aquelas mais pequenas tarefas indispensáveis. A revista é subsidiada pelo «Instituto para a Alta Cultura», que tem compreendido o alcance dos seus objectivos e que pôde ver ao cabo de pouco tempo os seus frutos. Éste subsídio permite fazer face às despezas do papel, de impressão e de expedição. Ela parece dever constituir um modêlo para outras publicações doutros capítulos da Ciência que queiram prosseguir idênticos fins. A «Portugaliae Matematica» tem já uma irmã mais nova, a «Portugaliae Physica» que começou êste ano a sua publicação.

Zürich, 15 de Setembro de 1943.

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Faz parte do programa de trabalhos do *Seminário de Física Teórica* no presente ano lectivo um conjunto de sessões dedicadas ao *Estudo teórico geral das partículas elementares*. A primeira teve logar no dia 29 de Outubro e o Professor Dr. Proca tratou de *Les particules élémentaires* (Position du problème. Méthodes d'attaque. Principes fondamentaux des mécaniques nouvelles); a 2.ª sessão realizou-se no dia 5 de Novembro e o mesmo professor versou o tema *Rappel de quelques notions fondamentales de Mécanique Ondulatoire*. O Seminário funcionará às sextas feiras sendo, em breve, afixado um programa detalhado das sessões a efectuar.

A PARTIDA DO DOUTOR ANTÓNIO MONTEIRO

Os diários portugueses noticiaram já o convite feito pela Faculdade Nacional de Filosofia do Rio de Janeiro ao Doutor António Monteiro e a sua proxima partida. Os nossos leitores sabem também que o Prof. A. Monteiro vai reger a cadeira de Análise Superior, até aqui a cargo do Prof. G. Mammana, e dirigir um seminário de estudos matemáticos cujas pesquisas orientará, prosseguindo na tarefa iniciada pelos ilustres professores de matemática italianos que o precederam. Felicitamos vivamente a Faculdade Nacional de Filosofia pela inteligente escôlha feita, aconselhada também pelos grandes cientistas americanos A. Einstein e John von Neumann.

Sentimos bastante, como amigos, na Redacção da «Gazeta de Matemática», o seu afastamento temporário de Portugal; a revista, no entanto, é compensada pelo elo que estabelecerá o Prof. Monteiro com o meio matemático brasileiro de cujo movimento nos informará. É, porém, o meio matemático português, não desenvolvido ainda, como conviria, que mais perde com a sua ausência. Não queremos, com efeito, neste momento, deixar de recordar o animador incansável de quási tôdas as iniciativas de trabalho no campo matemático, algumas das quais foi o único a concebê-las. O nosso colaborador e amigo Hugo Ribeiro esclarece neste número da «Gazeta» o leitor do que é a «Portugaliae Mathematica» e o que esta lhe deve. É também ao seu entusiasmo e persistência que se deve em grande parte a criação da Sociedade Portuguesa de Matemática, a publicação da nossa revista e tantos outros empreendimentos, o mais recente dos quais e de grande importância é, sem dúvida, o ser um dos fundadores da Junta de Investigação Matemática. Os bolseiros do Instituto para a Alta Cultura que actualmente na Itália e na Suiça se aperfeiçoam no campo da investigação matemática, e que constituem a melhor propaganda portuguesa cultural no estrangeiro, permitem-nos afirmar — sabemo-lo de certeza, sem consultas — que muito devem a António Monteiro na orientação dos seus trabalhos de investigação e no entusiasmo sempre comunicado, impedindo desânimos e eliminando hesitações.

Em nome da «Gazeta de Matemática», desejamos-lhe encontre no Brasil a possibilidade, tão merecida, de realizar sem preocupações continuadas, o trabalho de investigação e orientação e consiga alcançar os objectivos que procura realizar.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1943)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 1

1511 — Dê a forma de um polinómio ordenado de coeficientes inteiros, igualado a 0, à equação $\left(\frac{x}{2}-1\right)^3-\frac{1}{6}(x^2+2)^2=7-\frac{x+1}{2}$ R: *Desenvolvendo, desembaraçando de denominadores e ordenando, tem-se, sucessivamente:*

$$\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1-\frac{x^4}{6}-\frac{4x^2}{6}-\frac{4}{6}-7+\frac{x+1}{2}=0$$

$$-4x^4+3x^3-34x^2+48x-176=0$$

$$4x^4-3x^3+34x^2-48x+176=0$$

1512 — Resolva a inequação $\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}<0$. R: *A fracção é negativa para os valores de* x *que tornem de sinais contrários os seus dois termos, isto é:*

