PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1704 — Num círculo de centro O, marque-se sôbre o raio $\overline{OA}$, um ponto C; encontrar sôbre a circunferência um ponto P tal que o ângulo $\widehat{OPC}$ seja máximo.

(Bach. Letras e Matemática — Poitier — Nov. 1888).

1705 — Demonstrar que se num triângulo, os três ângulos A, B, C, são respectivamente proporcionais aos números $2,3,4$, tem-se: $\cos A/2=(a+c)/2b$.

1706 — Sabendo-se que o número $13xy45z$ é divisível por 792, achar os três algarismos x, y, z.

1707 — Três operários executam em certo praso uma obra que, dividida igualmente pelos três, tomaria o mesmo tempo a um dêles, menos dois dias a outro e mais três ao terceiro. De quantos dias é o praso?

Problemas 1704 a 1707 propostos por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1440 — Calcular o limite da soma de uma sucessão de fracções, cujos numeradores estão em progressão aritmética e os denominadores em progressão geométrica. Condição de convergência. (Aplicação numérica: $1/2+2/4+3/8+4/16+\cdots$). R: *O limite pedido é a soma* S *da série de termo geral* $u_n=\frac{a+r\,(n-1)}{bq^{n-1}}$ $(b\neq 0)$. *Tal série é absolutamente convergente para* $|q|>1$, *como se pode verificar pelo critério de D'Alembert. Com efeito,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{q}$. *Para* $|q|=1$ *é visìvelmente divergente. Escrevendo* $u_n=\frac{r}{b}\cdot\frac{n}{q^{n-1}}+\frac{a-r}{bq^{n-1}}$ *vê-se que a série pode ser considerada como a soma das duas séries de termos gerais* $\frac{r}{b}\cdot\frac{n}{q^{n-1}}$ *e* $\frac{a-r}{bq^{n-1}}$, *convergentes absolutamente para* $|q|>1$. *Ora, estas séries têm por valores: a segunda, soma dos termos duma* p. g. *decrescente* $S_2=\frac{a-r}{b\,(1-1/q)}$ *e a primeira, produto do factor finito* r/b *pelo valor da série de termo geral* $\frac{n}{q^{n-1}}$ $S_1=\frac{r}{b}\cdot\frac{1}{(1-1/q)^2}$. *Com efeito, para* $|x|<1$ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$, *donde, por derivaqão, se obtém a série de termo geral* nx^{n-1} *cujo valor é, por conseqüência,* $\frac{1}{(1-x)^2}$ *ou* $\frac{1}{(1-1/q)^2}$, *para* $|x|=\frac{1}{|q|}<1$. *É, pois,* $S=S_1+S_2=\frac{q\,[a\,(q-1)+r]}{b\,(q-1)^2}$. *Aplicação numérica:* $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots$ *Fazendo na fórmula precedente* $a=0$ $b=1$ $r=1$ $q=2$, *acha-se* $S=2$.

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

1507 — Resolver o sistema de equações: $x^2+y^2-(x+y)=48$, $x+y+xy=31$. R: *Pondo* $x+y=u$ $xy=v$, *será* $x^2+y^2=u^2-2v$ *e o sistema proposto escreve-se:* $u^2-2v-u=48$ *e* $u+v=31$. *Eliminando* v, *resulta a equação* $u^2+u-110=0$, *donde* $u_1=10$ $u_2=-11$, *valores a que correspondem os de* v, $v_1=21$, $v_2=42$. *Tem-se, então, para determinar* x *e* y *os dois sistemas* $x+y=10$, $xy=21$ *e* $x+y=-11$, $xy=42$, *de que são* *resolventes as equações* $t^2-10t+21=0$ *e* $t^2+11t+42=0$, *respectivamente. Acha-se* $x_1=7$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=7$ *e* $x_3=-11/2+\sqrt{47}i/2$, $y_3=-11/2-\sqrt{47}i/2$, $x_4=-11/2\sqrt{47}i/2$, $y_4=-11/2+\sqrt{47}i/2$.

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Angel Chain (de Gijon-Espanha), Carlos A. Gonçalves Gomes (do Pôrto), Paul Richard (de Portalegre) e T. Ferreira Rato (S. Tiago-Cabo Verde).

