por que motivo é $x > \log(1 + x^n/n!)$? R: *Para* $x > 0$ $e^x = 1 + \cdots + x^n/n! + \cdots > 1 + x^n/n!$ *e portanto* $x > \log(1 + x^n/n!)$.

1586 — Como é constituída a sucessão $u_n \to a$, caso a não seja ponto de acumulação de (u_n)? R: *Todos os têrmos a partir dessa certa ordem são iguais a* a.

1587 — O cóciente de duas funções $f(x)$ e $\varphi(x)$, contínuas no ponto $x=a$, é também contínua nesse ponto? Justifique a resposta. R: *É se* $\varphi(a) \neq 0$; *não é se* $\varphi(a) = 0$. *Neste caso a função toma para* $x=0$ *um valor infinito ou indeterminado. Neste último caso pode restabelecer-se a continuïdade pondo que o valor da função para* $x=0$ *é* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

1588 — Como diferem duas funções cujas derivadas diferem por uma expressão da forma $e^x + ax$? R: *A sua diferença é uma função* $e^x + ax^2/2 + b$ *em que* b *é uma constante.*

III

1589 — Verifique se a função

$$f(x) \begin{cases} = \operatorname{sen} x/x & \text{para } x \neq 0 \\ = 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$ é contínua no ponto $x=0$.

R: *É, porque* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

1590 — A partir da relação entre a derivada duma função e a da sua inversa, deduza a expressão da derivada da função inversa da tangente hiperbólica.

R: *De* $y = \operatorname{Arg\,tg\,th} x$ *tem-se, invertendo* $x = \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}$ *donde*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y} \quad e \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

1591 — Justifique a convergência absoluta da série $1 - 1/2^3 + 1/3^3 - \cdots$ e conclua, daí, justificando também, a natureza da série $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$ para os vários valores de x. R: *Considerando a série* $\sum u_n$ *dos módulos da 1.ª e pondo* $\dfrac{1}{1+\alpha} = \dfrac{n^3}{(n+1)^3} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *tem-se* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha = 3$ *e a série converge. Visto que* $\dfrac{|\operatorname{sen} nx|}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$ *a 2.ª série também é absolutamente convergente, qualquer que seja* x, *finito.*

Soluções dos n.ºs 1576 a 1591 de G. Ramos de Castro.

F. C. L. — Álgebra Superior — **Pontos do 1.º exame de freqüência, 1943.** — Ponto n.º 3.

I

1592 — Primitivar

$$\frac{2x-3}{(x-2)^2+1}+x^2 \operatorname{arc\,tg} x^3+x\frac{\cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}.$$

1593 — Derivar $y=2e^{\operatorname{arc\,sen} x \cdot \log|\operatorname{tg} x|}$.

1594 — Com uma das combinações

$$\begin{cases} y=\log\left|\sqrt{u+1}\times\cos\pi u\right| \\ u=\operatorname{sen}(x+\pi)\end{cases} \qquad \left|\begin{array}{l} y=2 \operatorname{arc\,sen}(u+1) \\ u=x^2+1\end{array}\right.$$

componha uma função e calcule o valor da 1.ª derivada para $x=0$.

II

1595 — Por que motivo dois números irracionais correspondem entre si outros números irracionais?

1596 — Se (x) tem elementos em $\left(r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n}\right)$ — por maior que seja o número natural n e qualquer que seja o número racional r em (a,b) — quais são os pontos de acumulação de (x) neste intervalo (a,b)?

1597 — Substituindo-se x pelo número irracional $\frac{1}{A}$ no polinómio de coeficientes inteiros ax^2+bx+c, obtém-se como resultado certo número inteiro d. Nesta hipótese, por que operações algébricas se pode calcular A partindo de números inteiros.

1598 — Que relação há entre os limites máximos dos conjuntos $\sqrt[n]{\sigma_n}$ e $\sqrt[n]{n\alpha_n}$? $(\alpha_n>0)$.

1599 — Quando a série $\sum u_n$ é simplesmente convergente, de que natureza é $\sum(-1)^n u_n$? Porquê?

1600 — Como se dispõem no plano os pontos em que a série $\sum\frac{n}{(z-a)^n}$ é convergente?

1601 — Por que razão é $e^x>\frac{x^n}{n^n}$? $(x>0)$

1602 — Calcule as raízes n do número $i^{\frac{1}{2}^n}$.

1603 — De que natureza é a sucessão dos valores de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ quando x tende para zero ao longo da sucessão $u_n=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$?

1604 — Conhece alguma função contínua no intervalo $(0,1)$ cujos valores nêsse intervalo possam exceder $\frac{1}{\varepsilon}$ por menor que seja ε?

III

1605 — Provar que, tendo $f(x)$ derivada (finita ou infinita) no ponto $x=a$, também $f(x)+\lambda x$ (λ constante) tem derivada nêsse ponto.

1606 — Quando os afixos dos valores $X^{1/3}$ e os de $Y^{1/3}$ são vértices dum hexágono regular, que relação liga X e Y?

1607 — Sabe achar ràpidamente a derivada de ordem n de $\frac{x}{x^2-1}$?

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de freqüência, 1943-44.** — Ponto n.º 5.

I

1608 — Primitivar

$$y=\frac{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}{1-\cos 2x}-\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+\frac{\log x^3}{x^2}.$$

1609 — Calcule o valor da derivada da função

$$y=[1-(e^x)^x]^{\operatorname{arc\,cos} x} \quad \text{para} \quad x=0.$$

1610 — Com alguma das combinações

$$\begin{cases} y=\operatorname{arc\,sec}(\log 1/u) \\ u=1/x\end{cases} \qquad \begin{cases} y=\log(\operatorname{arc\,tg} e^u) \\ u^2=1+\operatorname{tg}^2(x^2-1)\end{cases}$$

componha uma função de função e calcule o valor da sua 1.ª derivada para $x=1$.

