gulo, é menor que o perímetro e maior que o semi-perímetro do referido triângulo. R: *Designemos por* a, b, *e* c *as medidas dos lados opostos a* A, B *e* C, *e façamos* $\overline{AM}=x$, $\overline{BM}=y$ *e* $\overline{CM}=z$. *De propriedades conhecidas deduz-se:* $a<z+y$, $b<x+z$, $c<y+x$ *donde* $a+b+c=2p<2(x+y+z)$ *ou* $p<x+y+z$ *e ainda* $a+b>x+y$, $b+c>y+z$, $c+a>z+x$ *donde* $4p>2(x+y+z)$ *ou* $2p>x+y+z$, c. q. d.

Nota — Em cada um dos grupos I e II são de resposta obrigatória o 1.º problema e uma das duas questões seguintes. É também de resposta obrigatória uma das questões do grupo III.

Soluções dos n.os 1527 a 1534 de Manuel Zaluar.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — Um ponto do exame final de 1941-42.

1535 — Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo

$$3xy^2-l\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\operatorname{sen} xy}}{\operatorname{arc\,sec} x^2}=0.$$

1536 — Dada a circunferência de equação $x^2+y^2=10$, determine uma tangente tal que a área do triângulo formado pela tangente e a parte positiva dos eixos seja igual a 32.

1537 — Dada a fórmula $\cos B=-\cos A\cdot\cos C+\operatorname{sen} A\cdot\operatorname{sen} C\cdot\cos b$ deduza dela por meio das relações entre os elementos dum triângulo e do seu polar, uma fórmula relacionando 3 lados e um ângulo e torne logarítmica a expressão obtida para o cálculo do elemento a.

1538 — Reduza aos seus eixos e classifique a quádrica $z^2-2y^2-4xy+8x+12y-16=0$.

I. S. C. E. F. — Exame final — 15 de Julho de 1942.

1539 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{\operatorname{tg} x}$. Utilizar-se-á o desenvolvimento em série da função exponencial para o cálculo das ordenadas dos pontos de inflexão com um êrro inferior a 10^{-3}.

1540 — Dada a variável complexa $z=x+iy$ determinar o lugar dos pontos (x, y) do plano para os quais é $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$.

1541 — Dada a função assim definida

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{x-a}{1+e^{(x-a)^{-2}}} & \text{para } x\neq a \\ y(a)=0 \end{cases}$$

estudar a existência da sua derivada no ponto a.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame final, 10 de Outubro de 1942.

1542 — Dada a equação $x^5-2ax^4+(a^2+b^2)x^3+0+5x^2-10ax+5(a^2+b^2)=$ determinar a e b de modo que ela tenha as raizes $+i$ e $-i$. Nessa hipótese resolvê-la. R: *Substituindo* x *na equação dada por* $+i$ *e* $-i$ *vem*

$$\begin{cases} 5(a^2+b^2)-2a-5+i[\;\;1-10a-(a^2+b^2)]=0 \\ 5(a^2+b^2)-2a-5+i[-1+10a+(a^2+b^2)]=0 \end{cases} \textit{donde}$$

$$\begin{cases} 5(a^2+b^2)-\;2a-5=0 \\ (a^2+b^2)+10a-1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a=0 \\ (a^2+b^2)+10a-1=0 \end{cases} \textit{e}$$

$\begin{cases} a=0 \\ b^2=1 \end{cases}$. *Finalmente, tem-se* $x^5+x^3+5x^2+5=0$, $(x^2+1)(x^3+5)=0$ *e* $(x^2+1)(x+\sqrt[3]{5})[(x-\sqrt[3]{5}/2)^2+3\sqrt[3]{25}/4]=0$.