$$\begin{cases} x^2+2x-1<0 \\ x+1 \quad >0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x^2+2x-1>0 \\ x+1 \quad <0 \end{cases}$$

donde: *donde:*

$$\begin{cases} -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \\ x>-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1+\sqrt{2} \ e \ x<-1-\sqrt{2} \\ x<-1 \end{cases}$$

e portanto: *e portanto:*

$$+1<x<-1+\sqrt{2} \qquad x<-1-\sqrt{2}$$

A desigualdade é portanto satisfeita para:

$$-1<x<-1+\sqrt{2} \ e \ x<-1-\sqrt{2}$$

1513 — Defina triedro. Enuncie as relações que conhece entre os seus elementos.

1514 — ¿Que unidades angulares conhece? Defina-as.

1515 — Determine por logaritmos com 5 algarismos decimais, e com a aproximação que êstes permitirem, o valor ou valores de

$$\operatorname{arc\,cotg} \sqrt{0,34275 \times \cos^2 123^\circ\, 12'\, 10''}.$$

R: *Se designarmos por* α *o arco do 1.º quadrante a que se refere o problema e se notarmos que*

$$\cos^2 123^\circ\, 12'\, 10''=\cos^2 56^\circ\, 47'\, 50''$$

tem-se:

$$\operatorname{cotg} \alpha=\sqrt{0,34275\times\cos^2 56^\circ\, 47'\, 50''}$$

e portanto:

$$\log \operatorname{cotg} \alpha=1/2 \log 0,34275+\log \cos 56^\circ\, 47'\, 50''$$

$$=\bar{1},76649+\bar{1},73846=\bar{1},50595$$

donde $\alpha=72^\circ\, 13'\, 28'',7$.

Os arcos que satisfazem ao problema proposto são, pois, $x=k\cdot180^\circ+72^\circ\, 13'\, 28'',7$.

1516 — Verifique se o número 631 é primo. Justifique a resposta. R: *Para verificar se um dado número* N *é, ou não, primo, basta verificar se êle é, ou não, divisível por algum dos números primos* $p<\sqrt{N}$. *No caso presente bastará verificar se* 631 *é divisível por algum dos números primos menores do que* 29. *Como tal facto não se verifica, conclui-se que o número* 631 *é primo.*

1517 — Determine todos os divisores comuns de 1188 e 990. R: *Como se sabe, os divisores comuns de vários números são os divisores do seu* M. D. C. *O algoritmo de Euclides permite-nos determinar o* M. D. C. $(1188; 990)=198$. *Como* $198=2\times3^2\times11$, *teremos o seguinte esquema para o cálculo de todos os divisores de* 198 *incluindo o próprio número e a unidade:*

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 3^2 \\ \hline 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18 \\ 1,\ 11 \end{array}$$

1, 2, 3, 6, 9, 18, 18, 11, 22, 33, 66, 99, 198

Tais são os divisores comuns de 1188 *e* 990.

1518 — Em que consiste o método de resolução dos problemas pelos lugares geométricos? Aplique-o ao seguinte problema: Sendo dados sôbre o plano uma circunferência e um ponto A não situado sôbre ela, traçar uma secante que passe por A e que corte a circunferência em dois pontos B e C, tais que a razão das distâncias AB e AC seja igual a 2. (Lembra-se que a figura homotética de uma circunferência é outra circunferência). R: *A resolução de um problema de construção pelo método dos lugares geométricos consiste, geralmente, em tornar o problema indeterminado abstraindo de uma das condições que lhe são impostas. A solução do referido problema indeterminado é constituida pelos pontos de um lugar geométrico que satisfazem às restantes condições do problema proposto. Construido êsse lugar geométrico, retoma-se o problema proposto e abstrai-se de uma outra das condições que lhe são impostas, o que dá origem a outro lugar geométrico. A intersepção dêstes dois lugares geométricos constitui a solução do problema proposto. A natureza do problema a resolver indicará quais as condições que deveremos sucessivamente omitir para que os lugares geométricos obtidos sejam os mais convenientes para a resolução do problema proposto. Suponhamos o problema resolvido e seja* $\overline{AB}$ *a secante tal que* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=2$. *Nestas condições, se tomarmos por centro de homotetia o ponto* A *e para razão de homotetia o número* $+2$, *o ponto* B *será homotético de* C *relativamente a* A. *Por outro lado, como o ponto* C *pertence à circunferência dada, o seu homotético existirá sôbre a circunferência homotética da circunferência dada. Desta análise resulta o método para determinar o ponto* B *que, com o ponto* A, *definem a secante pedida. Basta, com efeito, construir a circunferência homotética da circunferência dada tomando para centro de homotetia o ponto* A *e para razão de homotetia o número* $+2$. *A intersecção das duas circunferências determinará os pontos* B *que satisfazem ao problema.*

Soluções dos n.os 1511 a 1518 de J. G. Calado.