II

1611 — Se a soma e o produto dos números irracionais A e B são conjuntamente racionais que operações algébricas é necessário executar partindo de números inteiros para obter A e B? Porquê?

1612 — Se u_n não tende para limite algum, mas $\frac{1}{u_n^2+1}$ tende para um certo limite que valor tem êste limite?

1613 — Tendo-se $0<u_n-a<\delta$ a partir de certa ordem $n(\delta)$, a partir de que ordem se tem $u_n^2-a^2<\delta$?

1614 — Qual a natureza da série $\sum\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)$?

1615 — Quais são os valores de $i^{\sqrt{2}}$?

1616 — Qual o valor exacto do módulo da soma de dois números imaginários de módulos 2 e 3 cujos argumentos diferem por $\pi/4$?

1617 — Sendo $\sum u_n$ simplesmente convergente, que se sabe da sucessão $|S_n|$?

1618 — Como se enuncia o teorema de Weierstrass para as funções contínuas?

1619 — Seja $f(x)$ uma função contínua e diferente de zero no ponto $x=0$, e seja λ_n o limite inferior dos valores de $\frac{1}{f(x)}$ no intervalo $(-1/n, 1/n)$. Tende λ_n para algum limite? Porquê?

1620 — Aplicando-se a fórmula de Taylor ao polinómio $f(z)$ no ponto $z=i$, que forma toma êsse polinómio?

III

1621 — Tomando-se os n primeiros têrmos da série $1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots$ obtém-se S com êrro inferior a $1/2n$ e superior a $\frac{1}{2(n+1)}$. Porquê?

1622 — Qual o menor valor (inteiro) de α quando a série $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}-\sqrt{n}}$ é convergente?

1623 — Supondo $f'(z)$ diferente de zero no ponto a, provar que existe um círculo de centro neste ponto dentro do qual $f(z)$ só toma o valor $f(a)$ quando $z=a$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **I.º Exame de freqüência, 1943.** — Ponto n.º 1.

I

1624 — Calcular, com êrro inferior a 10^{-3}, o valor de $sh\,z$ para $z=1$. R: *Tem-se* $\mathrm{sh}\,1=1+1/3!+1/5!+\cdots$. *Pondo* $k=u_{p+1}/u_p=(2p-1)!\,(2p+1)!=1/2p\,(2p+1)$ *reconhece-se que o critério de d'Alembert permite concluir da convergência da série. Seguindo o método indicado na* Gazeta de Matemática *n.º 11, p. 5, tem-se*

$$L(p)=\frac{1}{(2p+1)!-(2p-1)!}\cdot$$ *Reconhece-se que tomando* 3 *têrmos o êrro sistemático é inferior a* $0{,}0002$ *e portanto que calculando* $1/6$ *e* $1/120$ *até aos décimos-milésimos* sh1 *vem calculado a menos de* $0{,}0004<0{,}001$. *Será* $\mathrm{sh}\,1=1+0{,}1667+0{,}0083=1{,}1750$.

1625 — Primitivar

$$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{2x+3}}+\frac{1}{\mathrm{sen}\,(2x+1)}+\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{ch}\,x.$$

R: *O 1.º têrmo é a derivada de* $e^{\sqrt{2x+3}}$. *Para o 2.º têrmo, recorde-se que* $P\,\mathrm{cosec}\,u\cdot u'=\log|\,\mathrm{tg}\,u/2\,|$. *Para o 3.º, primitive-se por partes* $(P u v'=uv-Pu'v)$ *pondo* $v'=\mathrm{ch}\,x$, *uma vez para obter esta identidade, outra para calcular* $Pu'v$. *Obtém-se finalmente*

$e^{\sqrt{2x+3}}+1/2\log\mathrm{tg}\,|x+1/2|+1/2\,(\mathrm{sen}\,x\;\mathrm{ch}\,x-\cos x\,\mathrm{sh}\,x)$.

1626 — Calcular para $x=\pi$ a segunda derivada da primitiva pedida no problema anterior. R: *A 2.ª derivada da primitiva duma função* y (x) *é a 1.ª derivada dessa função. Neste caso*

$y'(x)=(1/x-1/2x^{3/2})\,e^{\sqrt{2x+3}}-2\cot(2x+1)\,\mathrm{cosec}(2x+1)+$ $+\cos x\;\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sen}\,x\;\mathrm{sh}\,x$ *donde* $y'(\pi)$.

II

1627 — Como se distingue na representação decimal um número racional dum número irracional? R: *A dízima dum racional é periódica, a dum irracional não.*

1628 — Qual o limite de uma sucessão decrescente limitada?

1629 — Módulo e argumento principal de $\frac{1+i}{1-i}$. R: 1 *e* $\pi/2$.

1630 — Quando é real o produto de dois imaginários? R: *Quando um é o produto do conjugado do outro por um número real, como se conclui procurando as relações entre* a, b, x *e* y *para que* $(a+bi)\,(x+iy)$ *tenha nulo o coeficiente de* i.

1631 — Definindo-se e^z como limite duma potência de expoente n, qual a base dessa potência? R: $e^z=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.

1632 — De que natureza é a série formada pelos cubos dos termos duma série alternada simplesmente convergente? R: *A série é alternada e como do* $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ *vem* $\lim_{n\to\infty}u_n^3=0$, *convergente. Pode ser simples ou absolutamente convergente como se infere nos casos correspondentes a* $u_n=(-1)^n/n^{1/3}$ *e* $u_n=(-1)^n/n$.

1633 — Para que valores de x converge $\sum nx^{2n}$?