1543 — Dados os três planos $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y+z+1=0 \\ x+3y-3z=0 \end{cases}$ verificar que formam uma superfície prismática, determinar a direcção das arestas e a área da secção nela determinada por um plano perpendicular às arestas. R: *O sistema constituido pelas três equações é incompativel, visto que a caracteristica da matriz dos coeficientes das incógnitas é* 2 *e a da matriz dos coeficientes e dos termos conhecidos é* 3. *Qualquer dos sistemas formado por duas ou três equações dadas é compativel e indeterminado de grau* 1. *Logo os três planos intersectam-se dois a dois, mas não os três, e formam uma superficie prismática. A direcção das arestas é a do vector* $(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\wedge(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-2(\mathbf{j}+\mathbf{k})$. *Um plano perpendicular às arestas é, por exemplo, o plano de equação* $y+z=0$. *Os pontos de encontro dêste plano com as três arestas são*

A $(-2, -1/2, 1/2)$, B $(-9/2, 3/4, -3/4)$, C $(-3/4, 1/8, -1/8)$.

A área do triângulo [ABC] *é*

$$S=1/2 \bmod [(B-A)\wedge(C-A)]=25/16\,.$$

1544 — É dada a equação

$$y(x)=\frac{2^x}{x^{10^3}} \qquad (0<x<\infty)\,.$$

Diga se, para valores muito grandes de x, o valor numérico de $y(x)$ é grande ou pequeno. Porquê?

R: *Procuremos* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^{10^3}}=\frac{(\log 2)^{10^3}}{(10^3)!}\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$ *depois de* 10^3 *aplicações da regra de l'Hopital. Logo* $y(x)$ *é muito grande para valores muito grandes de* x.

Soluções dos n.os 1542 a 1544 de A. Sá da Costa

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — **exame final — 20 de Outubro de 1942.**

1545 — Calcular o valor de

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

R: *Trata-se dum determinante de ordem* $n+1$. *Multipliquemos a 1.ª coluna por* x^n, *a 2.ª coluna por* x^{n-1}, $\cdots$ *a coluna de ordem* n *por* x *e somemos ordenadamente todos êstes produtos à coluna de ordem* $n+1$. *Desenvolvendo o determinante obtido segundo os elementos da sua última coluna, virá:* $\Delta=(-1)^n\cdot(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\times$

$$\times\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

Como fàcilmente se reconhece, êste determinante é $(-1)^n$, *e portanto* $\Delta=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

1546 — Estudar e representar gràficamente a função $y=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot$ Determinar, em particular, as tangentes no ponto de abscissa 3 e num ponto de inflexão. R: *A função dada é contínua nos intervalos abertos* $(-\infty,+1)$ *e* $(+1,+\infty)$. *O ponto* $x=1$ *é um ponto de descontinuïdade infinita de 1.ª espécie porque* $\lim\limits_{x\to 1-0}y=+\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to 1+0}y=+\infty$. *As assíntotas à curva são, como fàcilmente se vê,* $x=1$ *e* $y=0$. *A origem é um ponto da curva. Por ser:* $y'=-(1+x)/(x-1)^3$, $y''=2(x+2)/(x-1)^4$ *e* $y'''=-6(x+3)/(x-1)^5$ *conclui-se, fàcilmente, que a função é crescente no intervalo aberto* $(-1,+1)$ *e decrescente nos intervalos abertos* $(-\infty,-1)$ *e* $(+1,+\infty)$; *o ponto* $(-1,-1/4)$ *é de mínimo. O ponto* $(-2,-2/9)$ *é de inflexão e a concavidade da curva está voltada no sentido das ordenadas negativas no intervalo aberto* $(-\infty,-2)$ *e no sentido das ordenadas positivas no intervalo aberto* $(-2,+\infty)$. *A equação da tangente à curva:*

a) - no ponto $(3,3/4)$ *é* $y-3/4=-1/2\cdot(x-3)$.

b) — e no ponto de inflexão $(-2,-2/9)$ *é* $y+2/9=-1/27\cdot(x+2)$ *por ser respectivamente* $y'(3)=-1/2$ *e* $y'(-2)=-1/27$. *A imagem geométrica de* y *seria agora de construção imediata.*

1547 — Estudar a cónica

$4xy-3y^2+4x-14y-7=0$ (eixos rectangulares)

