apenas uma pequena parte do excesso de ar que no inverno cobre aquêles continentes é gasta em produzir o excesso de pressão verificada durante o verão sôbre os mares do mesmo hemisfério. A massa excedente, que Spitaler [10] calculou ser superior a uma dezena de biliões de toneladas, desloca-se pois de Norte para Sul na passagem do inverno para o verão (hemisfério norte), ficando sujeita a um movimento de sentido contrário na passagem do verão para o inverno.

Êste movimento de período anual de uma tão grande massa de ar tem como conseqüência um deslocamento, igualmente de período anual, do polo de figura da Terra, que foi estudado por Spitaler e de que resulta, segundo os trabalhos de Radau, um deslocamento triplo para o polo de rotação. É de esperar, por outro lado, que êle dê origem a uma vibração do centro de gravidade [11] da Terra para um e outro lado da sua posição média, resultando dessa vibração variações na inclinação, em relação ao equador, da vertical de qualquer lugar à superfície da Terra e, portanto, variações de período anual nas latitudes. Sendo assim, é de reconhecer que uma parte do têrmo anual não é pròpriamente devida a um deslocamento do polo à superfície da Terra mas sim a um desvio da vertical. Voltaremos a êste assunto quando tratarmos do têrmo de Kimura.

Termina aqui a idade antiga — deixai-me chamar-lhe assim — da variação das latitudes. A sua idade moderna principia com a descoberta do têrmo de Kimura que terá de ser objecto de futuro artigo porque êste já vai longo e a secção de Astronomia não foi criada para aborrecer os leitores da «Gazeta de Matemática».

(10) Spitaler, Die Ursache der Breitenschwankungen, Wien 1897.

(11) Escrevemos contrafeitos «centro de gravidade da Terra». Só o desejo de não fugir à regra geral nos levou a isso porque entendemos que esta designação se deveria exclusivamente aplicar no caso de corpos sujeitos à acção da gravidade. Para a Terra ou qualquer outro planeta preferíamos empregar a designação de «centro de atracção».

BIBLIOGRAFIA

Além dos livros e artigos já citados, mais os dois seguintes trabalhos portugueses:

Variações de latitude, pelo Prof. J. Custódio de Morais, Coimbra, 1914. (Dissertação de Doutoramento em Matemática).

O deslocamento dos polos à superfície da Terra, pelo Prof. L. Cabral de Morais, Lisboa, 1903. (Dissertação de concurso para Professor de Matemática da Escola Politécnica).

TEMAS DE ESTUDO

A NOÇÃO DE GRUPO TOPOLÓGICO [1]

por *Hugo Ribeiro*

(Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura)

«The concept of a continuous, or what is the same thing, topological group, arose in mathematics from the study of groups of continuous transformations. A group of continuous transformations, e. g. geometric transformations, constitutes in a natural way a topological manifold. It appeared later that for the treatment of the greater part of the problems arising in this connection it is not necessary to consider a group as a group of transformations, but merely to study the group intrinsically, remembering however that there is defined in it an operation of passage to a limit. Thus arose a new mathematical concept — topological group.

.. One of the concrete concepts of the theory of topological groups is the concept of Lie group. In fact the theory of topological groups first arose in the theory of Lie groups. As is usual in relatively older theories the theory of Lie groups left unsolved some of its fundamental problems. We devote the sixth chapter of this look to the solution of these problems» ..

O que precede é parte do prefácio de Pontrjagin ao seu livro [2], livro que, cremos, constitui a expo-

[1] Colaborando na presente secção da «Gazeta de Matemática» o objectivo do autor é ùnicamente indicar noções e resultados, provàvelmente ainda não familiares à maior parte dos leitores dêste jornal, e sugerir problemas com os quais alguma vez tomou conhecimento numa medida que lhe permite (a seu juízo!) uma exposição precisa (para que a leitura não apresente obstáculos escusados) mas breve (exigindo um esfôrço salutar do estudioso e excluindo os leitores contemplativos) e contendo indicações bibliográficas para o desenvolvimento do texto e o prosseguimento do estudo.

[2] *Topological Groups*, Traduzido do russo por Emma Lehmer. Princeton Mathematical Series, 1939.

sição de conjunto mais detalhada e mais recente sôbre êste assunto. Esta obra contém dois capítulos introdutórios nos quais se desenvolvem respectivamente os conceitos de grupo e espaço topológico.