R: *Pondo* $u_n=|\,nx^{2n}\,|$ *tem-se* $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n}\,|\,x\,|^2$. *A série é absolutamente convergente para* $|\,x\,|<1$, *divergente para* $|\,x\,|>1$. *Para* $x=|\,1\,|$ *a serie dos módulos diverge e portanto a série dada só pode convergir simplesmente; para* $x=+1$, *por exemplo, diverge.*

1634 — Que se quere significar ao dizer que $f(z)$ tende para A ao tender z para a? R: *Que* f (z) *é definida para os valores pelos quais* z *tende para* a *e que os valores que assume constituem uma sucessão convergente de limite* A.

1635 — Que valor tem no ponto $x=0$ a 4.ª derivada de $y=x^5\cos x+x^3$? R: *A 4.ª derivada de* x^3 *é nula; a de* $x^5\cos x$ *é um polinómio do 5.º grau em* x *sem termo independente cujos coeficientes são finitos para* $x=0$ *e que portanto também se anula para* $x=0$.

1636 — Em que teorema se fundamenta o método de primitivação por substituïção? R: *No teorema da derivação duma função de função.*

III

1637 — Pode aplicar-se o teorema do limite da soma ao cálculo do limite de $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}$ ($n-3$ parcelas)? R: *O limite da soma* $n-3/2n$ *é* $1/2$ *e a soma dos limites das parcelas* 0.

1638 — Exprimir $\operatorname{sh} 2x$ em $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$.
R: $\operatorname{sh} 2x = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \dfrac{(e^x-e^x)(e^x+e^x)}{2} = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

1639 — Com alguma das combinações

$$\begin{cases} y = x \text{ arc sen } u \\ u = \dfrac{1}{\sec^2 \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \text{arc sen } u \\ u = 2e^{x^2} \end{cases}$$

compor uma função de função e achar-se a derivada para $x=0$. R: *Na 2.ª,* $u \geq 2$ *e a função* $y(u)$ *não é definida no conjunto dos valores da função* $u(x)$. *Na 1.ª já o é. Aplicando o teorema da derivação duma função de função obtem-se ao cabo* $y'(0) = \text{arc sen} \cos^2 1$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de freqüência, 1942-43.** — Ponto n.º 3.

I

1640 — Derivar
$y = 1/x^2 - (\text{sen } x^2+1)^{-3/2} + \text{arc sec} \log 3^{1+x^2}$.

1641 — Primitivar
$$y = \frac{x}{x-\sqrt{1+x^2}} - \frac{x+4}{(x+1)^2+4} + \cos^4 x.$$

1642 — Calcular, com êrro inferior a $\dfrac{1}{10^3}$ a soma da série $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2+1} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} + \cdots$.

II

1643 — Quando o número positivo a não é cubo de algum número racional, que se entende por $\sqrt[3]{a}$?

1644 — Que são o limite superior L e o limite mínimo λ de um conjunto (x)?

1645 — Que valores têm l, L, λ e Λ no conjunto dos têrmos de uma sucessão crescente formada por números do intervalo $(0,1)$?

1646 — Que módulo e argumento principal têm o quadrado de $\dfrac{1}{(2-i)^3}$?

1647 — Se o segmento que une os afixos de z e z' é paralelo ao eixo dos yy, de que natureza é a diferença $z-z'$?

1648 — Pode uma série convergente conter uma infinidade de têrmos superiores aos têrmos correspondentes de uma série divergente de números positivos?

1649 — Se numa série de têrmos positivos S_{2n} tende para um limite, de que natureza é a série? Porquê?

1650 — Para que valores de x converge a soma das séries $\sum n^3 x^n$ e $\sum \dfrac{1}{n^3} x^n$?

1651 — Se $f(x)$ cresce com x no intervalo (a, b), que valores têm os limites l e L no conjunto dos valores de $f(x)$?

1652 — Que expressão tem a derivada de ordem n de um polinómio inteiro em x, de grau n.

III

1653 — Quando $u_n \to a$ e $\dfrac{u_n}{v_n} \to b$, que pode concluir-se da sucessão v_n?

1654 — Cinco pontos eqüidistantes sôbre a circunferência $|z|=3$ são sempre afixos das raízes quintas de um número? Porquê?

1655 — Averiguar se a série $1+\alpha+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}+\cdots$ é convergente. (α é real, não inteiro).

F. C. P. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Freqüência — Fevereiro de 1943.**

1656 — Considere-se o plano π, determinado de modo a conter o ponto $(1,2,1)$ como pé da perpendicular baixada da origem sôbre êle. Determinar seguidamente a equação dum novo plano que contenha o ponto de cota 2 do eixo $0z$ e que intercepte π segundo uma recta paralela ao plano $x0z$, de modo que os pontos desta recta se encontrem à distância 1 do último plano. R: Equação do plano π: *Êste plano contém o ponto* $P(1,2,1)$ *e é perpendicular à recta* $x-1=(y-2)/2=z-1$ *definida pelos pontos* P *e* $0(0,0,0)$. *A sua equação é, portanto,* $x+2y+z=6$. Equação do plano α: *Seja* $Ax+By+Cz=1$ *a equação do plano* α *(segundo plano do enunciado). Como contém o ponto* $A(0,0,2)$, *tem-se* $2C=1$, *ou* $C=1/2$. *A sua intersecção com o plano* π *é a recta* r) $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ Ax+By+Cz=1 \end{cases}$
ou seja $(x-a)/p=(y-b)/q=z/1$ *com*
$a=(2-6B)/(2A-B)$; $b=(6A-1)/(2A-B)$
$p=(B-2C)/(2A-B)$ *e* $q=(C-A)/(2A-B)$.
Como a recta r *tem de ser paralela ao plano* $x0z$ $(y=0)$, *tem-se* $(C-A)/(2A-B)=0$ *ou* $A=C=1/2$. *Por outro lado, a recta* r *está à distância* 1 *do plano* $x0z$. *Portanto* $(6A-1)/(2A-B)=1$ *ou seja* $4A+B=1$ *e* $B=-1$. *A equação do plano é, pois,* $x-2y+z=2$.