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

onto n.º 1

I

1519 — Determine o valor de m nas equações: $x^2-5x+m=0$, $x^2+7x+2m=0$ de modo que uma das raizes da segunda equação seja o dôbro de uma das raizes da primeira. R: *Se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da primeira equação e* x'_1 $2x_2$ *as raizes da segunda, ter-se-à* $x_1+x_2=5$; $x_1 x_2=m$; $x'_1+2x_2=7$ *e* $2x_1 x_2=2m$. *Resolvendo o sistema formado por estas equações obtêm-se os valores* $m=6$, $x_1=3$, $x_2=2$ *e* $x'_1=3$. *A outra raiz da segunda equação é* 4.

1520 — Enuncie os teoremas que servem para determinar o sinal que toma o trinómio ax^2+bx+c quando se atribuem diferentes valores a x.

1521 — Determine uma fracção cujo valor não se altere quando se juntam 15 unidades ao numerador e 18 ao denominador e que se torne três vezes maior quando se juntam 55 unidades ao numerador e 6 ao denominador. R: *Seja* a/b *a fracção pedida, será* $\frac{a}{b}=\frac{a+15}{b+18}$ *e como os números que podemos juntar ao numerador e denominador duma fracção sem lhe alterar o valor são equimúltiplos dos termos da fracção equivalente à fracção dada e de têrmos primos entre si, terá que ser* $a=p\cdot 5$ *e* $b=p\cdot 6$. *Por outro lado* $3\cdot\frac{a}{b}=\frac{p\cdot 5+55}{p\cdot 6+6}$ *donde se tira, atendendo aos valores de* a *e* b, $2p+22=6p+6$ *ou* $p=4$ *e por conseguinte* $a=20$ $b=24$.

II

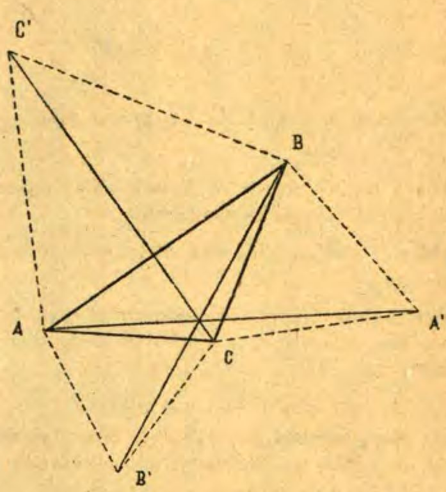
1522 — Verifique a identidade $\operatorname{tg}(45^\circ-a/2)=\frac{\cos a}{1+\operatorname{sen} a}$. R: $\operatorname{tg}(45^\circ-a/2)=(1-\operatorname{tg} a/2):(1+\operatorname{tg} a/2)=(\cos a/2-\operatorname{sen} a/2):(\cos a/2+\operatorname{sen} a/2)=(\cos^2 a/2-\operatorname{sen}^2 a/2):(\cos a/2+\operatorname{sen} a/2)^2=\cos a:(1+\operatorname{sen} a)$.

1523 — Calcule $\operatorname{sen} 3a$ em função de $\operatorname{sen} a$. R: $\operatorname{sen}(a+2a)=\operatorname{sen} a\cos 2a+\cos a\operatorname{sen} 2a=\operatorname{sen} a(1-2\operatorname{sen}^2 a)+\cos a(2\operatorname{sen} a\cos a)=\operatorname{sen} a-2\operatorname{sen}^3 a+2\operatorname{sen} a(1-\operatorname{sen}^2 a)=3\operatorname{sen} a-4\operatorname{sen}^3 a$.