Um grupo topológico é um grupo com uma estrutura topológica de certo tipo, relativamente à qual as operações do grupo são funções contínuas. Mais precisamente: Seja G um grupo (abstracto) com a operação de multiplicação $\cdot$ e de elementos $x, y, \cdots$ cujos inversos se representarão respectivamente por $x^{-1} y^{-1}, \cdots$; seja em G definida uma estrutura topológica, isto é, seja dado um processo de ter, com cada conjunto de elementos de G, o sub-conjunto de G dos seus elementos («pontos») de acumulação (conjunto derivado) ou, o que é equivalente, o seu fecho (reünião do conjunto em questão e do derivado), e especialmente seja esta estrutura topológica a dum espaço T_1; seja ainda para cada elemento y de G, $x \cdot y$ (isto representa então uma correspondência unívoca, $x \to x \cdot y$, do conjunto G no conjunto G!) uma função contínua de x (relativamente ao espaço anterior!) e, para cada elemento x (é agora uma correspondência $y \to x \cdot y$) uma função contínua de y; seja, finalmente, também x^{-1} uma função contínua de x. O grupo G é então um grupo topológico (relativamente àquela estrutura topológica).

Recordemos o significado de cada um dos conceitos anteriores (grupo, espaço T_1, função contínua) para que fique aqui inteiramente entendida a definição anterior e porque isso nos vai ser útil no que segue:

Um conjunto não vazio, G, é um grupo relativamente a uma operação $\cdot$ (a multiplicação do grupo), que faz corresponder unìvocamente a cada par (ordenado!) $<x, y>$ (pode ser $x=y$!) de elementos x e y de G um elemento $z=x \cdot y$ de G, se, e só se, esta operação é associativa e tal que há em G elementos z e u para os quais $z \cdot x=y$ e $x \cdot u=y$ [3]. (Prova-se então que G contém um elemento único (a unidade do grupo), e, tal que $x \cdot e=e \cdot x=x$ qualquer que seja o elemento x de G e também, que, para cada elemento x de G há um elemento único (o inverso de x) x^{-1} para o qual $x^{-1} \cdot x=x \cdot x^{-1}=e$. Um conjunto G é um espaço T_1, relativamente a uma operação $\overline{}$ (o fecho do espaço) que faz corresponder unìvocamente a cada sub-conjunto X de G um sub-conjunto $\overline{X}$ de G, se, e só se, esta operação verifica as condições $\overline{X \cup Y}=\overline{X} \cup \overline{Y}$ ($\cup$ representa a operação de reünião de conjuntos), $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$ e $\overline{X}=X$ se X é constituído por um «ponto» único [*) 4)]. (Prova-se então que é, para cada conjunto X não vazio, $X \subset \overline{X}$ — isto é: cada elemento de X é um elemento de $\overline{X}$ — e, se supozermos, como sempre faremos, que G tem mais do que um elemento, asseguramo-nos de que se tem para o conjunto vazio, O, $\overline{O}=O$). A operação $\overline{}$ foi aqui suposta dada directamente. Ela pode porém obter-se ligando a cada elemento x de G uma família de sub-conjuntos de G (as vizinhanças de x) verificando, esta correspondência, certas condições [2) 4)]. Então, um elemento x de G pertencerá ao fecho $\overline{X}$ dum sub-conjunto X se, e só se, tôdas as vizinhanças de x contêm elementos de X. (Êste procedimento tem grande importância, especialmente no desenvolvimento da teoria dos grupos topológicos que parece ter sido sempre sistemàticamente prosseguida dêste modo [2)]). Uma correspondência unívoca f (função dum espaço T_1, G, em si mesmo é contínua em todo o espaço se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ qualquer que seja o sub-conjunto X de G [2)]. f é contínua em todo o espaço se, e só se, é contínua em cada ponto x do espaço, isto é, (Cauchy) se, e só se, para cada x e cada vizinhança de $f(x)$ há uma vizinhança de x tal que para todos os seus pontos, y, $f(y)$ pertence àquela vizinhança de $f(x)$.