1657 — Determinar as equações da circunferência definida como se segue: *a)* Passa pelo ponto $(2,3,1/2)$ da recta $x=t+2$, $y=2t+3$, $z=t+1/2$; *b)* encontra-se no plano definido por aquela e pela recta $1-x=\dfrac{2y+1}{2}=$

$= -\frac{z}{2}$; *c)* tem como centro a intersecção das duas rectas. R: *Determinemos, em primeiro lugar, as coordenadas do centro da circunferência. Como diz o enunciado, é o ponto de intersecção das rectas* r) $x-2=(y-3)/2=z-1/2$ *(visto que* $t=x-2$, $t=(y-3)/2$ *e* $t=z-1$ 2) *e* s) $(x-1)/-1=y+1$ $2=z/-2$. *Portanto, é o ponto comum aos três planos* $2x-y=1$; $2x-2z=3$ *e* $2x-z=2$. *Quere dizer* $C(1/2, 0, -1)$. *A circunferência dada será definida pela equação da esfera de centro no ponto* C *e que passa pelo ponto* $A(2, 3, 1/2)$ *e pela equação do plano das rectas* r *e* s. Raio da esfera $r^2=(2-1/2)^2+3^2+(1/2+1)^2=27/2$. Equação da esfera $(x-1/2)^2+y^2+(z+1)^2=27/2$. Equação do plano. *A equação dos planos que contêm a recta* r *é:* $2x-y-1+k(2x-2z-3)=0$, *ou seja* $(2k+2)x-y-2kz-(1+3k)=0$. *Para que êste plano seja paralelo à direcção definida pela recta* s *é preciso que:* $-(2k+2)-1+4k=0$, *donde* $k=3/2$. *A equação do plano é, portanto,* $10x-2y-6z=11$. *Finalmente, a circunferência fica definida pelo sistema:*

$$\begin{cases} (x-1/2)^2+y^2+(z+1)^2=27/2 \\ 10x-2y-6z=11. \end{cases}$$

1658 — Determinar (em geometria plana): *a)* a equação da parábola cujo vértice tem, em relação ao sistema de eixos fixado, as coordenadas $(2, 1)$, cuja directriz é paralela a Oy e cujo parâmetro p tem o valor 2. *b)* determinar as coordenadas do foco e a equação da directriz. R: *Como a directriz da parábola é paralela ao eixo* Oy, *o seu eixo é a recta* $y=1$. *Mudando a origem dos eixos para o ponto* $M(0, 1)$, *a equoção da parábola é* $y'^2=4x'$ *visto que se tem* $p=2$). *No sistema de eixos dado será, portanto,* $y^2-2y=4x-1$.

1659 — Determinar a equação da superfície cónica que tem como directriz a elipse
$$\left| \begin{array}{r} \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1 \\ z=0 \end{array} \right.$$
e cujo vértice é o ponto que divide ao meio o segmento de comprimento 6, que une o ponto $(0, 4, 4)$ com um ponto da parte positiva do eixo Ox. R: Determinação das coordenadas do vértice: *Seja* $P(m, 0, 0)$ *o ponto da parte positiva do eixo* Ox *a que refere o problema. Tem-se* $\sqrt{m^2+16+16}=36$ *e, portanto,* $m=2$. *O vértice é o ponto médio do segmento definido pelos pontos* $P(2,0,0)$ *e* $M(0,4,4)$. *Quere dizer* $V(1,2,2)$. Determinação da equação da superfície cónica: *A equação obtem-se eliminando o parâmetro* k *entre as equações*

$(1+kx)^2/4+(2+ky)^2+(2+kz)^2/9=1$ *e* $2+kz=0$.

Portanto: $4x^2+16y^2+13z^2-4xz-16yz=0$.

1660 — Sendo dado o sistema linear $2x+y+z=0$, $x+ky+z=0$, $4x-y+3z=0$, fazer a sua discussão, supondo k arbitrário. Determinar k de modo que o sistema admita soluções diferentes da solução nula e escrever a expressão geral daquelas.

Soluções dos n.os 1656 a 1659 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º exame de freqüência. 17 de Fevereiro de 1943.

1661 — Estudar a igualdade
$$(i^2)^{1/n}=(i^{1/n})^2 \qquad (i^2=-1).$$
R: *É sabido que a igualdade* $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$ *só é válida sem restrições no campo complexo se* p *e* q *forem primos entre si. Logo, se* n *fôr impar, a igualdade dada é válida sem restrições, isto é, os dois radicais que nela figuram têm o mesmo número* n *de determinações que são respectivamente iguais. Se* n *fôr par* $n=2m$, *o radical que figura no primeiro membro tem* $n=2m$ *determinações de módulos iguais à unidade e de argumentos* $(\pi+2k\pi)/2m$ $(k=0, 1, 2, \cdots 2m-1)$ *entre as quais se encontram as* $n/2=m$ *determinações do radical do segundo membro. Com efeito, estas são também de módulo unitário e os seus argumentos são*
$$(\pi+4k'\pi)/2m \quad (k'=0, 1, 2 \cdots m-1).$$

1662 — Determinar um polinómio de grau não superior a 4 que tome os mesmos valores que a função $y(x)=\frac{x+1}{x-1}$ para $x=-4, -2, 0, 2, 4$.

1663 — Num círculo dado inscreve-se um hexágono, neste um círculo, neste um novo hexágono e assim sucessivamente até se construirem n hexágonos e n círculos. Sejam $A_1 A_2 \cdots A_n$, $A'_1 A'_2 \cdots A'_n$, respectivamente as áreas dos círculos e as dos hexágonos construídos. Calcular o cociente
$$\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{A'_1+A'_2+\cdots+A'_n}. \quad \text{R:} \ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Soluções dos n.os 1661 e 1663 de A. Sá da Costa.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º exame de freqüência extraordinário, 25 de Fevereiro de 1943.