1524 — Usando o cálculo logarítmico, calcule o comprimento do lado do heptágono inscrito numa circunferência de 13,17 metros de diâmetro. R: $l_7=2\times 13{,}17\operatorname{sen} 25^\circ 42' 51''$ *donde* $\log l_7=\log 2+\log 13{,}17+\log\operatorname{sen} 25^\circ 42' 51''=0{,}30103+1{,}11959+\bar{1}{,}63737=1{,}05799$ *e* $l_7=11{,}43$ *metros.*

III

1525 — Sôbre os lados de um triângulo qualquer ABC constroem-se para o exterior 3 triângulos equiláteros ABC', ACB', BCA'. Demonstre que os segmentos de recta AA', BB' e CC' têm comprimentos iguais. R: *Demonstremos por exemplo que* $\overline{AA'}=\overline{BB'}$. *A igualdade* $\overline{AA'}=\overline{CC'}$ *demonstra-se por processo análogo. Consideremos*



os triângulos $[BB'C]$ *e* $[AA'C]$, *que são iguais porque* $\overline{B'C}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=\overline{CA'}$ *e* $B'\hat{C}B=A\hat{C}A'$ *pois* $B'\hat{C}B=B\hat{C}A+A\hat{C}B'=B\hat{C}A+60^\circ$ *e* $A\hat{C}A'=B\hat{C}A+B\hat{C}A'=B\hat{C}A+60^\circ$, *logo* $\overline{BB'}=\overline{AA'}$.

1526 — Figure duas rectas concorrentes r e s e um ponto P de r. Deduza e justifique a construção a usar para determinar o centro de uma circunferência tangente às duas rectas, sendo P o seu ponto de contacto com r. R: *Tiremos por* P *uma perpendicular,* p, *a* r; *é sôbre esta recta que deve existir o centro da circunferência pedida. Se as rectas* r *e* s *se encontram no ponto* I *nos limites do desenho, e se fôr* Q *o ponto de contacto da circunferência com* s, *a igualdade* $\overline{IP}=\overline{IQ}$, *que se deve verificar (potência do ponto* I *em relação à circunferência), permite determinar* Q *que pode ocupar duas posições* Q_1 *e* Q_2 *simétricas em relação a* I *sôbre* s. *As perpendiculares em* Q_1 *ou* Q_2 *a* s *encontrarão* p *nos pontos* O_1 *e* O_2, *centros das circunferências que satisfazem às condições estabelecidas. Se* r *e* s *não se encontram nos limites do desenho, podemos ainda determinar as bissectrizes dos ângulos que formam* r *e* s, *bissectrizes* b_1 *e* b_2

que encontrarão p *em* O_1 *e* Q_2. *Para determinar as bissectrizes traçam-se duas perpendiculares* p_1 *a* r *e* q_1 *a* s *em pontos arbitrários* P_2—r *e* O_2 e s *e sôbre elas e a partir de* P_1 *e* Q_1 *marcam-se distâncias arbitrárias mas iguais, determinando os pontos* P_2 *e* Q_2 *interiores no ângulo de* r *com* s; *tiram-se por êsses pontos rectas* r_1 *e* s_1 *paralelas a* r *e* s. *As distâncias* $\overline{P_1P_2}=\overline{Q_1Q_2}$ *devem satisfazer à única condição de* r_1 *e* s_1 *se encontrarem nos limites do desenho. As bissectrizes* b_1 *e* b_2 *dos ângulos* r_1 *com* s_1 *são as bissectrizes de* r *com* s. *A igualdade dos triângulos* $[IPO_1]$ *e* $[IQO_1]$ *justifica qualquer das construções. O problema não terá solução se* P *coïncidir com* I.

Soluções dos n.os 1519 a 1526 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia — 29 de Julho de 1943.

Ponto n.º 1

I

1527 — Determine o parâmetro m de modo que a equação $(m-1)x^2-2mx+m+1=0$ admita uma raiz superior e outra inferior a 2. R: *Do enunciado deduz-se que a equação dada tem raizes reais e diferentes; o trinómio* $f(x)$, *primeiro membro da equação, tomará pois, para* $x=2$, *um valor* $f(2)$ *de sinal contrário ao do coeficiente de* x^2, *isto é,* $(m-1)f(2)<0$ *ou* $(m-1)[4(m-1)-4m+m+1]=$ $=(m-1)(m-3)<0$ *donde* $1<m<3$.