Podemos agora dizer brevemente: G é um grupo topológico relativamente às operações $.$ e $\overline{}$ se, e só se, estas verificam (além das condições impostas simplesmente à operação do grupo) as seguintes condições: $\overline{X \cup Y}=\overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$,

---

3) Para o estudo da noção de grupo, teoria e aplicações consulte-se qualquer dos seguintes livros: Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, erster Band, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 1937, Teubner, Berlin; Almeida Costa, *Elementos da Teoria dos grupos*, Centro de Estudos de Matemática, 1942, Pôrto; Speiser, *Die theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3. Auflage, 1937, Springer, Berlin; B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* I, 3. Auflage, 1937, Berlin. Sublinhamos aqui, sòmente, o seguinte importante teorema (Cayley): *Qualquer grupo pode sempre considerar-se como um grupo de permutações.*

4) Para o estudo dos espaços T_1 vejam-se: Kuratowski, *Topologie I*, 1933, Varsovie; Alexandroff und Hopf, *Topologie I*. Band, 1935, Springer, Berlin, p. 58. Para um estudo sistemático das relações entre as noções de fecho e de visinhança em diversos espaços abstractos veja-se *Trabalhos do Seminário de Análise Geral*, 1941, Lisboa, ou *Portugaliae Mathematica*, vol. 1, 2, 3, Lisboa.

$\overline{X}^{-1} \subset \overline{X^{-1}}$ quaisquer que sejam os sub-conjuntos X e Y de G e $\overline{(x)}=(x)$, $\overline{Y}\cdot x \subset \overline{Y\cdot x}$, $x\cdot\overline{Y}\subset\overline{x.Y}$ quaisquer que sejam o sub-conjunto Y e o elemento x.

A estrutura topológica dum grupo topológico é sempre *homogénea:* dados dois elementos quaisquer x e y há sempre uma permutação do espaço em si mesmo (por exemplo, a multiplicação à direita por $x^{-1}\cdot y$) que transforma x em y, e esta transformação é contínua e tem uma inversa (a multiplicação à direita por $y^{-1}\cdot x$) que é também contínua — há uma homeomorfia que faz corresponder y a x. Isto indica que as propriedades *topológicas* locais (relativas às vizinhanças) são as mesmas em todos os pontos, e bastará portanto estabelece-las num ponto único, qualquer, que pode ser, por exemplo, a unidade do grupo. Esta observação é própria do procedimento usual, acima apontado, no desenvolvimento da teoria dos grupos topológicos [2].

É tempo de indicar alguns exemplos importantes de grupos topológicos: 1.º) O grupo aditivo G dos números reais e, nêle, a estrutura topológica habitual. 2.º) O grupo aditivo G dos vectores (translacções) dum espaço euclideano, R^n, a n dimensões; êste exemplo generaliza imediatamente o anterior e, se $n=2$, é fundamentalmente o grupo aditivo dos números complexos. 3.º) O grupo G das rotações, do espaço ordinário, em tôrno dum ponto O. Obtém-se em G um espaço distanciado (e portanto um espaço T_1) se a cada rotação de amplitude φ, com $0\leq\varphi\leq\pi$, se faz corresponder sôbre o eixo respectivo, e no sentido para o qual é directo o sentido do movimento, o ponto cuja distância a O é $\operatorname{tg}\varphi/2$, tomando então para distância de duas rotações a dos pontos correspondentes. O espaço projectivo a 3 dimensões, representa aqui, o espaço das rotações em tôrno de O. Êste grupo, que não é, ao contrário dos anteriores, abeliano, pode ainda considerar-se como um grupo de matrizes ortogonais. 4.º) O grupo multiplicativo dos números complexos $e^{i\pi}$ (de módulo 1), com a estrutura topológica ordinária da circunferência. É, fundamentalmente, o grupo aditivo dos números reais quando se consideram iguais dois números que diferem dum inteiro. 5.º) O caso trivial dos grupos topológicos discretos [2], para os quais o fecho de cada sub-conjunto é êste mesmo sub-conjunto. A sua teoria é a teoria, puramente algébrica, dos grupos.

Um método usual de obter novos grupos topológicos a partir de grupos topológicos dados é o da operação que fornece o «produto directo» [2] [3] de dois ou mais (mesmo infinitos numeráveis) grupos topológicos dados. Assim, o grupo topológico do 2.º exemplo é o produto directo de n grupos todos iguais ao do 1.º exemplo; o «toro» é o produto directo de dois grupos topológicos iguais aos do 4.º exemplo, etc.