1664 — Resolver a equação $(ax-b)^n=(a-bx)^n$. Considerar, em particular, o caso $n=4$.

1665 — Resolver o sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z-3t=0 \\ x-y+z-t-2u=0 \\ x-y-z+t-2u=0 \\ x+y-z-t=0 \end{array} \right.$$
e determinar aquelas soluções em que duas e só duas incógnitas tomam o valor zero. ¿ Existe alguma solução própria em que mais de duas incógnitas tomem o valor zero?

1666 — São dadas duas circunferências de raios R e r com os centros à distância d. Determinar sôbre a linha dos centros um ponto P tal que os segmentos das tangentes tiradas dêle para cada uma das circunferências sejam iguais. Calcular, nessa hipótese, as àreas dos triângulos isósceles com vértice em P e circunscritos às duas circunferências.

I. S. T.—MATEMÁTICAS GERAIS—**I.º ex. de freq. 1942-43.**

1667 — Prove que, sendo $w=\frac{2z-i}{iz+2}$, o afixo de $w=u+iv$ descreve a circunferência de raio 1, com centro na origem dos eixos $(u^2+v^2=1)$, quando o afixo de $z=x+iy$ descreve a mesma circunferência $(x^2+y^2=1)$. R: *Tem-se, como fàcilmente se vê:* $\mathrm{w}=\frac{2\mathrm{x}+(2\mathrm{y}-1)\,\mathrm{i}}{2-\mathrm{y}+\mathrm{ix}}$. *Há que mostrar que* $|\mathrm{w}|=1$. *Atendendo às condições impostas no problema e a que o módulo dum quociente é o quociente dos módulos do dividendo e do divisor, virá:*

$$|\mathrm{w}|=\frac{\sqrt{4\mathrm{x}^2+(2\mathrm{y}-1)^2}}{\sqrt{(2-\mathrm{y})^2+\mathrm{x}^2}}=\frac{\sqrt{4\mathrm{x}^2+4\mathrm{y}^2-2\mathrm{y}+1}}{\sqrt{4-2\mathrm{y}+\mathrm{y}^2+\mathrm{x}^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{5-2\mathrm{y}}}{\sqrt{5-2\mathrm{y}}}=1,\qquad \text{c. q. p.}$$

1668 — Trace os eixos rectangulares $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$. Desenhe os quadrados de vértices $P(a,0)$, $Q(0,a)$, $R(-a,0)$, $S(0,-a)$ e $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$. Suponha as figuras desenhadas em cartão e que se suprimem os triângulos $[APD]$, $[DSC]$, $[CRB]$, $[BQA]$. Levantando os triângulos $[APQ]$, $[BQR]$, $[CRS]$ e $[DSP]$ em tôrno respectivamente de $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$, forma-se uma pirâmide. Calcular a de modo que o volume dessa pirâmide seja máximo $(a<1)$. R: *É fácil ver que* $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{SP}}=\mathrm{a}\sqrt{2}$ *e que a altura da pirâmide é um cateto dum triângulo rectângulo, por exemplo* [VOP], *em que* V *é o vértice da pirâmide,* $\overline{\mathrm{VP}}$ *a hipotenusa* ($\overline{\mathrm{VP}}=\overline{\mathrm{AP}}$) *e* $\overline{\mathrm{OP}}$ *o outro cateto, semi-diagonal do quadrado, base da pirâmide. Como é* $\mathrm{OP}=\mathrm{a}$ *e* $\overline{\mathrm{VP}}=\sqrt{(1-\mathrm{a})^2+1}=\sqrt{\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}+2}$, *virá:* $\overline{\mathrm{VO}}=\sqrt{\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}+2-\mathrm{a}^2}=\sqrt{2\,(1-\mathrm{a})}$. *O volume da pirâmide* [VPQRS] *será pois* $\mathrm{f(a)}=2/3\cdot\mathrm{a}^2\sqrt{2\,(1-\mathrm{a})}$. *Há que determinar* a *de modo que esta função real, por ser* $\mathrm{a}<1$ *(por hipótese), seja máxima, ou, o que é o mesmo, que o seja a função* $\mathrm{F(a)}=\mathrm{a}^4(1-\mathrm{a})$. *Tem-se:* $\mathrm{F'(a)}=4\mathrm{a}^3-5\mathrm{a}^4=\mathrm{a}^3(4-5\mathrm{a})\rightarrow\mathrm{F'(a)}=0\rightarrow\mathrm{a}=0$ *(solução sem interêsse) e* $\mathrm{a}=4/5$. *É fácil ver que* $\mathrm{F''}(4/5)<0$ *e que portanto* $\mathrm{a}=4/5$ *é o valor de* a *para o qual o volume em questão é máximo.*

1669 — Mostre que, se é $y=\frac{1}{\sqrt{1-2ax+x^2}}$, será $(x-a)\,y+(1-2ax+x^2)\,y'=0$. *Derivando* y *obtém-se* $\mathrm{y}'=-(\mathrm{x}-\mathrm{a})\,(1-2\mathrm{ax}+\mathrm{x}^2)^{-3/2}$ *e fàcilmente se deduz a relação proposta.*

1670 — Calcular o verdadeiro valor de $\frac{2\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\theta}{\operatorname{tg}\theta-\theta}$ para $\theta=0$. R: *A função dada, para* $\theta=0$, *apresenta uma indeterminação da forma* 0/0. *Aplicando a Regra de l'Hospital, vem:*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos\theta-\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta-1}{\sec^2\theta-1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos\theta-\cos 2\theta-1}{\operatorname{tg}^2\theta}=$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\theta+2\operatorname{sen}2\theta}{2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\cos^3\theta\,(2\cos\theta-1)=1.$$

