ao ramo positivo) de ordenada minima $(y_1'' > 0)$. *A condição* $y''=0$ *dá-nos* $x=2$, *que será a abscissa dum ponto* B *de inflexão* $(y_2''' \neq 0)$. *Tem-se, então,*

$$S=\int_1^2 \sqrt{\frac{2x^2}{2x-1}}\,dx=\sqrt{2}\int_1^2 x\,(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx; \text{ ou, pondo}$$

$$2x-1=t^2,\ S=\sqrt{2}/2\cdot\int_1^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt=\sqrt{6}-2\sqrt{2}/3,$$

que é a área pedida.

1549 — Integrar a equação $y''+y=2\sec^3 x$, determinar a linha integral que passa pelo ponto $(0,1)$ onde $y'=0$, e calcular o raio de curvatura nêsse ponto. R: *Trata-se de uma equação linear de 2.ª ordem, de coeficientes constantes. Usando o símbolo* D, *a equação sem 2.º membro escreve-se:* $(D^2+1)y=0$, *e o seu integral geral será* $y=A\cos x+B\,\text{sen}\,x$; *o método da variação das constantes dá-nos* $A=-\sec^2 x+C_1$, $B=2\,\text{tg}\,x+C_2$; *o integral geral da equação dada é, pois,* $y=(C_1-2)\cos x+C_2\,\text{sen}\,x+\sec x$. *As condições iniciais dão-nos* $C_1=2$, $C_2=0$; *a equação da linha integral pedida é, então,* $y=\sec x$, *e tem-se* $R_{(0,1)}=1$.

1550 — Mostrar que a superfície $3z=3xy+2(x^2-y)^{3/2}-2x^3$ é planificável. Escrever a equação do plano tangente com um único parâmetro, e determinar a aresta de reversão. R: *Tem-se* $s^2-rt=0$. *Então,* $p=\varphi(q)$, *e a equação do plano tangente no ponto* (x, y, z) *escreve-se* $Z=\varphi(q)X+qY+\Psi(q)$, *sendo* $\Psi(q)=z-\varphi(q)x-qy$. *Para* $y=0$, *tem-se* $p=q=0$, *logo* $\varphi(0)=0$; *para* $x^2=y$, *tem-se* $p=-x^2, q=x$, *logo* $\varphi(x)=-x^2$; *isto leva-nos a verificar que* $\varphi(q)=-q^2$. *Tem-se então,* $\Psi(q)=z+q^2x-qy$. *Para* $x=y=0$, *tem-se* $z=q=0$; *para* $x^2=y$, *tem-se* $z=x^3/3, q=x$; *logo* $\Psi(0)=0$, $\Psi(x)=x^3/3$, *o que nos leva a verificar que* $\Psi(q)=q^3/3$. *A equação do plano tangente é, então,* $Z=-q^2X+qY+q^3/3$. *E a aresta de reversão tem para equações* $Z=X^3/3$ *e* $Y=X^2$.

F. C. P. — CÁLCULO INFINITESIMAL — exame final, Junho de 1943.

1551 — Sendo $\rho=\cos^2\theta/2$ a equação de uma linha plana, determinar o perímetro da curva e os pontos de ordenadas máximas ou mínimas. R: *Tem-se* $ds=\cos\theta/2\cdot d\theta$; *portanto, o perímetro é* $s=2\int_0^{\pi}\cos\theta/2\cdot d\theta=4$. *Como* $y=\rho\,\text{sen}\,\theta$, *a condição de máximo ou mínimo dá* $\theta_1=\pi/3$, $\theta_2=\pi$, $\theta_3=5\pi/3$; *no ponto* θ_1, y *tem um máximo, no ponto* θ_2 *não tem máximo nem mínimo, no ponto* θ_3 *tem um mínimo.*

1552 — Integrar a equação $(1-x)y''+xy'-y=0$, sabendo-se que admite a solução $y=x$. Determinar a linha integral que passa pelo ponto $(0,1)$ onde a tangente é paralela ao eixo dos xx, e calcular as coordenadas do centro de curvatura nêsse ponto. R: *Trata-se de uma equação linear de 2.ª ordem. Poremos* $y=Cx$ *e, variando a constante, obtem-se* $(1-x)xC''+[2(1-x)+x^2]C'=0$, *que é uma equação incompleta. Pondo* $C'=z$ *e separando variáveis, obtem-se* $\dfrac{dz}{z}+\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{1-x}\right)dx=0$, *cujo integral geral é* $z=C_1e^x(1-x)/x^2$. *Finalmente, obtem-se* $y=C_2x-C_1e^x$, *que é o integral geral procurado. As condições iniciais, dão-nos* $C_1=C_2=-1$. *A linha integral pedida é, pois,* $y=e^x-x$; *e o seu centro de curvatura no ponto* $(0,1)$ *é o ponto* $(0,2)$.