Na teoria dos grupos topológicos estão estabelecidas muitas proposições que eram já bem conhecidas nos exemplos anteriores. Relacionam-se freqüentemente, naquela teoria, os conceitos seguintes da Teoria dos Grupos e da Topologia, entre os quais há uma correspondência natural: sub-grupo e sub-espaço, homomorfismo e continuïdade, isomorfismo e homeomorfismo, grupo factor e espaço cociente, etc. Certos grupos topológicos, cuja estrutura topológica tem propriedades particulares, podem estudar-se como grupos topológicos de matrizes [2]. Investigações sôbre esta possibilidade têm sido sistemàticamente prosseguidas, e assim se desenvolvem, por exemplo, os estudos da integração em grupos topológicos [5].

Voltemos à definição de grupo topológico: A operação de multiplicação em G induz naturalmente uma operação de multiplicação entre os sub-conjuntos $X, Y \cdots$ de G; e esta, com as operações de reünião $\cup$ e de intersecção $\cap$ de classes dá logar a um conhecido cálculo de «complexos» dum grupo: Com efeito, se se fixa que $X\cdot Y$ é o sub-conjunto constituido pelos elementos de G que são iguais ao produto (segundo a multiplicação do grupo) de um elemento de X por um elemento de Y, e ainda que X^{-1} é o sub-conjunto constituído pelos inversos dos elementos de X, poderão fàcilmente estabelecer-se várias leis dêste cálculo (a distributividade de $\cdot$ relativamente a $\cup$, por exemplo) importantes na teoria dos grupos. Verifica-se fàcilmente que o complexo $X\neq 0$ é um grupo se, e só se, $X\cdot X^{-1}\subset X$ (ou, o que é o mesmo, $X\cdot X^{-1}\cup X=X$) [3]. Do ponto de vista dêste cálculo de complexos dum grupo qualquer (não se supõe ainda que seja topológico) os complexos constituem uma álgebra de Boole completa atómica (espaço algébrico cujos elementos se combinam com as operações $\cup$ e $\cap$ como os sub-conjuntos de um conjunto) onde duas outras operações (a de multiplicação, e a de tomar o inverso) verificam certas condições. A operação $\overline{}$ será uma nova operação (uma correspondência) para

[5] André Weil, *L'intégration das les groupes topologiques*, Publications de l'Institut Mathématique de Clermont Ferrand, Act. Sc. e Ind. n.º 869, 1940, Hermann, Paris.

os elementos desta álgebra de Boole, e verifica-se fàcilmente (a partir das condições acima e das definições já dadas) que aquêle cálculo de complexos é o de um grupo topológico relativamente a êste fecho se, e só se, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $\overline{X} \cdot \overline{Y}^{-1} \subset \overline{X \cdot Y^{-1}}$ quaisquer que sejam X e Y e $\overline{X} = X$ quando X é um átomo (complexo de um único elemento de G)[6]. (Demonstra-se agora, imediatamente, por exemplo, que se X é um sub-grupo $\overline{X}$ também é um sub-grupo: De facto, se $X \neq 0$ é $\overline{X} \neq 0$ e se $X \cdot X^{-1} \subset X$ é $\overline{X} \cdot \overline{X}^{-1} \subset \subset \overline{X \cdot X^{-1}} \subset \overline{X}$).

Esta formulação, que se nos afigura simples, significa de certo modo, uma algebrização da noção do grupo topológico, e tem, porventura, interesse no estabelecimento de alguns resultados da sua teoria geral. Sabe-se por exemplo, que a estrutura topológica dum grupo topológico é sempre a dum espaço regular[2) 4)]. E êste resultado deve poder obter-se fàcilmente se se recorre à caracterização que António Monteiro deu dos espaços regulares[7)]. Afigura-se-nos ainda que, com leves modificações, as três primeiras condições apontadas para o cálculo dos complexos dum grupo topológico, se verificam ainda noutros cálculos muito distintos (é que elas são especialmente interessantes no cálculo das relações binárias). Procuraremos detalhar esta observação num novo artigo.

1943, Setembro, Zürich

6) António Monteiro, et Hugo Ribeiro, *Les fonctions continues et les espaces partiellement ordonnés*, Portugaliae Mathematica, vol. 4, 1945, Lisboa.

7) António Monteiro, *La notion de fermeture et les axiomes de séparation*, Portugaliae Mathematica, vol. 2, 1941, Lisboa, p. 290 ou Anais da Fac. Ciências do Pôrto, tomo 26, 1941, Pôrto, p. 193.