Soluções dos n.os 1667 a 1670 de O. Morbey Rodrigues.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. —GEOMETRIA DESCRITIVA—**I.º exame de freqüência. Fevereiro de 1943.**

1671 — *Geometria de Monge* — São dadas duas rectas enviesadas, uma de perfil e outra frontal. Conseguir, por uma mudança de planos de projecção, que as suas projecções horizontais fiquem paralelas. R: *Considere-se o plano que contém uma das rectas e é paralelo à outra. A mudança de planos de projecção que transforma aquêle plano num plano vertical resolve o problema.*

1672 — *Geometria de Monge* — Determine o ângulo do primeiro plano bissector com um plano paralelo à L. T., dado pelos traços. R: *Mudando de plano vertical (ou horizontal) de projecção para qualquer plano de perfil, transformam-se os planos dados em planos de tôpo (ou verticais): o seu ângulo é o dos seus traços.*

1673 — *Geometria cotada* — São dados: um ponto A de 4,3 m de cota e duas rectas de declives 1 e 1/2 que o não contêm mas pertencem a um plano projectante que passa por êle. Representar a recta que contém o ponto A e define com as rectas dadas um triângulo isósceles. Escala 1 : 100. R: *Rebate-se o plano dos dados sôbre o plano de comparação.*

Soluções dos n.os 1671 a 1673 de L. G. M. Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL - ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **Exames finais — Novembro de 1943.**

1674 — Calcular a área limitada pela curva $y=x^2/2+2/\sqrt{x}$, os eixos coordenados e uma paralela ao eixo dos yy tirada pelo ponto de ordenada mínima. R: *Para abscissa do ponto de ordenada mínima, obtém-se* $x=1$. *A área pedida será:*

$$A=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{25}{6}.$$

1675 — Calcular o comprimento do arco da curva $y=2\cos\sqrt{x}$, $z=2\operatorname{sen}\sqrt{x}$ a partir do ponto correspondente a $x=0$. R: *Será* $s=\int_0^x\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=$ $=\sqrt{x(1+x)}-\log\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$.

1676 — Dada a equação $2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x$, fazer a mudança de variável $x=\varphi(t)$ e determinar φ de modo que a transformada não contenha y'. Integrar a equação. R: *Obtém-se* $2\varphi\varphi' y''+(\varphi'^2-2\varphi\varphi'')y'+\varphi'^3 y=$ $=\varphi\varphi'^3$; *donde* $\varphi'^2-2\varphi\varphi''=0$. *Esta equação leva a* $\varphi=\frac{t^2}{4a}+\frac{b}{a}t+b^2$; *fazendo, por exemplo,* $a=1/4$, $b=0$, *e substitnido na equação transformada, vem* $y''+2y=$ $=2t^2$. *Integrando esta equação, tem-se,* $y=C_1\cdot\cos\sqrt{2}t+C_2\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}t+t^2-1$, *ou, finalmente,* $y=C_1\cos\sqrt{2x}+C_2\operatorname{sen}\sqrt{2x}+x-1$.

Soluções dos n.os 1674 a 1676 de A. Pereira Gomes.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **Alguns pontos dos exames de freqüência e finais do ano de 1942-1943.**

1677 — Mostre que $\operatorname{sen}x(1+\cos x)$ é máximo quando $x=\pi/3$. R: $y'=2\cos^2 x+\cos x+1$. *Como* $x=\pi/3$ *é uma das raizes de* $y'=0$ *e* $y''(\pi/3)<0$, *é de facto* $x=\pi/3$ *a abscissa de um dos pontos de máximo.*

1678 — É dado o rectângulo $[ABCD]$ e um ponto P em BC. Prolongue AP e DC e determine o ponto de encontro Q. Que posição deve ter a recta APQ para que a soma das áreas ABP e PCQ seja mínima? R: *Fazendo* $\overline{AB}=L$, $\overline{BC}=1$, $\overline{BP}=x$ *será* $S_1=$ $=L\cdot x/2$ *e* $S_2=\frac{1}{2}\frac{L(l-x)^2}{x}$. *Logo* $S=\frac{1}{2}L\cdot\frac{2x^2-2xl+l^2}{x}$ *e* $\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}L\cdot\frac{2x^2+l^2}{x^2}$. *Prosseguindo obtem-se* $x=l/\sqrt{2}$ *ou, chamando* α *ao ângulo* $P\widehat{A}B$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{L\sqrt{2}}$.

1679 — Determine um ponto P numa linha recta dada tal que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos que não pertençam à recta seja mínima. Supõe-se que a, recta e os pontos são complanares. R: *Sejam* P_1 *e* P_2 *os pontos fixos e* r *a recta dada. Tome-se a recta para eixo das abscissas e para eixo das ordenadas a ortogonal passando por* P_1; *sejam* $P_1(0,y_1)$ *e* $P_2(x_2,y_2)$. *Representemos por* d_1 *e* d_2 *as distâncias de* P_1 *e* P_2 *ao ponto* $P(x,0)$ *a determinar. Procura-se o mínimo de* $f(x)=d_1+d_2=\sqrt{x^2+y_1^2}+\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}$. *Derivando e igualando a zero, obtem-se:* $\frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}=$ $=\frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}$ *ou* $\cos\alpha=\cos\beta$ *(fazendo* $\alpha=P_1\widehat{P}O$ *e* $\beta=\pi-P_2\widehat{P}O$*), e como* $f''(x)<0$ *trata-se, de facto, de um mínimo.*

1680 — A soma dos perímetros duma circunferência e dum quadrado é constante. Mostre que a soma das áreas das duas figuras é mínima quando o diâmetro do círculo fôr igual ao lado do quadrado. R: *Será* $P=\pi d+4l=C$ *e* $S=(C-4l)^2/4\pi=l^2$. *Derivando, igualando a zero e atendendo à primeira igualdade vem* $l=d$ *e como* $S''>0$ *trata-se de facto dum mínimo.*

1681 — Calcule $I=\int x\operatorname{sen}2x\,dx$. R: *Fazendo* $u=x$ *e* $dv=\operatorname{sen}2x\,dx$ *vem* $I=\frac{\operatorname{sen}2x-2x\cos 2x}{4}+C$.