1528 — ¿Quantos números *impares* compreendidos entre 2000 e 7000 se podem constituir com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que em cada número não figurem algarismos repetidos? R: *Pretende saber-se o número total de números com* 4 *dos* 6 *algarismos dados, começando por* 2, 3, 4 *ou* 6 *e terminando por* 3 *ou* 9. *O n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 2 *é* $A_{5,3}$, *e* 2/5 *dêstes são impares; o n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 3 *é* $A_{5,3}$, *e* 1/5 *dêstes são impares; o n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 4 *é* $A_{5,3}$, *e* 2/5 *dêstes são impares; o n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 6 *é* $A_{5,3}$, *e* 2/5 *dêstes são impares. O número procurado é pois* $7/5\cdot A_{5,3}=7/5\cdot 5\cdot 4\cdot 3=84$.

1529 — Defina progressão aritmética e calcule n de modo que $2n+1$; $2n^2+5$; $10n$ estejam em progressão aritmética. R: *Tem-se* $2n^2+5-(2n+1)=$ $=10n-(2n^2+5)$, $4n^2-12n+9=0$, $(2n+3)^2=0$ $n=3/2$.

II

1530 — Da extremidade A de um diâmetro $\overline{AB}$ de uma circunferência de raio igual a $335^m,27$ traçou-se uma corda $\overline{AC}$ de comprimento igual a $600^m,25$. Calcule o ângulo α que a corda $\overline{AC}$ forma com o diâmetro $\overline{AB}$. (Utilize logaritmos). R: *O triângulo* [ABC] *é evidentemente recto* $(\hat{C}=90^o)$. *Tem-se pois* $\overline{AC}=\overline{AB}\cos\alpha=2R\cos\alpha$ *donde* $\cos\alpha=\dfrac{\overline{AC}}{2R}=\dfrac{600{,}25}{2\times 335{,}27}\log\cos\alpha=\log 600{,}25+$ $+\operatorname{colog}2+\operatorname{colog}335{,}27=2{,}77834+\bar{1}{,}69897+\bar{3}{,}47461=$ $=\bar{1}{,}95192$ *donde* $\alpha=26^o\,28'$.

1531 — Sendo α um ângulo do 1.º quadrante que satisfaz à relação $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}/2$, calcule $\cos(5\pi/2+\alpha)$. R: $\cos(5\pi/2+\alpha)=\cos(\pi/2+\alpha)=$ $=-\operatorname{sen}\alpha=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\sqrt{3}/3$.

1532 — Calcule os valores de x compreendidos entre 0 e $\pi/2$ radianos que satisfazem à desigualdade $4\operatorname{sen}^2 x-2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen}x+\sqrt{2}<0$. R: *Determinemos as raizes do trinómio do 1.º membro:* $4\operatorname{sen}^2 x-2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen}x+\sqrt{2}=0$, $\operatorname{sen}x=$ $=\dfrac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}}}{4}=\dfrac{1+\sqrt{2}\pm(1-\sqrt{2})}{4}$ *ou* $\operatorname{sen}x_1=\sqrt{2}/2$ *e* $\operatorname{sen}x_2=1/2$. *A desigualdade é, portanto, satisfeita para* $1/2<\operatorname{sen}x<\sqrt{2}/2$ *ou, limitando-nos aos valores de* x *entre* 0 *e* $\pi/2$, $\pi/6<x<\pi/4$.

III

1533 — Os catetos de um triângulo rectângulo medem respectivamente 3 centímetros e 4 centímetros. Calcule o volume do sólido obtido por uma rotação completa do triângulo em tôrno da hipotenusa. R: *O sólido obtido é formado por dois cones de revolução com a mesma base, cujo raio* R *é a altura relativa à hipotenusa, e cujas alturas* h_1 *e* h_2 *são os segmentos que a altura determina sôbre a hipotenusa. Tem-se* $V=1/3\cdot\pi R^2 h_1+1/3\cdot\pi R^2 h_2=$ $=1/3\cdot\pi R^2(h_1+h_2)$. *Mas* $h_1+h_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$ *e* R *determina-se fàcilmente atendendo a que* $5R=3\times 4$, *ou* $R=12/5$. *Vem finalmente* $V=\dfrac{144\pi}{15}\,cm^3$.

1534 — Demonstre que a soma dos segmentos de recta que unem os vértices do triângulo $[ABC]$ com o ponto M, *qualquer,* do interior do triângulo, é menor que o perímetro e maior que o semi-perímetro do referido triângulo. R: *Designemos por* a, b, *e* c *as medidas dos lados opostos a* A, B *e* C, *e façamos* $\overline{\mathrm{AM}}=\mathrm{x}$, $\overline{\mathrm{BM}}=\mathrm{y}$ *e* $\overline{\mathrm{CM}}=\mathrm{z}$. *De propriedades conhecidas deduz-se:* $a<z+y$, $b<x+z$, $c<y+x$ *donde* $a+b+c=$ $=2p<2(x+y+z)$ *ou* $p<x+y+z$ *e ainda* $a+$ $+b>x+y$, $b+c>y+z$, $c+a>z+x$ *donde* $4p>2(x+y+z)$ *ou* $2p>x+y+z$, c. q. d.