1553 — Sejam $x=u+v$, $y=u+2v$, $z=e^u\varphi(v)$ as equações duma superfície (S). Determinar $\varphi(v)$ de modo que (S) seja planificável e determinar as constantes de modo que (S) passe pelo ponto $(0,0,1)$ e seja tangente nesse ponto ao plano $x-2y+z=1$. R: *Obtêm-se* $\varphi(v)=e^{c_1v+c_2}$ *e, em seguida,* $\varphi(v)=e^{3v}$.

Soluções dos n.os 1548 a 1553 de A. Pereira Gomes.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1554 — Resolver a equação biquadrada:
$[x^2+\sqrt{x}+2x(1+\sqrt{x})]\cdot[x^2+\sqrt{x}(2x-1)]=159600.$

Problema proposto por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1555 — Circunscrever um tetraedro a um tetraedro dado, cujas fases passam por 4 rectas dadas.

Problema proposto por José Morgado (do Pôrto).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

881 — Calcular o integral

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}};\quad B^2-AC\neq 0 \;(n \text{ inteiro positivo}).$$

R: *O integral é definido, pois sendo* $B^2-AC\neq 0$ *o radicando do denominador da função integranda só tem raizes simples. Vamos deduzir uma fórmula de recorrência para o seu cálculo. Suporemos* $n>1$.

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^x \frac{(Ax+B)\,x^{n-1}-Bx^{n-1}}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^x x^{n-1}\,d\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,dx-$$

$$-\frac{B}{A}\int_0^x \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{A}x^{n-1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-$$

$$-\frac{n-1}{A}\int_0^x x^{n-2}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,dx-\frac{B}{A}I_{n-1};$$

por outro lado

$$\int_0^x x^{n-2}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,dx=$$

$$=\int_0^x \frac{x^{n-2}(Ax^2+2Bx+C)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=AI_n+2BI_{n-1}+CI_{n-2};$$

donde

$$I_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{A}-\frac{2n-1}{n}\frac{B}{A}I_{n-1}-\frac{n-1}{n}C\cdot I_{n-2}\quad (n>1).$$

Com esta fórmula de recorrência reduz-se o cálculo de I_n *aos de* I_1 *e* I_0, *que se efectuam pelas regras habituais.*

884 — Estudar a convergência da série cujo termo geral é $u_n=\left[\operatorname{sen}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)\right]^n$ $0<a<\frac{\pi}{2}$.

R: *Aplicando o critério de Cauchy, temos* $\sqrt[n]{u_n}=\operatorname{sen}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)$ *cujo limite para* n *infinito é* $\operatorname{sen} a<1$. *A série é pois convergente.*

885 — Integra-se a função $e^z z^{n-1}$ $(n>0)$ ao longo dum contôrno formado por um raio OA segundo ox, um arco de circunferência AB de centro O e raio OA, e um raio BO, sendo B tal que $\alpha=A\hat{O}B$ esteja entre 0 e $\pi/2$.

Fazendo crescer OA indefinidamente deduzir do resultado os integrais definidos:

$$\int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du \qquad \int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\operatorname{sen} bu\,du.$$

R: *Damos apenas os resultados, visto o enunciado indicar o caminho a seguir e os cálculos serem bastante longos:*

$$\int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du=(a^2+b^2)^{-n/2}\cos\left[n\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right]\Gamma(n)$$

$$\int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du=(a^2+b^2)^{-n/2}\operatorname{sen}\left[n\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right]\Gamma(n)$$

em que $\Gamma(n)$ *é a função de Euler* $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$.

886—Dada a curva plana de equação $y^q-Ax^p=0$ (A constante, p e q inteiros), pretende-se saber em que casos o arco pode ser expresso na abscissa por meio das transcendentes elementares.

R: *Dada a curva* $y=y(x)$ *o elemento de arco é dado por* $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. *No caso presente temos* $ds=[1+A^{1/q}p^2q^{-2}x^{2p/q-2}]^{1/2}dx$. *Reduzindo esta diferencial binómia à forma canónica pela mudança de variável* $A^{1/q}p^2q^2x^{2p/q-2}=t$ *obtêm-se*

$$ds=B(1+t)^{1/2}t^{\frac{3p-2q}{2(p-q)}}dt\quad \text{(B constante)}.$$

Sabemos que o integral de $(1+t)^m t^n dt$ *pode exprimir-se pelas transcendentes elementares se forem inteiros* m, n, *ou* $m+n$. *No nosso caso vê-se fàcilmente que essas condições correspondem a ser inteiro par um dos números* $\frac{q}{p-q}$ *ou* $\frac{p}{p-q}$.

1007—Prove que para n inteiro as funções de Bessel $J_n(z)$ verificam $J_n(y+z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(y)J_{n-m}(z)$.