Determinar, em especial, a sua equação referida aos eixos de simetria. R: *Trata-se duma cónica género hipérbole, não degenerescente porque se tem* $B^2-AC=4>0$ *e* $I_3=12\neq 0$ (I_3 *invariante cúbico*). *O seu centro é o ponto* $(2,-1)$ *e as direcções assintóticas são* $m=0$ *e* $m=4/3$; *portanto, as suas assíntotas são as rectas de equações:* $y=-1$ *e* $y+1=4/3\ (x-2)$. *É fácil ver que a cónica dada tem por direcções principais* 2 *e* -2 *e que os seus eixos têm, pois, por equações:* $y+1=2(x-2)$ *e* $y+1=-2(x-2)$. *Os seus vértices são os pontos de coordenadas* $(0,-7+\sqrt{42})$, $(0,-7-\sqrt{42})$ *e* $(7/4,0)$ *A sua equação, referida aos eixos de simetria, que é da forma* $\alpha x^2-\beta y^2+\gamma=0$, *obtêm-se, fàcilmente, pois terá que ser:* $\begin{cases} I_1=-\ 3=\alpha+\beta \\ I_2=-\ 4=\alpha\beta \\ I_3=\ \ 12=\alpha\beta\gamma \end{cases}$, *donde,*

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\\ \gamma=-3\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=1\\ \gamma=-3\end{cases}$$

(o que equivale a trocar os eixos entre si) e portanto: $x^2-4y^2-3=0$ *ou* $4x^2-y^2+3=0$.

Soluções dos n. 1545 a 1547 de O. Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — CÁLCULO INFINITESIMAL — **Exame Final, Junho de 1943.**

1548 — Sendo $2xy^2=2x^2+y^2$ a equação de uma linha plana, determinar a abscissa dum ponto A de ordenada mínima, e a abscissa dum ponto B de inflexão. Calcular a área limitada pela curva, o eixo dos xx e as paralelas ao eixo dos yy tiradas pelos pontos A e B. R: *Resolvendo em ordem a* y, *vem* $y=\pm\sqrt{\frac{2x^2}{2x-1}}\cdot$ *A condição* $y'=0$ *dá-nos* $x=1$, *que será a abscissa da ponto* A *(pertencente* *ao ramo positivo) de ordenada mínima* $(y_1'' > 0)$. *A condição* $y''=0$ *dá-nos* $x=2$, *que será a abscissa dum ponto* B *de inflexão* $(y_2''' \neq 0)$. *Tem-se, então,*

$$S=\int_1^2 \sqrt{\frac{2x^2}{2x-1}}\,dx=\sqrt{2}\int_1^2 x\,(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx;$$ *ou, pondo*

$$2x-1=t^2,\quad S=\sqrt{2}/2\cdot\int_1^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt=\sqrt{6}-2\sqrt{2}/3,$$

que é a área pedida.

1549 — Integrar a equação $y''+y=2\sec^3 x$, determinar a linha integral que passa pelo ponto $(0,1)$ onde $y'=0$, e calcular o raio de curvatura nêsse ponto. R: *Trata-se de uma equação linear de 2.ª ordem, de coeficientes constantes. Usando o símbolo* D, *a equação sem 2.º membro escreve-se:* $(D^2+1)y=0$, *e o seu integral geral será* $y=A\cos x+B\operatorname{sen} x$; *o método da variação das constantes dá-nos* $A=-\sec^2 x+C_1$, $B=2\operatorname{tg} x+C_2$; *o integral geral da equação dada é, pois,* $y=(C_1-2)\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\sec x$. *As condições iniciais dão-nos* $C_1=2$, $C_2=0$; *a equação da linha integral pedida é, então,* $y=\sec x$, *e tem-se* $R_{(0,1)}=1$.