Nota — Em cada um dos grupos I e II são de resposta obrigatória o 1.º problema e uma das duas questões seguintes. É também de resposta obrigatória uma das questões do grupo III.

Soluções dos n.os 1527 a 1534 de Manuel Zaluar.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — Um ponto do exame final de 1941-42.

1535 — Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo

$$3xy^2 - l\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\mathrm{sen}\,xy}}{\mathrm{arc\,sec}\,x^2} = 0.$$

1536 — Dada a circunferência de equação $x^2+y^2=10$, determine uma tangente tal que a área do triângulo formado pela tangente e a parte positiva dos eixos seja igual a 32.

1537 — Dada a fórmula $\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \mathrm{sen}\,A \cdot \mathrm{sen}\,C \cdot \cos b$ deduza dela por meio das relações entre os elementos dum triângulo e do seu polar, uma fórmula relacionando 3 lados e um ângulo e torne logarítmica a expressão obtida para o cálculo do elemento a.

1538 — Reduza aos seus eixos e classifique a quádrica $z^2-2y^2-4xy+8x+12y-16=0$.

I. S. C. E. F. — Exame final — 15 de Julho de 1942.

1539 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{\mathrm{tg}\,x}$. Utilizar-se-á o desenvolvimento em série da função exponencial para o cálculo das ordenadas dos pontos de inflexão com um êrro inferior a 10^{-3}.

1540 — Dada a variável complexa $z=x+iy$ determinar o lugar dos pontos (x, y) do plano para os quais é $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$.

1541 — Dada a função assim definida

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{x-a}{1+e^{(x-a)^{-2}}} & \text{para } x\neq a \\ y(a)=0 \end{cases}$$

estudar a existência da sua derivada no ponto a.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame final, 10 de Outubro de 1942.

1542 — Dada a equação $x^5-2ax^4+(a^2+b^2)x^3+0+5x^2-10ax+5(a^2+b^2)=$ determinar a e b de modo que ela tenha as raizes $+i$ e $-i$. Nessa hipótese resolvê-la. R: *Substituindo* x *na equação dada por* $+\mathrm{i}$ *e* $-\mathrm{i}$ *vem*

$$\begin{cases} 5(a^2+b^2)-2a-5+i[\;1-10a-(a^2+b^2)]=0 \\ 5(a^2+b^2)-2a-5+i[-1+10a+(a^2+b^2)]=0 \end{cases} \textit{donde}$$

$$\begin{cases} 5(a^2+b^2)-2a-5=0 \\ (a^2+b^2)+10a-1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a=0 \\ (a^2+b^2)+10a-1=0 \end{cases} \textit{e}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b^2=1 \end{cases}.$$ *Finalmente, tem-se* $x^5+x^3+5x^2+5=0$, $(x^2+1)(x^3+5)=0$ *e* $(x^2+1)(x+\sqrt[3]{5})[(x-\sqrt[3]{5}/2)^2+$ $+3\sqrt[3]{25}/4]=0$.

1543 — Dados os três planos $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y+z+1=0 \\ x+3y-3z=0 \end{cases}$ verificar que formam uma superfície prismática, determinar a direcção das arestas e a área da secção nela determinada por um plano perpendicular às arestas. R: *O sistema constituido pelas três equações é incompatível, visto que a característica da matriz dos coeficientes das incógnitas é* 2 *e a da matriz dos coeficientes e dos termos conhecidos é* 3. *Qualquer dos sistemas formado por duas ou três equações dadas é compatível e indeterminado de grau* 1. *Logo os três planos intersectam-se dois a dois, mas não os três, e formam uma superfície prismática. A direcção das arestas é a do vector* $(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\wedge(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-2(\mathbf{j}+\mathbf{k})$. *Um plano perpendicular às arestas é, por exemplo, o plano de equação* $y+z=0$. *Os pontos de encontro dêste plano com as três arestas são*

A$(-2, -1/2, 1/2)$, B$(-9/2, 3/4, -3/4)$, C$(-3/4, 1/8, -1/8)$.