ÁLGEBRA MODERNA

por **A. Almeida Costa**

Em seguimento da exposição feita nos cursos do *Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto* sôbre *Grupos* e *Anéis*, seria útil, nos têrmos da memória fundamental de *E. Steinitz* (Algebraische Theorie der Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 137, págs. 167 a 308, 1910), continuar o tratamento das ampliações algébricas dos corpos comutativos, expôr o teorema fundamental relativo à existência dum tipo de equivalência de corpo algèbricamente fechado, ampliação dum corpo dado, e dar os teoremas relativos às ampliações transcendentes (Os cursos referidos inserem todo o conteúdo da memória citada, até págs. 249).

FÍSICA TEÓRICA

por **A. Almeida Costa**

Tem interêsse justificar os raciocínios que vão seguir-se, utilizando simultâneamente dados experimentais e métodos da Análise Matemática.

Consideremos um átomo composto de um núcleo e de $f+1$ electrões. Na ausência de campo exterior, a função de fôrça é

$$U = \sum_{\lambda=1}^{f+1} \frac{Ze^2}{r_{0\lambda}} - \sum_{\substack{i<k \\ i \neq 0}}^{f+1} \frac{e^2}{r_{ik}},$$

onde Ze representa a carga do núcleo, r_{lm} a distância entre as partículas de índices l e m, e onde o indice zero se refere ao núcleo. A equação de *Schrödinger* correspondente é

$$\left(- \sum_{0}^{f+1} \frac{h^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda - \sum_{1}^{f+1} \frac{Ze^2}{r_{0\lambda}} + \sum_{\substack{i<k \\ i \neq 0}}^{f+1} \frac{e^2}{r_{ik}} \right) \psi = E\psi .$$

Introduzindo as coordenadas x_s, $\cdots$ do centro de gravidade e as coordenadas relativas $x_\lambda - x_s = x'_\lambda$, $\cdots$, têm lugar as igualdades

$$x_\lambda = x_s + x'_\lambda, \cdots, \quad x_0 = x_s - \frac{\mu_1 x'_1 + \cdots}{\mu_0}, \cdots .$$

Por elas se verifica que U depende ùnicamente das coordenadas relativas. Nas novas coordenadas, a equação de *Schrödinger* escreve-se

$$\left\{ -\frac{h^2}{2M} \Delta_s - \sum_{1}^{f+1} \frac{h^2}{2\mu_\lambda} \Delta'_\lambda + \frac{h^2}{2M} \left(\sum_{1}^{f+1} \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \right)^2 + \cdots - U \right\} \psi = E\psi,$$

$$(M = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{f+1}) .$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes (onde se suprimem as linhas):

$$-\frac{h^2}{2M} \Delta_s \psi_s = E_s \psi_s ,$$

$$\left\{-\sum_1^{f+1}\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda+\frac{h^2}{2M}\left(\sum_1^{f+1}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\right)^2+\cdots-U\right\}\psi=E\psi.$$

Nesta última, vamos desprezar a quantidade $\frac{1}{\mu_0}$ em face de $\frac{1}{\mu_\lambda}$ $\left(\text{ou } \frac{\mu}{\mu_0} \text{ em face da unidade}\right)$. Sendo

$$(\mu_0+\mu_1+\cdots)\,x_s=\mu_0\,x_0+\mu_1\,x_1+\cdots,\ \cdots,$$

obtém-se, na mesma ordem de aproximação,

$$x_s=x_0,\ \cdots,\quad r_{0\lambda}=\sqrt{x_\lambda'^2+\cdots}=\sqrt{x_\lambda^2+\cdots}=r_\lambda.$$

A equação em causa torna-se na seguinte:

$$(1)\qquad \left(-\sum_1^f\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda-\sum_1^f\frac{Ze^2}{r_\lambda}+\sum_{\substack{i<k\\ i\neq 0}}^f\frac{e^2}{r_{ik}}\right)\psi+$$
$$+\left(-\frac{h^2}{2\mu_{f+1}}\Delta_{f+1}-\frac{Ze^2}{r_{f+1}}+\sum_{i=1}^{f+1}\frac{e^2}{r_{i,f+1}}\right)\psi=E\psi.$$

Pondo de parte as variações de E_s e ψ_s, o nosso problema é um problema de núcleo fixo e de electrões móveis em tôrno dêsse núcleo, que pode supor-se na origem das coordenadas.