1508 — Sôbre as três arestas de um triedro tri-rectângulo marquem-se três comprimentos $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$ e trace-se o triângulo $[ABC]$. Determinar: 1.º — a expressão da área dêste triângulo; 2.º — a distância $\overline{OD}=d$ do ponto O ao plano ABC; 3.º — o que devem ser b e c, quando sendo dados a e d, para que o triângulo ABC tenha uma superfície dada. R: *1.º — Seja* $\overline{BC}=\alpha$, $\overline{AB}=\gamma$, $\overline{CA}=\beta$ *e* $p=(\alpha+\beta+\gamma)/2$. *Será* $\alpha=\sqrt{b^2+c^2}$, $\beta=\sqrt{a^2+c^2}$, $\gamma=\sqrt{a^2+b^2}$. *Ora, a área* S *do triângulo é dada pela expressão conhecida da Geometria elementar com o nome de fórmula de Herão:* $S=\sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$ *donde, substituindo* p, α, β *e* γ *pelos valores atraz achados e efectuando as operações e necessárias simplificações, se tira* $S=\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}/2$. *2.º — O volume do tetraedro* [COAB] *é dado pela expressão* $V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ab\right)c=\frac{1}{6}abc$. *A distância* d *é a altura do tetraedro referida ao vértice* O. *Portanto* $V=Sd/3=abc/6$. *Logo* $d=\frac{abc}{2S}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.

3.º — De $d=\frac{abc}{2S}$ *conclui-se que* $bc=2Sd/a$, *isto é,* b *e* c *são inversamente proporcionais.*

Solução resumida baseada na solução de Paul Richard (de Portalegre).

1509 — Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)=\frac{n(n+1)\cdots(n+p+1)}{p+2}.$$

R: *Da identidade* $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+p+1)-\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\cdots(i+p+1)=n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)$ *deduz-se*

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\cdots(i+p+1)=\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)\,i\,(i+1)\cdots(i+p).$$

Substituindo na 1.ª identidade $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\cdots(i+p+1)$ *por* $\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)\,i\cdots(i+p)$ *vem* $\sum_{1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)\,[i+p+1-(i-1)]=n(n+1)\cdots(n+p+1)$ *ou* $(p+2)\sum_{1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)=n(n+1)\cdots(n+p+1)$. *Dividindo por* $(p+2)$ *ambos os membros da última identidade:*

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}{p+2}.$$

q. e. d.

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviou também solução correcta J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1510 — Pelo ponto médio do lado AB dum triângulo $[ABC]$ traça-se uma recta arbitrária; designando por N e P os pontos de encontro dessa recta com BC e AC respectivamente, mostrar que têm lugar as relações: $\frac{\overline{BN}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{CP}}$ e $\frac{\overline{MN}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}$.

R: *Pelos vértices do triângulo dado abaixem-se perpendiculares* ($\overline{AQ}$, $\overline{BR}$, $\overline{CS}$,) *sôbre a recta arbitrária e do vértice* A, *trace-se* $\overline{AT}$ *paralela ao lado oposto* $\overline{BC}=a$; *resulta:* $[AMT]=[BMN]\therefore\overline{AT}=\overline{NB}$, $\overline{MT}=\overline{MN}$, $\overline{BR}=\overline{AQ}$ *donde* $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CS}}$; $\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{CS}}{\overline{BR}}$; *multiplicando membro a membro, vem* $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}\times\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=1$ *donde*

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{AP}}\ \text{e}\ \frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{TN}}{\overline{AC}}=\frac{2\overline{MN}}{\overline{AC}}\therefore\frac{\overline{MN}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}.$$

Solução de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

29 — ILIOVICI, G. ET ROBERT, P. — **Géométrie** — Librairie de L'enseignement Technique — Léon Eyrolles, Editeur — Paris, 1937. VII + 380 págs.

Esta obra que faz parte da colecção «Les mathématiques pour l'Enseignement Secondaire» destina-se aos alunos da classe de matemáticas, aos candidatos às grandes Escolas (Saint-Cyr, Institut Agronomique, etc.) e aos alunos das Escolas Normais superiores e de ensino primário.