R: *Podemos definir* $J_m(z)$ *por* $e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(z)\cdot t^m\quad (t\neq 0)$. *Aplicando êste desenvolvimento a ambos os membros da identidade*

$$e^{\frac{1}{2}(z+y)\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

vem

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(z+y)t^m=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(z)\cdot t^k\cdot\sum_{l=-\infty}^{+\infty}J_l(y)\cdot t^l$$

e igualando os coeficientes de t^m *temos* $J_m(z+y)=$

$$=\sum_{k+l=m} J_k(z)\cdot J_l(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\cdot J_{m-n}(y) \quad \text{q. e. d.}$$

1008 — Ache o recíproco de $1+\rho^2$ no corpo definido por $f(\rho)=\rho^3-3\rho+1=0$. R: *Seja* $f(x)=x^3-3x+1$ $g(x)=x^2+1$. *Vamos calcular dois polinómios* a *e* b *tais que* $af+bg=1$. *O recíproco pedido será evidentemente* $b(\rho)$. *O algoritmo de Euclides aplicado a* f *e* g *dá*

$$f=x\cdot g+(1-4x)$$

$$g=-\frac{1}{16}(4x+1)(1-4x)+\frac{17}{16}$$

donde

$$1=\frac{16}{17}g+\frac{1}{17}(4x+1)(1-4x)$$

$$=\frac{16}{17}g+\frac{1}{17}(4x+1)(f-xg)$$

$$=g\left[-\frac{4}{17}x^2-\frac{1}{17}x+\frac{16}{17}\right]+f\left[\frac{4}{17}x+\frac{1}{17}\right].$$

O recíproco pedido é pois

$$b(\rho)=-\frac{4}{17}\rho^2-\frac{1}{17}\rho+\frac{16}{17}.$$

1010 — São dados um plano ω e um ponto O dêsse plano. Pede-se a equação geral das superfícies Σ tais que, sendo M um ponto de Σ, MN a normal em M $(N\in\omega)$, MP a perpendicular a ω $(P\in\omega)$, seja igual a uma constante dada a^2 a área do triângulo ONP. Com os mesmos dados fazer $N\hat{O}P=$const. R: *Tomando* ω *para plano* Oxy *e o ponto* O *para origem, a área do triângulo* ONP *é dada por* $S=1/2\cdot z(py-qx)$. *A equação do problema é pois* $2a^2=z(py-qx)$. *O sistema das características desta equação às derivadas parciais admite os integrais primários*

$$x^2+y^2=R^2 \quad \textit{e} \quad z^2+4a^2\theta=C \quad (\textit{em que } y=x\,\mathrm{tg}\,\theta).$$

Donde vem a solução do problema, dada por $z^2+4a^2\,\mathrm{arc\,tg}\,y/x-\varphi(x^2+y^2)=0$ *em que* φ *é uma função arbitrária.*

1011 — Demonstrar que, dados os pontos M_1 e M_2 representativos dos complexos z_1 e z_2, se M_1 descreve uma recta paralela ao eixo Ox, o ponto M representativo do produto $z_1 z_2$ descreve uma recta paralela a OM_2. R: *Sejam* z'_1 *e* z''_1 *dois valores de* z_1. *Será* $\arg(z'_1 z_2-z''_1 z_2)=\arg[(z'_1-z''_1)z_2]=\arg(z'_1-z''_1)+\arg z_2=\arg z_2$ *por ser* $\arg(z'_1-z''_1)=0$. *A igualdade* $\arg(z'_1 z_2-z''_1 z_2)=\arg z_2$ *prova a proposição enunciada.*

Soluções dos problemas anteriores de Mário de Alenquer.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

25 — ALBERT A. ADRIAN — **Introduction to Algebraic Theories** — The University of Chicago Press, 1943.

Os que estudaram álgebra abstrata sabem bem que os seus métodos são simultâneamente mais simples e fáceis de assimilar e mais penetrantes do que os processos clássicos; mas os que tomaram contacto com a álgebra abstracta não ignoram que se apresenta um grande obstáculo ao estudante que deseja travar conhecimento com esta nova orientação da álgebra. O principiante tem de aprender primeiro a lidar com conceitos e a utilizá-los tão fàcilmente como se se tratasse de números, se bem que, depois de tal ter conseguido, note que tudo se desenvolve com mais facilidade.

Tem por objectivo esta «Introdução às teorias algébricas» auxiliar o estudante na sua tentativa de vencer as dificuldades apontadas e de adquirir os hábitos de raciocínio abstracto, que são o fundamento, não só da álgebra abstracta, mas de quási tôdas as teorias matemáticas de hoje. Visto que êste livro tem o intuito de ser uma obra de iniciação, não requere nenhum conhecimento prévio — além de técnicas algébricas já conhecidas dos matemáticos do Renascimento — ainda que uma boa vontade de trabalhar e pensar sejam indispensáveis.

Os assuntos tratados neste texto são os que naturalmente eram de esperar: matrizes, equivalência e semelhança, e certos outros assuntos ligados. Tal impõe o estudo de alguns elementos da teoría dos polinómios — por razões de ordem técnica — e dos espaços lineares, estudo êste indispensável para a compreensão do significado real dos conceitos relativos às matrizes. Indicações da técnica de generalização — tão importantes no