1550 — Mostrar que a superfície $3z=3xy+2(x^2-y)^{3/2}-2x^3$ é planificável. Escrever a equação do plano tangente com um único parâmetro, e determinar a aresta de reversão. R: *Tem-se* $s^2-rt=0$. *Então,* $p=\varphi(q)$, *e a equação do plano tangente no ponto* (x,y,z) *escreve-se* $Z=\varphi(q)X+qY+\Psi(q)$, *sendo* $\Psi(q)=z-\varphi(q)x-qy$. *Para* $y=0$, *tem-se* $p=q=0$, *logo* $\varphi(0)=0$; *para* $x^2=y$, *tem-se* $p=-x^2$, $q=x$, *logo* $\varphi(x)=-x^2$; *isto leva-nos a verificar que* $\varphi(q)=-q^2$. *Tem-se então,* $\Psi(q)=z+q^2x-qy$. *Para* $x=y=0$, *tem-se* $z=q=0$; *para* $x^2=y$, *tem-se* $z=x^3/3$, $q=x$; *logo* $\Psi(0)=0$, $\Psi(x)=x^3/3$, *o que nos leva a verificar que* $\Psi(q)=q^3/3$. *A equação do plano tangente é, então,* $Z=-q^2X+qY+q^3/3$. *E a aresta de reversão tem para equações* $Z=X^3/3$ *e* $Y=X^2$.

F. C. P. — CÁLCULO INFINITESIMAL — **exame final, Junho de 1943.**

1551 — Sendo $\rho=\cos^2\theta/2$ a equação de uma linha plana, determinar o perímetro da curva e os pontos de ordenadas máximas ou mínimas. R: *Tem-se* $ds=\cos\theta/2\cdot d\theta$; *portanto, o perímetro é* $s=2\int_0^{\pi}\cos\theta/2\cdot d\theta=4$. *Como* $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, *a condição de máximo ou mínimo dá* $\theta_1=\pi/3$, $\theta_2=\pi$, $\theta_3=5\pi/3$; *no ponto* θ_1, y *tem um máximo, no ponto* θ_2 *não tem máximo nem mínimo, no ponto* θ_3 *tem um mínimo.*

1552 — Integrar a equação $(1-x)y''+xy'-y=0$, sabendo-se que admite a solução $y=x$. Determinar a linha integral que passa pelo ponto $(0,1)$ onde a tangente é paralela ao eixo dos xx, e calcular as coordenadas do centro de curvatura nêsse ponto. R: *Trata-se de uma equação linear de 2.ª ordem. Poremos* $y=Cx$ *e, variando a constante, obtem-se* $(1-x)xC''+[2(1-x)+x^2]C'=0$, *que é uma equação incompleta. Pondo* $C'=z$ *e separando variáveis, obtem-se* $\frac{dz}{z}+\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{1-x}\right)dx=0$, *cujo integral geral é* $z=C_1e^x(1-x)/x^2$. *Finalmente, obtem-se* $y=C_2x-C_1e^x$, *que é o integral geral procurado. As condições iniciais, dão-nos* $C_1=C_2=-1$. *A linha integral pedida é, pois,* $y=e^x-x$; *e o seu centro de curvatura no ponto* $(0,1)$ *é o ponto* $(0,2)$.

1553 — Sejam $x=u+v$, $y=u+2v$, $z=e^u\varphi(v)$ as equações duma superfície (S). Determinar $\varphi(v)$ de modo que (S) seja planificável e determinar as constantes de modo que (S) passe pelo ponto $(0,0,1)$ e seja tangente nesse ponto ao plano $x-2y+z=1$. R: *Obtém-se* $\varphi(v)=e^{c_1v+c_2}$ *e, em seguida,* $\varphi(v)=e^{3v}$.

Soluções dos n.ºs 1548 a 1553 de A. Pereira Gomes.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1554 — Resolver a equação biquadrada:
$$[x^2+\sqrt{x}+2x(1+\sqrt{x})]\cdot[x^2+\sqrt{x}(2x-1)]=159600.$$

Problema proposto por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1555 — Circunscrever um tetraedro a um tetraedro dado, cujas fases passam por 4 rectas dadas.

Problema proposto por José Morgado (do Pôrto).