Vamos escrever (1) sob a forma

$$(2)\qquad (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\psi+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')\,\psi=E\psi,$$

com

$$\mathrm{A}=-\sum_1^f\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda-\sum_1^f\left(\frac{Ze^2}{r_\lambda}-\Phi_\lambda\right)=$$
$$=-\sum_1^f\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda-\sum_1^f V_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}\right),$$

$$\mathrm{B}=\sum_{\substack{i<1\\ i\neq k}}^f\frac{e^2}{r_{ik}}-\sum_1^f\Phi_\lambda=-\sum_1^f\frac{Ze^2}{r_\lambda}+$$
$$+\sum_{\substack{i<k\\ i\neq 0}}^f\frac{e^2}{r_{ik}}+\sum_1^f V_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}\right),$$

$$\mathrm{A}'=-\frac{h^2}{2\mu_{f+1}}\Delta_{f+1}-\left(\frac{Ze^2}{r_{f+1}}-\Phi_{f+1}\right)=$$
$$=-\frac{h^2}{2\mu_{f+1}}\Delta_{f+1}-V_{f+1}\left(\frac{1}{r_{f+1}}\right),$$

$$B'=\sum_{i=1}^{f+1}\frac{e^2}{r_{i,f+1}}-\Phi_{f+1}=-\frac{Ze^2}{r_{f+1}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{f+1}\frac{e^2}{r_{i,f+1}}+V_{f+1}\left(\frac{1}{r_{f+1}}\right).$$

A equação (2) parte-se agora em

$$(3)\qquad (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\psi_1=E_1\,\psi_1,$$
$$(4)\qquad (\mathrm{A}'+\mathrm{B}')\,\psi_2=E_2\,\psi_2.$$

A equação (3) respeita aos f primeiros electrões. O seu tratamento supõe-se ter sido feito do modo seguinte: estudou-se $A\psi=E\psi$, que respeita ao sistema dos referidos f electrões postos em frente do núcleo com «protecção» (Abschirmung); em seguida, sob a forma de «perturbação», introduziu-se B=acção mútua — protecção.

Admitindo que os espectros aos quais se supõe aplicável a doutrina em desenvolvimento (espectros hidrogenoides dos alcalinos) se explicam supondo fixos E_1 e ψ_1 (estado fundamental), somos levados à equação (4). Podemos dizer, em primeiro lugar, que ao sistema, de estado determinado, constituido pelos f primeiros electrões, se juntou o electrão de ordem $f+1$, sob o qual actua um campo central com «protecção», tudo regulado pela equação

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\psi+\mathrm{A}'\,\psi=E\psi;$$

e, em segundo lugar, que o resto da acção mútua, entre o electrão de ordem $f+1$ e a «carcassa» do núcleo e dos f primeiros electrões, é introduzida pelo operador B′.

A equação $\mathrm{A}'\psi_2'=E_2'\psi_2'$ corresponde ao problema usual dum electrão em frente dum núcleo, sob a acção duma fôrça do tipo $\varphi(r)$, que não é uma fôrça de *Coulomb*. Se não existisse a «protecção» Φ_{f+1}, os valores próprios constituiriam um sistema discreto:

$$E_{2,1}';\ E_{2,2}'=E_{2,3}'=E_{2,4}'=E_{2,5}';\ E_{2,6}'=\cdots=E_{2,14}';\ \cdots.$$

Por simplicidade, escreveremos $N=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+1$ e poremos

$$E_{2,N}'=E_{2,N+1}'=\cdots=E_{2,N+n^2-1}'=E_N.$$

O valor próprio E_N tem uma degenerescência de grau n^2. A intervenção de Φ_{f+1} diminue essa degenerescência, pois E_N desdobra-se nos valores próprios

$$(5)\qquad E(n,0),E(n,1),\cdots,E(n,l),\cdots,E(n,n-1),$$

onde a $E(n,l)$ corresponde um degenerescência de grau $2l+1$. O cálculo dos valores (5) faz-se determinando as raízes ζ duma equação da forma

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\zeta & \cdots & b_{1,n^2} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n^2,1} & \cdots & b_{n^2,n^2}-\zeta \end{vmatrix}=0,$$