1682 — Calcule $\int\frac{x(3-x^2)\operatorname{arc}\operatorname{tg}x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$. R: *Por partes fazendo* $u=\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ *e* $dv=\frac{x(3-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$ *obtem-se*

$$\int\frac{x(3-x^2)\operatorname{arc}\operatorname{tg}x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x-\operatorname{arc}\operatorname{sen}x+C.$$

1683 — Calcule $\int x\,dy-y\,dx$ ao longo da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ percorrida no sentido directo.

1684 — Qual é o carácter da série de termo geral $u_n=3^{an^2+bn}$? Será $\sqrt[n]{u_n}=3^{an+b}$. Para $a>0$ divergente; $a<0$ convergente; $a=0$ o termo geral da série é uma progressão geométrica de razão 3^b convergente para $b<0$ é divergente para $b\geq 0$.

Soluções dos n.os 1677 a 1684 de F. Carvalho Araújo.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — I.º exame de freqüência, 17 de Fevereiro de 1943.

1685 — Mostrar que, se a série dupla $S=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}a_{\alpha\beta}$ fôr absolutamente convergente, a série simples $\sum_{\alpha=1}^{\infty}u_\alpha$, cujo termo geral é $u_\alpha=a_{\alpha 1}+a_{\alpha-1 2}+a_{\alpha-2 3}+\cdots+a_{1\alpha}$ é uma série convergente e o seu valor é S. R: *Uma série dupla absolutamente convergente pode ser substituida pela série simples constituída pelos mesmos termos, logo,*

$$S=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}a_{\alpha\beta}=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{13}+a_{22}+a_{31}+\cdots.$$

A série simples é absolutamente convergente e, por conseqüência, podemos substituir um número finito pela sua soma efectuada

$$S=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{13}+a_{22}+a_{31}+\cdots=a_{11}+(a_{12}+a_{21})+$$
$$+(a_{13}+a_{22}+a_{31})+\cdots=u_1+u_2+u_3+\cdots.$$

A série $\sum_{\alpha=1}^{\infty}u_\alpha$ *é, portanto, convergente e a sua soma é* S.

1686 — Estudar a convergência do integral impróprio $I=\int_0^1\frac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}\,\text{arc sen}\,u}$. R: *Façamos a substituïção* $u=\text{sen}\,x$, *vem* $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}\,x\,dx}{\sqrt{x}}$ *que é, como* I, *um integral impróprio da 1.ª espécie convergente por ser*

$$\lim_{x\to 0}x^\alpha\frac{\text{sen}\,x}{\sqrt{x}}=0 \text{ para } \alpha=1/2.$$

1687 — Estudar a dependência linear do sistema $f_1(x)=x+3$, $f_2(x)=x^2+3x+1$, $f_3(x)=x^2-x$, $f_4(x)=4x^2+2x+7$, $f_5(x)=2x^2+7x+5$. R: 1.ª resolução: *O wronskiano do sistema é identicamente nulo, pois tem duas linhas de zeros. Pela mesma razão, são nulos os complementos algébricos dos elementos de qualquer linha. Consideremos o sistema funcional constituído, por exemplo, pelas primeiras quatro funções dadas. O wronskiano dêste sistema é nulo identicamente por possuir uma linha de zeros. Os complementos algébricos dos elementos da última linha são respectivamente* 44, 22, 66, -22. *Logo as quatro funções são linearmente dependentes e os parâmetros serão, por exemplo,* 4, 2, 3, -2. *Portanto as cinco funções dadas são linearmente dependentes sendo* 4, 2, 3, -2, 0, *por exemplo, um sistema de parâmetros.* 2.ª resolução: *Se as funções dadas forem linearmente dependentes será possível determinar um sistema de cinco números* a, b, c, d, e, *não simultâneamente nulos, tais que o polinómio* $af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x)+df_4(x)+ef_5(x)$ *seja identicamente nulo. Esta condição leva ao sistema homogeneo*

$$\begin{cases} b+c+4d+2e=0\\ a+3b-c+2d+7e=0\\ 3a+b+7d+5e=0\end{cases}\quad \textit{donde}\quad \begin{cases} a=-2d-e\\ b=-d-2e\\ c=-3d\end{cases}$$

que fornece para quaisquer valores não simultâneamente nulos atribuídos a d *e a* e *um sistema de parâmetros da combinação linear homogénea existente entre as funções dadas. Por exemplo, para* $e=0$ *e* $d=-2$ *encontra-se o sistema a que conduziu a 1.ª resolução.*

1688 — Determinar os máximos e mínimos da função

$$F(y)=\int_0^1\frac{(xy)^2}{\sqrt{1+y}}\,dx.$$

R: *Note-se que*

$$F(y)=\frac{y^2}{\sqrt{1+y}}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{y^2}{3\sqrt{1+y}}$$

donde $$F'(y)=\frac{4y+3y^2}{6\,(1+y)^{3/2}}.$$

A equação $F'(y)=0$ *admite as raizes* $y=0$, $y=-4/3$, *a segunda das quais não pertence ao domínio da função* $F(y)$ *que é definida no campo real para* $y>-1$. *A primeira raiz* $y=0$ *corresponde a um mínimo para* $F(y)$ *visto que é sempre* $F(y)\geq 0$.

Soluções dos n.os 1685 a 1688 de A. Sá da Costa.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — I.º Exame de freqüência (extraordinário). 24 de Fevereiro de 1943.

1689 — Estudar o integral $f_n(x)=\int_x^{+\infty}\frac{dy}{y^2(\log y)^n}$ n inteiro e ≥ 1 e $x>1$. Relacionar $f_n(x)$ com $f_{n+1}(x)$, utilizando uma integração por partes.

1690 — Calcular o integral

$$\int_0^1\frac{1+kx}{1-kx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}\qquad |k|<1.$$

1691 — Verificar que as equações paramétricas

$$\begin{cases} x=\log\,\text{tg}\,\theta/2+2\cos\theta\\ y=2\,\text{sen}\,\theta\end{cases}\qquad 0<\theta<\pi/2$$

e

$$\begin{cases} x=t-2\,\text{tgh}\,t\\ y=2/\cosh t\end{cases}$$

representam a mesma curva. Calcular a área limitada pela curva, pelo eixo dos xx e por duas ordenadas.

1692 — Mostrar que $f(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x-1}$ e $f_1(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x}$ são infinitamente grandes equivalentes quando x é infinitamente grande. Achar a parte principal da sua diferença $f(x)-f_1(x)$.

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de freqüência, 1942-43.

1693 — Mostrar que as derivadas segundas $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ das funções implícitas z e u de x e de y, definidas pelo sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+u=0 \\ \log x+\log y+\log z+\log u=2 \end{array}\right.$ se tornam infinitas em qualquer ponto (x,y,z,u) no qual as duas variáveis z e u são iguais.

1694 — Sendo $\varphi_n(x)=\dfrac{\frac{d}{dx}\log(1+n^2x^2)}{\log(n+1)}$ e $f_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x)$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ será integrável termo a termo no intervalo $(0,x)$?

1695 — A que condição deve satisfazer a função $f(x)$ para que o integral $\int_x^{x+1}\log f(x)\,dx$ seja uma primitiva de $\log x$? Se fôr $f(1)=1$, qual é a expressão de $f(x)$ quando x é inteiro e positivo?

1696 — Estudar a convergência do integral impróprio $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{sen} t)^{\alpha-1}\cdot\cos t}{1-2\operatorname{sen} t}\,dt$.

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de freqüência. 1942-43.

1697 — Mostrar que as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da função implícita z de x e y, definida pela equação $z^3+z(mx^2+ny^2)=(m-n)^3$ são independentes de m e n no ponto $(0,0,m-n)$. Calcular, no mesmo ponto, a derivada $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1698 — Estudar a convergência do integral impróprio: $\int_{-\alpha}^{\infty}(u+\alpha)^{-1}\operatorname{sen}[u(u+\alpha)^2]\,du$.

1699 — Estudar a dependência do sistema de funções:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x)=4x^3-3x^2+1 \\ f_2(x)=2x^2+4 \\ f_3(x)=2x^4-7x^3-x^2+x-1 \\ f_4(x)=2x^4-5x^3-x^2+5x-1\,. \end{array}\right.$$

1700 — Estudar a convergência do produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ sendo $u_0=u_1=u_2=0$, e, para $n>1$,

$$u_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\quad u_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\,.$$

F. C. P. — Análise Superior — 2.º exercício de revisão. 1942-43.

1701 — Integrar a equação

$$(1+x^2)\,r+4y^2\,t-4\,(1+x)\,ys+6yq=0\,.$$

a) Temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (1+x)^2\,dy+2\,(1+x)\,y\,dx=0 \\ (1+x)^2\,dp-2\,(1+x)\,y\,dq+6yq\,dx=0\,. \end{array}\right.$$

A 1.ª equação dá $y\,(1+x)^2=C$ e, substituindo na 2.ª, vem $dp=\frac{2C}{(1+x)^3}\,dq-\frac{6Cq}{(1+x)^4}\,dx$. Integrando: $p=\frac{2y}{1+x}q+C_1$. Portanto $p-\frac{2y}{1+x}q=f\,\{y\,(1+x)^2\}$. Integrando, temos $z=xf\,\{y\,(1+x)^2\}+\psi\,\{y\,(1+x)^2\}$.
b) Fazendo $z=(1+x)^\alpha y^\beta$ e substituindo, temos:

$$(\alpha-2\beta)\,(\alpha-2\beta-1)=0\,,\quad \alpha=2\beta\,,\quad \alpha=2\beta-1$$

$$z=\{(1+x)^2\,y\}^\beta\,;\quad z=\{(1+x)^2\,y\}^\beta\,(1+x)\,.$$

A solução é: $z=xf\,\{y\,(1+x)^2\}+\psi\,\{y\,(1+x)^2\}$.

1702 — É dada a linha $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. *a)* Por um ponto A desta linha tirar uma recta a paralela ao plano xOy que encontre o eixo dos zz. *b)* Mostrar que a recta a existe no plano osculador à linha no ponto A. *c)* Determinar as linhas assintóticas que passam pelo ponto $(2,2,1)$ da superfície lugar das rectas a. R: *a)* $z=t^3$, $y=tx$. *b) Plano osculador:* $3t^2X-3tY+Z=t^3$. *c)* $\left\{\begin{array}{l} 2y=x^2 \\ zx^3=y^3 \end{array}\right.$ *e* $\left\{\begin{array}{l} y=x \\ z=1\,. \end{array}\right.$

1703 — Determinar a relação que deve existir entre u e v para se obterem linhas de curvatura da superfície $x=u+v$, $y=v-u$, $z=uv$. R: *Temos:* $d\overline{M}\,|\,\overline{N}\wedge d\overline{N}=0$ *ou* $(u^2+2)^{1/2}\,dv=(v^2+2)^{1/2}\,du$. *Integrando, temos* $\sqrt{u^2+2}-u=C\,\{\sqrt{v^2+2}-v\}$.

Soluções dos n.ºs 1701 a 1703 de J. Rios de Sousa.